Chapitre 8

Courbes et intégrales curvilignes

8.1 Courbes de $\mathbb{R}^2$. Théorème des fonctions implicites pour les courbes de $\mathbb{R}^2$

Une courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ peut être définie de plusieurs façons différentes.

8.1.1 Forme explicite

On a $y = f(x)$ où $f : I \to \mathbb{R},\ I \subset \mathbb{R}$,

$$\Gamma := \{(x, y) |\ x \in I \subset \mathbb{R}, y = f(x)\}.$$

Si f est dérivable en $x_0 \in I$ alors Γ possède une tangente au point $m_0(x_0, y_0)$, où $y_0 = f(x_0)$. L'équation de cette tangente est

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

8.1.2 Forme paramétrique

Définition 180. Une partie Γ de $\mathbb{R}^p$ est une courbe s'il existe une application continue γ d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\Gamma \subset \mathbb{R}^p$. Si cette application est bijective, γ est appelé un *arc de courbe*. Le couple (Γ, γ) est appelé une *courbe paramétrée*[1]. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ mais $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ pour tous les points $t_1 \neq t_2$ de $[a, b]$, la courbe Γ est appelée *une courbe fermée* ou *un circuit fermé*. .

1. Cf. Définition 24.

Remarque 181. Les *courbes planes* sont des courbes dans $\mathbb{R}^2$. Les *courbes gauches* sont des courbes dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 182. Soit γ définie par :

$$\gamma(t) := \begin{cases} x & := g(t) \\ y & := h(t) \end{cases}$$

où $g, h : [a, b] \to \mathbb{R},\ [a, b] \subset \mathbb{R}$. Alors, la fonction $\gamma(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ sur un intervalle $[a, b]$ définit Γ, courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma := \{(x, y) | x := g(t), y := h(t)\ ;\ t \in [a, b]\}.$$

On dit que $\gamma(t) := (g(t), h(t))$ est une *représentation paramétrique* de la courbe Γ.

Remarque 183. La même courbe peut avoir des représentations différentes, par exemple, les paramétrisations

$$\gamma(t) := \begin{cases} x & := t \\ y & := 2t \end{cases},\ t \in [0, 1] \quad \text{et} \quad \gamma(s) := \begin{cases} x & := \frac{s}{2} \\ y & := s \end{cases},\ s \in [0, 2]$$

définissent le même segment sur la droite $y = 2x$.

Propriété 184. Pour une courbe $\gamma(t) := \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$, sa dérivée par rapport à $t : \gamma'(t) = \begin{cases} g'(t) \\ h'(t) \end{cases}$ définit un vecteur tangent à la courbe Γ au point $(x, y) := (g(t), h(t))$. Pour écrire l'équation de la tangente à Γ à un point donné de la courbe $\gamma(t_0) := (x_0, y_0)$, on trouve l'équation de la droite passant par (x_0, y_0) et parallèle à $(g'(t_0), h'(t_0))$. On l'écrit sous la forme de déterminant d'une matrice

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & g'(t_0) \\ y - y_0 & h'(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Il suit : $g'(t_0)(x - x_0) - f'(t_0)(y - y_0) = 0$.

Si $(g'(t_0), h'(t_0)) = (0, 0)$ la tangente peut exister également, sa pente est $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{h'(t_0)}{g'(t_0)}$ lorsque cette limite existe.

Définition 185. On note Γ^+ un arc d'une courbe Γ avec un sens de parcours indiqué. On dit que l'on choisit *l'orientation* de Γ quand on choisit le sens de parcours. On dénote par Γ^- un arc d'une courbe qui est le même que Γ^+ mais avec un sens de parcours opposé.

Soit $\gamma : [a, b] \to \Gamma$ une paramétrisation de Γ. On dit que γ est *compatible avec l'orientation* de Γ^+ si le point $\gamma(t)$ se déplace dans le sens de parcours de Γ lorsque le paramètre croît de a à b.

Exemple 186. Soit Γ une partie de la droite $y = x$ sur l'intervalle $[0, 2]$ parcourue du point $(2, 2)$ vers le point $(0, 0)$. Deux paramétrisations

$$t \in [0, 2],\ \gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \text{ et } \mu(t) := \begin{pmatrix} 2-t \\ 2-t \end{pmatrix}$$

se distinguent par l'orientation : μ est compatible avec Γ^+ tandis que γ a une orientation opposée.

8.1.3 Forme implicite

Par une équation cartésienne. Soit

$$\Gamma := \{(x, y) \in D | f(x, y) = 0\} \text{ où } f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2.$$

Dans ce cas, sous certaines conditions il est possible de se ramener à la forme explicite. On cherche à exprimer y en fonction de x par $y = \phi(x)$ localement, $i.e.$ au voisinage d'un point de la courbe (x_0, y_0).

Théorème 187. Des fonctions implicites pour les courbes. *Soient* $D \subset \mathbb{R}^2$ *et* $f : D \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *sur* D. *Soit* $(x_0, y_0) \in D$ *avec*

$$f(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Alors il existe $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert de centre* x_0*, et* $J \subset \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert de centre* y_0*, tels que :*

1. *Pour tout* $x \in I$, $f(x, y) = 0$ *possède une unique solution* $y \in J$*, notée* $y = \phi(x)$ *(en particulier* $y_0 = \phi(x_0)$*).*
2. *En particulier,* $\phi : I \to J$ *est dérivable sur* I *avec*

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}.$$

Exemple 188. Soit $f(x, y) := x^2 + y^2$. Alors $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. Pour le point $(x_0, y_0) := (0, 1)$ de la courbe $f(x, y) = 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2$. Par suite, le théorème s'applique, d'où l'existence d'une fonction $\phi : I \to J$. On peut prendre les intervalles $I :=]-1, 1[$ et $J :=]0, 2[$. Dans ce cas simple on peut expliciter $\phi(x) := \sqrt{1 - x^2}$. Pour la dérivée, on vérifie que

$$\phi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}.$$

Remarque 189. L'intérêt du théorème réside dans les cas où on ne peut pas expliciter ϕ, mais où néanmoins on peut construire le graphe en utilisant les valeurs des tangentes.

En utilisant la formule de Taylor, on a :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) \\ &\quad + \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &\quad + o(\sqrt{|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2}) \end{aligned}$$

La ligne de niveau 0 de f définit une courbe implicitement. Le point (x_0, y_0) appartient à cette courbe si $f(x_0, y_0) = 0$. La différentielle en ce point décrit bien le comportement de la courbe :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0. \tag{8.1}$$

C'est une équation de la droite tangente. Si on peut résoudre cette équation linéaire par rapport à y (i.e. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$), alors la courbe $f(x,y) = 0$ est proche de la droite (8.1) dans un voisinage suffisamment petit. On peut espérer pouvoir résoudre $f(x,y) = 0$ comme une relation explicite entre y et x.

Remarque 190. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$, le théorème des fonctions implicites appliqué en permutant le rôle de x et y donne une application $\psi : J \to I$, et au voisinage de (x_0, y_0) l'équation de la courbe est $x = \psi(y)$.

On peut

Théorème 191. *fonctions implicites de trois variables.*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *sur un ouvert de* $\mathbb{R}^3$. *Soit* (a,b,c) *un point de* U *tel que* $f(a,b,c) = 0$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$.

Alors il existe un ouvert $U_1 \subset \mathbb{R}62$ *contenant* (a,b), *un intervalle ouvert* J *contenant* c, *une fonction* $g : U_1 \to J$ *de classe* C^1 *tels que :*

1. $U_1 \times J \subset U$.
2. *Pour* $(x,y,z) \in U_1 \times J$ *on a l'équivalence :* $f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x,y)$, *en particulier* $c = g(a,b)$.

De plus si f *est de classe* C^k *alors* g *est de classe* C^k. *Les dérivés partielles*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y))/\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y)) \ \forall (x,y) \in U_1.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y))/\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y)) \ \forall (x,y) \in U_1.$$

8.2 Droite tangente, plan normal à une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$

Une courbe paramétrée dans l'espace, appelée aussi « courbe gauche », est donnée par une application vectorielle :

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I \subset \mathbb{R}.$$

Proposition 192. Le vecteur directeur de la droite tangente au point de la courbe
$(x_0, y_0, z_0) := (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ est donné par la dérivée de γ :

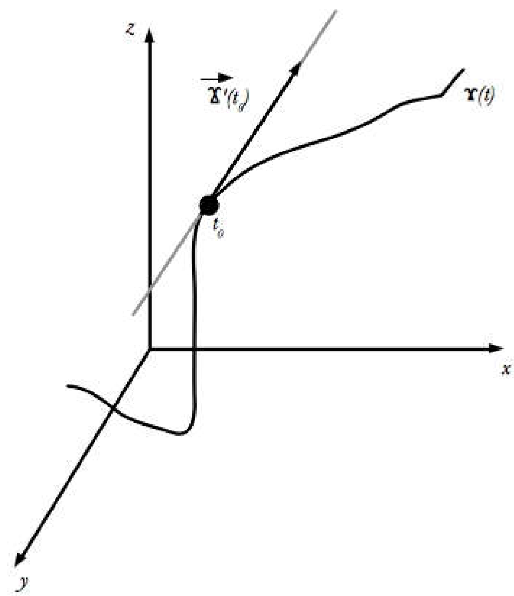
$$\overrightarrow{\gamma'}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}.$$

La droite tangente T passe par (x_0, y_0, z_0) et est parallèle au vecteur $\gamma'(t_0)$. Cela signifie que chaque vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ allant du point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ au point $P(x, y, z) \in T$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\gamma'}(t_0)$. En coordonnées, cela donne l'équation de la droite :

$$\begin{pmatrix} x - x_0 & = & kx'(t_0) \\ y - y_0 & = & ky'(t_0) \\ z - z_0 & = & kz'(t_0) \end{pmatrix}, \; k \in \mathbb{R}.$$

Ici, k est un coefficient de proportionnalité entre les vecteurs $\overrightarrow{P_0P}$ et $\overrightarrow{\gamma'}(t_0)$. Cette variable k dépend de la position du point P sur la droite et quand k parcourt $\mathbb{R}$, le point P parcourt la droite tangente. Si toutes les coordonnées de $\overrightarrow{\gamma'}(t_0)$ sont non nulles, on peut réécrire l'équation de la droite sans k :

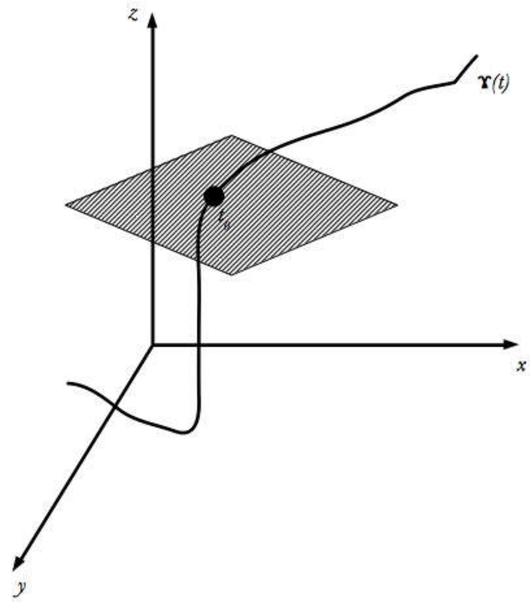
$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \tag{8.2}$$



Proposition 193. Le plan normal, orthogonal à la courbe au point de la courbe (x_0, y_0, z_0), ce qui en pratique signifie orthogonal à la tangente en ce point, est donné par la relation suivante :

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Ici on utilise le produit scalaire de la tangente et du vecteur $\overrightarrow{P_0Q}$, passant du point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ au point $Q(x, y, z)$ du plan. Le plan est normal quand le produit scalaire $\overrightarrow{\gamma'}(t_0) \cdot \overrightarrow{P_0Q}$ vaut 0.



Exemple 194. On cherche les équations de la tangente et du plan normal à la courbe données par les relations paramétriques :

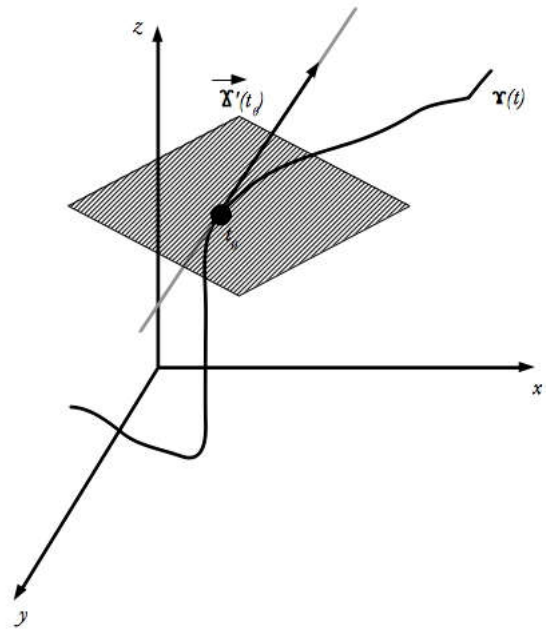
$$x := t, \ y := t^2 \ \text{ et } \ z := t^3$$

au point $(x_0, y_0, z_0) := (1, 1, 1)$, $t = 1$. On a : $x' = 1$, $y' = 2t$ et $z' = 3t^2$, donc au point $(1, 1, 1)$, le vecteur directeur de la tangente est égal à $(1, 2, 3)$. Il suit que l'équation de la tangente est

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{2} = \frac{z - z_0}{3}$$

et celle du plan normal

$$1 \cdot (x - x_0) + 2 \cdot (y - y_0) + 3 \cdot (z - z_0) = 0.$$



Remarque 195. Dernière remarque ici à propos de la dimension.

La droite est un objet de dimension 1, donc pour écrire une équation d'une droite dans $\mathbb{R}^3$, il faut deux relations linéaires indépendantes, car $1 = 3 - 2$. Quand on utilise une variable supplémentaire k pour écrire l'équation d'une droite, on a 4 variables et 3 relation linéaires : $4 - 3 = 1$.

Un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est donné par une seule équation linéaire, du point de vue de la dimension car la dimension du plan est $2 = 3 - 1$.

8.3 Longueur d'une courbe. Abscisse curviligne

Définition 196. Un arc de courbe est orienté par le choix de l'un des deux sens de parcours possible, ce qui revient à distinguer les vecteurs tangents opposés $\pm\overrightarrow{\gamma'}(t)$. Pour calculer la longueur d'un arc de la courbe Γ, on partage la courbe en n morceaux et on cherche la somme des longueurs. Quand $n \to \infty$ les morceaux de la courbe deviennent petits et presque des segments, donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{M_i M_{i+1}}\| = \sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{\gamma}(t_{i+1}) - \overrightarrow{\gamma}(t_i)\| \approx \sum_{i=1}^{n} \| \overrightarrow{\gamma}'(t_i) \| \, (t_{i+1} - t_i).$$

On peut substituer à la longueur d'un morceau M_iM_{i+1} la longueur du vecteur tangent $\|\overrightarrow{\gamma}'(t_i)\|$ au point $M_i := \gamma(t_i)$. En considérant des subdivision de plus en plus fines et en passant à la limite en $n\infty$, on obtient la sommation continue qui définit la longueur : l'arc de courbe Γ donné par la paramétrisation $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := (x(t), y(t), z(t))$ a pour *longueur*

$$L(\Gamma) := \int_a^b \|\overrightarrow{\gamma}'(t)\|\, dt.$$

Proposition 197. La longueur d'un arc de courbe est bien définie. Elle ne dépend pas de la paramétrisation.

Exemple 198. Soient $p : [u_d, u_f] \to [a, b]$, $p(u) := t$ une fonction dérivable avec $p'(u) \neq 0$ pour $u \in [u_d, u_f]$, et $a = p(u_d), b = p(u_f)$. On a le même arc de courbe Γ avec une nouvelle représentation paramétrique $\mu(u) := \gamma(p(u))$. On va montrer que $L(\Gamma) = \displaystyle\int_{u_d}^{u_f} |\mu'(u)|\, du$. En effet,

$$\frac{d\mu}{du} = \frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{du},$$

et par conséquent,

$$L(\Gamma) = \int_{u_d}^{u_f} \|\mu'(u)\|\, du = \int_{u_d}^{u_f} \left\|\frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{du}\right\| du = \int_{u_d}^{u_f} \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| \left(\left\|\frac{dt}{du}\right\| du\right)$$

$$= \int_a^b \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| dt.$$

Définition 199. On pose $ds := \left|\overrightarrow{\gamma}'(t)\right| dt = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$. On l'appelle *l'abscisse curviligne* car cette forme différentielle joue le même rôle dans les intégrales sur les courbes que dx sur les intégrales simples sur un intervalle.

Remarque 200. Dans $\mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée est donnée par

$$\gamma(t) := \begin{cases} x := & x(t) \\ y := & y(t) \end{cases},$$

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x' = & x'(t) \\ y' = & y'(t) \end{cases}, \quad \|\overrightarrow{\gamma}'(t)\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Si la courbe est donnée par l'équation $y = f(x)$, alors :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad \|\overrightarrow{\gamma}'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}.$$

8.4 Intégrale curviligne d'une fonction

Définition 201. Soit f une fonction continue sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ contenant une courbe Γ, $t \in [a,b]$. L'*intégrale curviligne* de f sur Γ est définie par

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\, ds := \int_a^b f(x(t),y(t),z(t)) \left\|\overrightarrow{\gamma}'(t)\right\| dt.$$

Exemple 202. Soit Γ le cercle dans le plan $z = 1$ de centre $(0,0,1)$ et de rayon $R > 0$. On choisit une représentation paramétrique, pour $t \in [0, 2\pi[$:

$$\gamma(t) := \begin{cases} x(t) := & R\cos t \\ y(t) := & R\sin t \\ z(t) := & 1 \end{cases} \qquad \overrightarrow{\gamma}'(t) = \begin{cases} x'(t) = & -R\sin t \\ y'(t) = & R\cos t \\ z'(t) = & 0 \end{cases}.$$

On a : $\left|\overrightarrow{\gamma}'(t)\right| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R$ et la longueur du cercle est :

$$L(\Gamma) = \int_\Gamma ds = \int_0^{2\pi} \left|\overrightarrow{\gamma}'(t)\right| dt = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R.$$

Soit $f(x,y,z) := x^2 = y^2 + z^2$. Sa restriction sur le cercle est

$$f(x,y,z)|_\Gamma := f(R\sin t, R\cos t, 1) = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t + 1 = R^2 + 1$$

et finalement l'intégrale curviligne vaut

$$I = \int_0^{2\pi} (1+R^2) R\, dt = 2\pi(1+R^2)R.$$

8.5 Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs = intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle

Soit $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs continu sur une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ contenant une courbe Γ de paramétrisation $\gamma(t) : [a,b] \to \Gamma$.

Définition 203. L'intégrale

$$I := \int_a^b \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \overrightarrow{\gamma}'(t)\, dt \tag{8.3}$$

du produit scalaire de $\overrightarrow{V}(\gamma(t))$ et du vecteur tangent à la courbe Γ au point $\gamma(t)$: $\overrightarrow{\gamma}'(t)$ est appelé *l'intégrale curviligne d'un champ de vecteurs* $\overrightarrow{V}$.

Remarque 204. L'intégrale (8.3) est indépendante de toute paramétrisation compatible avec l'orientation de Γ^+. Cette intégrale est souvent notée

$$I := \int_{\Gamma^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{ds}$$

où $\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{\tau}\, ds$ est le « vecteur de l'abscisse curviligne » ; le vecteur unitaire $\overrightarrow{\tau}$ étant le vecteur directeur de la tangente à un point donné de la courbe. Le vecteur $\overrightarrow{\tau}$ est orienté dans le sens de parcours de la courbe. En particulier, si $\overrightarrow{V} := P(x,y)\,\overrightarrow{i} + Q(x,y)\,\overrightarrow{j}$,

$$I = \int_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy. \tag{8.4}$$

C'est l'intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle α formellement correspondant au champ de vecteur coordonnée par coordonnée :

$$\overrightarrow{V} := P(x,y)\,\overrightarrow{i} + Q(x,y)\,\overrightarrow{j} \leftrightsquigarrow \alpha := P\,dx + Q\,dy.$$

Exemple 205. Soit γ l'arc de la parabole $y = x^2$ sur le segment $[-2,2]$ et soit le champ $\overrightarrow{V} := -y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$. On peut calculer de deux façons différentes l'intégrale $I := \int_{\Gamma^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{ds}$.

• Première façon : via dx et dy.

À la place du champ de vecteurs $-y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$, on écrit une 1-forme différentielle $-y\,dx + x\,dy$. Donc l'intégrale curviligne devient

$$I = \int_{\Gamma^+} -y\,dx + x\,dy.$$

On choisit une représentation $\gamma : [-2,2] \to \Gamma$ donnée par

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{rl} dx = & 1 \cdot dt \\ dy = & 2t\,dt \end{array} \right. .$$

Donc

$$I = \int_{\Gamma^+} -y\,dx + x\,dy = \int_{-2}^{2} (-t^2)\,dt + t \cdot 2t\,dt = \int_{-2}^{2} (t^2)\,dt = \frac{16}{3}.$$

• Deuxième façon : directe, via dt.

On peut directement calculer l'intégrale par la formule (8.3) en réécrivant respectivement $V(t) = -t^2\,\overrightarrow{i} + t\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{\gamma}'(t) = 1\,\overrightarrow{i} + 2t\,\overrightarrow{j}$:

$$I = \int_{-2}^{2} \overrightarrow{V}(t) \cdot \overrightarrow{\gamma}'(t)\,dt = \int_{-2}^{2} (-t^2 \cdot 1 + t \cdot 2t)\,dt = \frac{16}{3}.$$

Propriété 206. Propriétés de l'intégrale curviligne.

1. Si Γ^- est un chemin avec une orientation opposée à Γ^+,
$$\int_{\Gamma^-} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{ds} = -\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{ds}.$$
2. Soit $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ la réunion de deux arcs de classe C^1. Le choix d'orientations pour Γ_1 et Γ_2 fournit l'orientation pour leur réunion. On définit alors
$$\int_{\Gamma_1^+ \bigcup \Gamma_2^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{ds} := \int_{\Gamma_1^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{ds} + \int_{\Gamma_2^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{ds}.$$

Remarque 207. Sens physique d'une intégrale curviligne. Si $\overrightarrow{V}(M)$ représente une force variable appliquée au point M du chemin Γ^+, l'intégrale I est le *travail de la force* V nécessaire pour déplacer une particule unitaire le long du chemin Γ^+. L'intégrale curviligne du champ V sur Γ^+ est aussi appelée la *circulation* du champ V sur Γ^+.

8.6 Théorème de Poincaré et intégrales curvilignes

Le théorème de Poincaré parle des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de vecteurs soit un champ de gradient (`Théorème 106`) ou pour qu'une forme fermée soit exacte (`Théorème 148`). L'intégrale curviligne d'un champ de gradient a des propriétés particulières, à savoir :

Proposition 208. L'intégrale curviligne du champ de gradient défini par $\overrightarrow{V} := \overrightarrow{\text{grad}} f$ le long d'un arc de courbe d'extremités A et B est égale à $f(B) - f(A)$.

Preuve. On montre la proposition dans $\mathbb{R}^2$. Le champ
$$\overrightarrow{V}(x, y) = \overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \overrightarrow{j}$$
définit l'intégrale curviligne
$$\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{\Gamma^+} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$
Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ une paramétrisation compatible de Γ^+. En particulier $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$. La restriction de la forme $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ sur Γ^+ nous donne :
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} dt = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) dt \\ &= \frac{df(x(t), y(t))}{dt} dt = df. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{ds} = \int_a^b df = [f(x(t), y(t))]_a^b = f(B) - f(A).$$

□

Remarque 209. Important ! L'intégrale ne dépend donc que des extrémités du chemin d'intégration Γ^+, pas du chemin lui-même.

Proposition 210. Les propriétés suivantes d'un champ $\overrightarrow{V}$ de vecteurs sont équivalentes :

- Il existe une fonction f telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$.
- Il existe une fonction f telle que $\overrightarrow{V} \cdot ds = df$.
- La circulation de $\overrightarrow{V}$ d'un point A au point B est indépandente du chemin. Elle ne dépend que de A et de B.
- La circulation du champ $\overrightarrow{V}$ le long de tout chemin fermé est nulle.

Exemple 211. On considère $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs défini sur l'ouvert $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $\overrightarrow{V}(x,y) := P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$, avec $P(x,y) := \frac{-y}{x^2+y^2}$ et $Q(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2}$. On vérifie que $\overrightarrow{V}$ satisfait la condition nécessaire pour être un champ de gradient :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

On calcule la circulation de $\overrightarrow{V}$ sur le cercle unité C^+ paramétré comme suit :

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi],\ x(t) := \cos t,\ y(t) := \sin t.$$

Dans cette paramétrisation, les différentielles sont $dx = -\sin t\, dt$ et $dy = \cos t\, dt$. Les coordonnées du champ $\overrightarrow{V}$ sont :

$$P(x(t), y(t)) = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin t}{1} \quad \text{et} \quad Q(x(t), y(t)) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos t}{1}.$$

Finalement, l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{C^+} P\, dx + Q\, dy$ se calcule comme suit :

$$\int_0^{2\pi} -\sin t(-\sin t)\, dt + \cos t \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

et s'avère ne pas être nulle. Par la `Proposition 210`, cela implique que ce champ $\overrightarrow{V}$ n'est pas un champ de gradient car la circulation le long du chemin fermé (le cercle C^+) n'est pas nulle !

Remarque 212. Par le théorème de Poincaré on aurait pu anticiper cela car Ω, domaine de définition du champ $\overrightarrow{V}$, n'est pas simplement connexe (`Définition 104`). En effet, le cercle C^+ est un chemin autour du point $(0,0)$. Ce point étant exclu du domaine Ω, on ne peut pas ramener C^+ à un point tout en restant dans Ω.