Chapitre 5

Champs de vecteurs

5.1 Rappel : vecteurs dans un plan euclidien

Soit $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ un plan euclidien. C'est d'abbord un ensemble dont on appelle points les éléments, que l'on note A, B, etc Quand on se donne un couple de points $(A, B) \in \mathcal{P}^2$ on forme un vecteur $\overrightarrow{AB}$

5.2 Définitions

Définition 85. Un *champ de vecteurs sur* $D \subset \mathbb{R}^p$ est une application qui à tout point M de D associe un vecteur $\overrightarrow{V}(M)$ de $\mathbb{R}^p$.

Soit $\{O\ ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$, alors un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y, z)$, où $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ est donné par trois fonctions P, Q et R sur D à valeurs réelles :

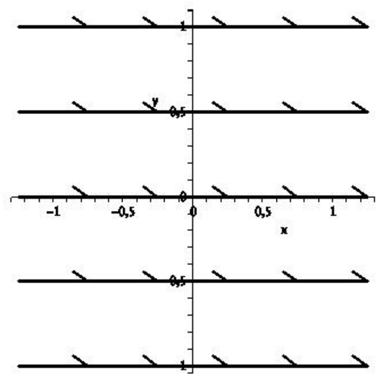
$$\overrightarrow{V}(x, y, z) := P(x, y, z)\,\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\,\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\,\overrightarrow{k}.$$

On dit que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est de classe C^k sur D si P, Q, R sont de classe C^k.

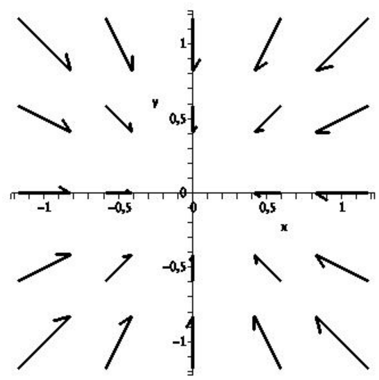
On appelle parfois les fonctions à valeurs réelles des champs scalaires, tandis que les champs vectoriels sont des fonctions à valeurs vectorielles. Quand on dessine un champ de vecteurs, on a des vecteurs associés à tout point du domaine de définition. Pour *dessiner un champ de vecteurs*, on prend quelques points sur le plan $\mathbb{R}^2$ et en chaque point choisi on calcule la valeur du champ. On fait un dessin du vecteur ainsi obtenu en commençant au point choisi. Voici quelques exemples de champs faciles à dessiner :

Exemple 86.

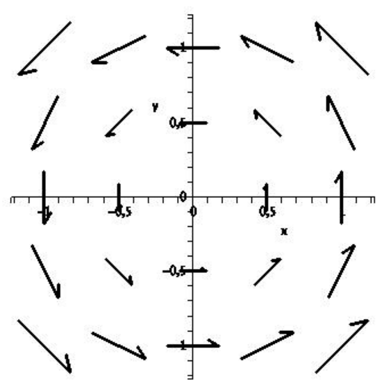
- **Champ uniforme** : champ constant, par exemple, $\lambda\overrightarrow{i}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.



• **Champ convergent** : $-x\overrightarrow{i} - y\overrightarrow{j}$.



• **Champ tournant** : $-y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$.



5.3 Gradient. Opérateur Nabla ∇

Le gradient est un exemple de champ de vecteurs. Le gradient d'une fonction f de D dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^n$ associe à chaque point X de D le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(X)$.

Dans $\mathbb{R}^3$, en coordonnées (x, y, z), on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(X), \frac{\partial f}{\partial y}(X), \frac{\partial f}{\partial z}(X) \right).$$

Définition 87. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on regarde l'*opérateur Nabla* $\overrightarrow{\nabla}$ de coordonnées $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Cet opérateur vectoriel

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{i} \frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{j} \frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{k} \frac{\partial}{\partial z} \tag{5.1}$$

agissant sur une fonction f est égal au gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f$. Cet opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ est aussi appelé l'*opérateur de Hamilton*[1]

Propriété 88. Linéarité du gradient. Soient f_1, f_2 des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ et λ, μ des nombres réels. Alors $\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \, \overrightarrow{\text{grad}} f_1 + \mu \, \overrightarrow{\text{grad}} f_2$.

On peut se poser une question : et si tous les champs de vecteurs étaient des gradients de fonctions ? On voit rapidement que c'est une restriction assez forte.

Définition 89. Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs $D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$. S'il existe $f : D \to \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$, on dit que le champ $\overrightarrow{V}$ *dérive du potentiel scalaire* f sur D et $\overrightarrow{V}$ est un *champ de gradient* aussi appelé *champ potentiel.*

Remarque 90.

1. La condition $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ est donnée dans certains livres de physique avec un signe : $\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{\text{grad}} f$, pour des raisons de convention pour certaines équations.
2. Si la fonction f existe, elle est unique à une constante près.

1. C'est le même Hamilton (1805 - 1865) qui a introduit le mot « vecteur ».

5.4 Divergence et Rotationnel

À l'aide de l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ on peut définir des opérations sur des champs : la divergence et le rotationnel. On donne ses défintions dans les coordonnées euclidiennes, mais ses opérations ne depandes pas de système de coordonnées choisi.

Soit $\overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1. Le produit scalaire de l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ avec le champ $\overrightarrow{V}$ donne une fonction, qui s'appelle la *divergence* de $\overrightarrow{V}$.

Le produit vectoriel de l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ avec un champ $\overrightarrow{V}$ donne un nouveau champ, qui s'appelle le *rotationnel* de $\overrightarrow{V}$.

Remarque 91. La divergence agit sur des champs de vecteurs et donne des fonctions.

Définition 92. Soit $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}^3$, avec $D \subset \mathbb{R}^3$, un champ de vecteurs défini par $\overrightarrow{V} := P\,\overrightarrow{i} + Q\,\overrightarrow{j} + R\,\overrightarrow{k}$, où P, Q et R sont des fonctions $D \to \mathbb{R}$. La *divergence* de $\overrightarrow{V}$ est

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{5.2}$$

Propriété 93. On remarque que la divergence est linéaire :

$$\operatorname{div}(\lambda\overrightarrow{V} + \mu\overrightarrow{W}) = \lambda \operatorname{div}\overrightarrow{V} + \mu \operatorname{div}\overrightarrow{W}.$$

Remarque 94. Le rotationnel agit sur des champs de vecteurs et donne des champs de vecteurs.

Définition 95. Soit $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}^3$, avec $D \subset \mathbb{R}^3$, un champ de vecteurs défini par $\overrightarrow{V} := P\,\overrightarrow{i} + Q\,\overrightarrow{j} + R\,\overrightarrow{k}$, où P, Q et R sont des fonctions $D \to \mathbb{R}$. Le *rotationnel* de $\overrightarrow{V}$ est

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{V} &= \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Propriété 96. On remarque que le rotationnel est linéaire :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\lambda\overrightarrow{V} + \mu\overrightarrow{W}) = \lambda\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{V} + \mu\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{W}.$$

Remarque 97. La divergence et le rotationnel peuvent être définit sur les champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ au lieu de $\mathbb{R}^3$ en comptant la troisème coordonnée simplement égale à 0.

Exemple 98.

Système d'équations de Maxwell pour le champ électromagnétique dans le vide :

$$1.\ \operatorname{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad 2.\ \operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0$$

$$3.\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} \qquad 4.\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$$

Ici on note :

- $\rho(x,t)$ la densité volumique de charge électrique au point x de coordonnées (x_1, x_2, x_3) à l'instant t,
- $\overrightarrow{j}(x,t)$ le vecteur densité de courant,
- $\overrightarrow{E}(x,t)$ le vecteur champ électrique,
- $\overrightarrow{B}(x,t)$ le vecteur induction magnétique,
- ε_0 la permittivité diélectrique du vide,
- c la vitesse de la lumière dans le vide ($= 299792458$ m/s).

Propriété 99. Propriétés de l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$.

Soit $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1, et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors on a :

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V}) = 0.$$

Formellement, on peut le voir comme un produit mixte, qui est identiquement nul si les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants. Ici ce ne sont pas des vecteurs mais des opérateurs vectoriels, mais le produit mixte de $\overrightarrow{\nabla}$, $\overrightarrow{\nabla}$ et $\overrightarrow{V}$ est identiquement nul. On a aussi

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}f = \overrightarrow{\nabla}\wedge(\overrightarrow{\nabla}f) = 0. \tag{5.4}$$

Définition 100. L'opérateur

$$\Delta f := \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}f)$$

défini sur des fonctions $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^2 à valeurs dans les fonctions est appelé l'*opérateur de Laplace*.

5.5 Théorème de Poincaré

Proposition 101. Soit $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, un champ de vecteurs tel que $V := P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$, et P, Q, R des fonctions de D vers $\mathbb{R}$. Une condition nécessaire pour que le champ $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire sur D est qu'en tout point M de D, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} = 0$.

Preuve. La relation 5.4 implique que pour qu'il existe $f : D \to \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$, il faut $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} = 0$. Cela se traduit en trois conditions sur les fonctions P, Q et R :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial R}{\partial y} & = \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} & = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & = \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{array} \right. .$$

□

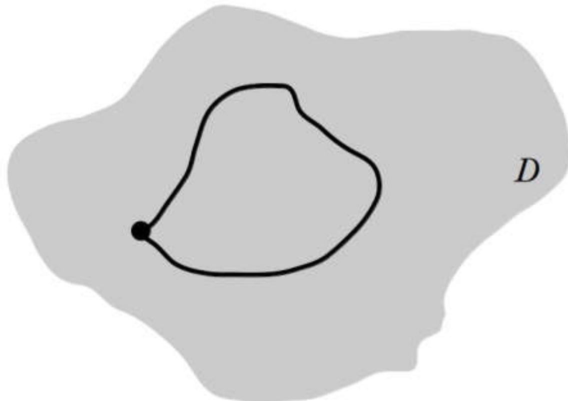
La condition suffisante pour un champ d'être un champ de gradient est une condition sur le domaine de définition dudit champ.

Théorème 102. Poincaré. *Soit* $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un champ de vecteurs de classe* C^1 *tel que* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} = 0$. *Alors il existe une fonction* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *telle que* $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$.

Remarque 103. On remarque ici que le champ $\overrightarrow{V}$ est défini en tout point de $\mathbb{R}^3$. On ne donne pas ici de démonstration de ce théorème mais on remarque que le champ de vecteurs en question doit impérativement être de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. C'est $\mathbb{R}^3$, le domaine de définition du champ, qui joue un rôle important ici.

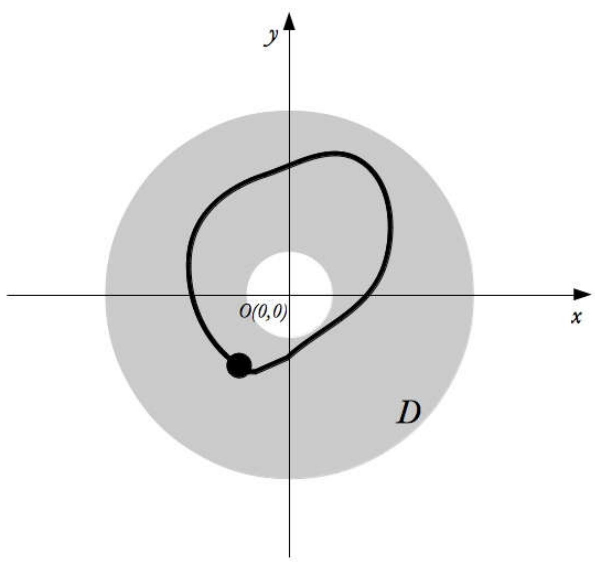
Voici une définition utile :

Définition 104. Un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est *simplement connexe* si D est connexe par arc (`Définition 26`) et toute courbe fermée de D peut être ramenée à un point par une déformation continue tout en restant dans D.



Exemple de domaine D simplement connexe.

Exemple 105. Exemple de domaine non simplement connexe. Soit, dans $\mathbb{R}^2$, un anneau que l'on peut définir pour $r^2 < R^2$ comme l'ensemble $D =: \{(x, y) | \; r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$. On peut voir ce domaine comme un disque de rayon R troué : le petit disque autour du centre est enlevé du grand disque. Il n'est pas simplement connexe. En effet, si on considère une courbe fermée de D (un lacet) qui contourne $(0, 0)$, il n'y a pas de façon de le ramener à un point sans la faire « sauter »par dessus ce disque absent :



Le théorème de Poincaré se formule d'une façon plus générale :

Théorème 106. Poincaré généralisé. *Soit* D *un domaine de* $\mathbb{R}^3$*. Soit* $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}^3$ *un champ de vecteurs de classe* C^1 *et* $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{V} = 0$*. Alors, si* D *est simplement connexe, il existe une fonction* $f : D \to \mathbb{R}$ *telle que* $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$.

5.6 Calcul du potentiel

Si $\overrightarrow{V}$ est un champ potentiel, alors on peut trouver le potentiel à une constante près. On va faire un exemple de calcul ici :

Exemple 107. Soit $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de composantes P, Q et R :

$$P(x,y,z) := 6xy^2, \quad Q(x,y,z) := 6x^2y + 6yz, \quad R(x,y,z) := 3y^2$$

Il est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ car les fonctions P, Q et R sont des polynômes. De plus, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} & = 6y - 6y - 0 & = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} & = 0 - 0 & = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} & = 12xy - 12xy & = 0 \end{cases} .$$

Par le théorème de Poincaré (`Théorème 102`), $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire. On va déterminer tous les potentiels scalaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ du champ $\overrightarrow{V}$. On a $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \overrightarrow{V}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = 6xy^2 & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = 6x^2y + 6yz & (2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = 3y^2 & (3) \end{cases}$$

De (1) on a $f(x,y,z) = \int 6xy^2\,dx = 3x^2y^2 + \phi(y,z)$, où $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable de deux variables. On trouve de là que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y + \frac{\partial \phi(y,z)}{\partial y}$$

Mais de (2) on a $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y + 6yz$.
Donc on en déduit que $\dfrac{\partial \phi(y,z)}{\partial y} = 6yz$ ce qui entraîne $\phi(y,z) = 3y^2z + \psi(z)$, où $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable.
Il suit : $f(x,y,z) = 6x^2y^2 + 3y^2z + \psi(z)$, et avec l'équation (3), on a :
$\dfrac{\partial f}{\partial z} = 3y^2 = \partial(6x^2y^2 + 3y^2z + \psi(z))\partial z = 3y^2 + \psi'(z)$, ce qui donne $\psi(z) = k$, avec k une constante.
Finalement : $f(x,y,z) = 6x^2y^2 + 3y^2z + k$ est un potentiel scalaire de $\overrightarrow{V}$.