Chapitre 9

Théorème de Stokes

9.1 Théorème de Green-Riemann

Parfois on utilise la notation $\oint$ pour une intégrale sur une courbe fermée pour souligner que le circuit est fermé.

Théorème 213. Green-Riemann. *Soient* D *un compact de* $\mathbb{R}^2$ *limité par un bord* $C := \partial D$ *de classe* C^1 *par morceaux et* $P, Q : D \to \mathbb{R}$ *des fonctions de classe* C^1*. On a alors :*

$$\oint_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \tag{9.1}$$

où C^+ *désigne le bord* C*, orienté de sorte qu'un mobile parcourant* C *a toujours* D *à sa gauche.*

Preuve. On commence par donner une démonstration dans le cas le plus simple.

Soit D un carré R de sommets $(0,0), (1,0), (1,1)$ et $(0,1)$. On suppose $Q = 0$. On cherche à démontrer que

$$\oint_{\partial R} P\,dx = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Côté gauche de l'égalité.

Pour calculer l'intégrale curviligne $\int_{\partial R} P\,dx$, on oriente le bord du carré ∂R contre l'aiguille d'une montre. On note Γ_1 le côté de R allant du sommet $(0,0)$ vers le sommet $(1,0)$, Γ_2 le côté allant de $(1,0)$ vers $(1,1)$, etc. Le bord du carré ∂R devient $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3 \bigcup \Gamma_4$. On peut paramétrer les côtés Γ_i de la façon suivante :

$$\begin{array}{lll}
\gamma_1 : [0,1] \to \Gamma_1, & t \mapsto (t,0) & dx = 1 \cdot dt, \ dy = 0 \cdot dt \\
\gamma_1 : [0,1] \to \Gamma_2, & t \mapsto (1,t) & dx = 0 \cdot dt, \ dy = 1 \cdot dt \\
\gamma_1 : [0,1] \to \Gamma_3, & t \mapsto (1-t,1) & dx = 1 \cdot dt, \ dy = 0 \cdot dt \\
\gamma_1 : [0,1] \to \Gamma_4, & t \mapsto (0,1-t) & dx = 0 \cdot dt, \ dy = 1 \cdot dt
\end{array}$$

Par suite,

$$\oint_{\partial R} P\,dx = \int_{\Gamma_1} P\,dx + \int_{\Gamma_2} P\,dx + \int_{\Gamma_3} P\,dx + \int_{\Gamma_4} P\,dx.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} P(x,y)\,dx &= \int_0^1 P(t,0)\,dt,\\
\int_{\Gamma_2} P(x,y)\,dx &= \int_0^1 P(1,t)0\cdot\,dt = 0,\\
\int_{\Gamma_3} P(x,y)\,dx &= \int_0^1 P(1-t,1)\,dt = -\int_0^1 P(t,1)\,dt,\\
\int_{\Gamma_4} P(x,y)\,dx &= \int_0^1 P(0,1-t)0\cdot\,dt = 0.
\end{aligned}$$

Finalement, le côté gauche est égal à :

$$\int_0^1 P(t,0)\,dt - \int_0^1 P(t,1)\,dt.$$

Côté droit de l'égalité.

On calcule l'intégrale double par Fubini :

$$-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right)\,dx = -\int_0^1 (P(x,1)-P(x,0))\,dx,$$

ce qui est exactement le côté gauche obtenu précédemment !

Il est clair que l'on démontre de la même façon que

$$\oint_{\partial R} Q(x,y)\,dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$$

La démonstration se généralise facilement sur n'importe quelle partie quarrable de $\mathbb{R}^2$. □

Remarque 214. L'intégrale curviligne du champ

$$\overrightarrow{V}(x,y) := P(x,y)\,\overrightarrow{i} + Q(x,y)\,\overrightarrow{j}$$

est l'intégrale de la 1-forme différentielle correspondante

$$\alpha := P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

On remarque que la 2-forme

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy$$

est égale à $d\alpha$. La formule de Green-Riemann dans cette écriture devient

$$\oint_{\partial D} \alpha = \iint_D d\alpha. \tag{9.2}$$

Exemple 215. Calculer l'intégrale curviligne I le long de la boucle fermée C constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ décrite dans le sens direct avec

$$I := \int_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy.$$

Vérifier le résultat en utilisant la formule de Riemann.

Remarque 216. Important ! La formule de Green-Riemann marche seulement dans des domaines fermés et bornés par une courbe fermée. On n'a pas de formule reliant les intégrales doubles aux intégrales curvilignes sur un chemin quelconque. La formule de Green-Riemann est vraie seulement pour des chemins fermés.

9.2 Applications : aire, méthode d'arpenteur, théorème de Poincaré

Proposition 217. L'aire d'un domaine de $\mathbb{R}^2$, grâce au théorème de Green-Riemann, s'exprime par une intégrale curviligne :

$$\mathsf{AireD} := \int_D dx\,dy = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} -y\,dx + x\,dy = -\oint_{\partial D} y\,dx = \oint_{\partial D} x\,dy.$$

En particulier, cela nous amène à un calcul particulièrement simple d'une aire de domaine circonscrite par une courbe comme sur le dessin 9.1. Ce calcul est donné par la *méthode de l'arpenteur* : on effectue une addition ou une soustraction à chaque arête verticale rencontré le long du parcours. Exemple au départ au point A :

— La première arête est horizontale, elle compte 0.
— On monte ensuite d'une case sur la verticale où $x = 2$, on compte $(+1) \times 2$.
— Puis vient une horizontale comptant 0.
— Puis la verticale au niveau 3 montant de longueur 1, on la compte $(+1) \times 3$.
— Puis vient une horizontale comptant 0.
— Puis la verticale au niveau 4 descendante de longueur 3, on la compte $(-3) \times 4$.
— Etc.

On addition le tout, le nombre obtenu donne l'aire de la figure :

$$\mathsf{Aire} = 2 + 3 - 12 + 10 + 6 + 5 + 4 - 2 - 3 = 13$$

En effet, si on compte le nombre de petits carrés dans la partie circonscrite c'est 13. La méthode de l'arpenteur est une consequence directe de la formule de Green-Riemann : $\mathsf{AireD} := \oint_{\partial D} x\,dy$.

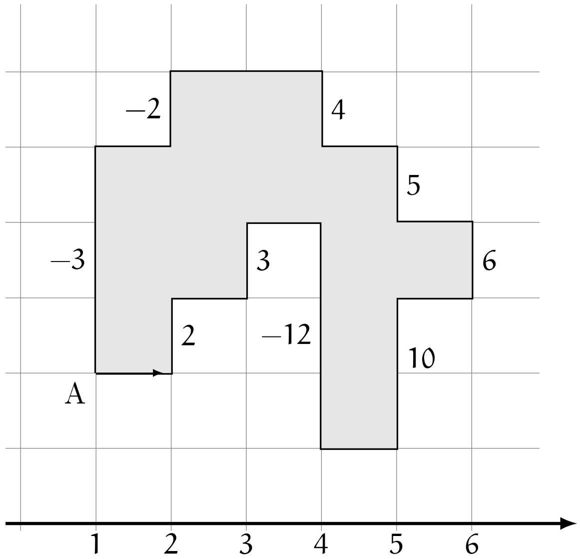

FIGURE 9.1 – Méthode d'arpenteur.

Exemple 218. Soit D le domaine défini entre la parabole $y = x^2$ et la droite $y = 4$. On cherche l'aire de D. On peut la trouver en calculant l'intégrale curviligne de champ de vecteurs $\overrightarrow{V} := -y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$. Le bord est la réunion de Γ et Γ_1, où Γ est la parabole de paramétrisation $(t, t^2), t \in [-2, 2]$ et Γ_1 la droite de paramétrisation $(2 - t, 4)$. De l'exemple 205, on a :

$$I = \oint_{\Gamma^+} -y\,dx + x\,dy = \int_{-2}^{2} (-t^2)\,dt + t \cdot 2t\,dt = \int_{-2}^{2} (t^2)\,dt = \frac{16}{3}$$

et sur la droite Γ_1, on a $x = 2 - t$, $y = 4$, donc $dx = -\,dt$, $dy = 0 \cdot dt$ et

$$I = \int_{\Gamma_1^+} -y\,dx + x\,dy = \int_{-2}^{2} (-4)(-\,dt) + (2 - t)(0 \cdot dt) = \int_{-2}^{2} 4\,dt = 16.$$

Le résultat pour l'intégrale curviligne sur le chemin fermé est

$$\int_{\Gamma \bigcap \Gamma_1} -y\,dx + x\,dy = \frac{16}{3} + 16 = \frac{64}{3}.$$

On vérifie que

$$\oint_{\Gamma \bigcup \Gamma_1} -y\,dx + x\,dy = 2 \iint_D dx\,dy.$$

Et on a :

$$\iint_D dx\,dy = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} dy\,dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3},$$

ce qui est exactement la moité de l'intégrale curviligne.

Remarque 219.

1. Soit la forme différentielle $\alpha := P\,dx + Q\,dy$ sur $D \subset \mathbb{R}^2$ fermée. C'est-à-dire que
$$d\alpha = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$
Par la formule de Green-Riemann (9.1), on voit que cela implique que
$$\oint_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$
et cela sur n'importe quel chemin fermé C^+. La seule condition sur C^+ est que le chemin C^+ doit être le bord d'un domaine quelconque D !

2. La formule de Green-Riemann éclaire un autre côté du théorème de Poincaré : une 1-forme fermée sur un domaine D a son intégrale sur toute courbe fermée contenue dans D égale à zéro. Par conséquent elle est exacte (cf. 206). Par exemple,le changement en coordonnées polaires $(x, y) \to (r, t)$ pour la forme
$$\omega := \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$
donne
$$x := r\cos t \quad \text{et} \quad y := r\sin t,$$
et permet à obtenir
$$dx = dr\cos t - r\sin t\,dt, \;\; dy = dr\sin t + r\cos t\,dt,$$
et donc :
$$\omega = dt.$$
Il apparaît que ω est exacte par cette formule ! Or, si on calcule son intégrale sur un circuit fermé autour de l'origine comme on l'a fait dans l'exemple 211, on voit que l'intégrale n'est pas nulle et par conséquent la forme n'est pas exacte. En effet, ω est exacte localement partout dans $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, mais pas globalement sur $\mathbb{R}^2$. Le plus grand ouvert sur lequel on peut obtenir le changement de variables continu $(x, y) \mapsto (r, t)$ est le complémentaire dans le plan $\mathbb{R}^2$ d'une demi-droite issue de l'origine, mais pas le plan entier ni le plan privé de l'origine.