Chapitre 7

Intégrales multiples

7.1 Définition. Intégrales doubles. Théorème de Fubini

Définition 151. Soit f une fonction continue sur un rectangle R de $\mathbb{R}^2$: $R := [a, b] \times [c, d]$. On partage ce rectangle en $n \cdot m$ petits rectangles $R_{ij}, i \in [1, m],\ j \in [1, n]$. Le rectangle R_{ij} a pour côtés le m-ième segment horizontal et le n-ième segment vertical. Son sommet supérieur droit est le point $(x_i, y_j) := (a + i \cdot \frac{b-a}{m}, c + j \cdot \frac{d-c}{n})$. La *somme de Riemann* S_{mn} est la somme des volumes des parallélépipèdes de bases sur R_{ij} et de hauteurs donnés par la valeur de f en (x_i, y_j) de R_{ij}

$$S_{mn} = \frac{b-a}{m} \frac{d-c}{n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j).$$

Définition 152. L'intégrale double de f sur R est la limite des sommes de Riemann :

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy := \lim_{m\to\infty, n\to\infty} S_{mn}.$$

Propriété 153.

1. **Linéarité.** Soient f et g deux fonctions réelles continues sur R. Alors :

$$\iint_R (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y))\, dx\, dy$$
$$= \lambda \iint_R f(x, y)\, dx\, dy + \mu \iint_R g(x, y)\, dx\, dy.$$

2. **Croissance.** Soient f et g deux fonctions réelles continues sur R, telles que $f(x, y) \leq g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in R$. Alors :

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy \leq \iint_R g(x, y)\, dx\, dy.$$

On en déduit que :

$$\left|\iint_R f(x,y)\,dx\,dy\right| \leq \iint_R |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

3. **Théorème de Fubini.** L'intégrale double d'une fonction réelle continue f sur un rectangle $R := [a,b] \times [c,d]$ est égale à deux intégrales simples successives :

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy := \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy$$
$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

En particulier, si $f(x,y) = g(x)h(y)$,

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy.$$

Exemple 154. Considérons le rectangle $R = [0,2] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$. Des points de ce rectangle $(x,y) \in R$ satisfont les relations : $0 \geq x \geq 2,\ -1 \geq y \geq 1$. L'integrale $\iint_R x^2 + xy - y\,dx\,dy$ se calcul

$$\int_0^2 \left(\int_{-1}^1 x^2 + xy - y\,dy\right)\,dx = \int_0^2 \left[x^2y + x\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right]_{y=-1}^{y=1} dx$$
$$= \int_0^2 x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - (-x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2})\,dx = \int_0^2 2x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Il faut bien remarquer que dans l'intégrale $\int_{-1}^1 x^2 + xy - y\,dy$ les fonctions sont considerées comme les fonctions de y, en traitant x comme une constante independente de y.

On peut calculer le même intégrale en calculant d'abord l'intégrale simple par rapport à x (en traitant y comme une constante) et après par rapport à y :

$$\int_{-1}^1 \left(\int_0^2 x^2 + xy - y\,dx\right)\,dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}y - xy\right]_{x=0}^{x=2} dx$$
$$= \int_{-1}^1 \frac{8}{3}\,dy = \left[\frac{8}{3}y\right]_{-1}^1 = \frac{16}{3}.$$

Le calcul dans les deux cas donne le même resultat, et pour certaines intégrales il est plus facile dans un ordre que dans l'autre. On choisi l'ordre d'intégration (d'abord par raport à x et après par rapport à y ou le contraire) en fonction de facilité de calcul. Par le théorème de Fubini, le resultat est le même.

7.2 Intégrale double sur une partie quarrable

Pour définir l'intégrale double sur une partie de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un rectangle on introduit la notion de « partie quarrable »du plan.

Définition 155. Soit D une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ et $R := [a, b] \times [c, d]$ un rectangle qui la contient.

On appelle *subdivison* σ de R, $m \cdot n$ rectangles

$$R_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], x_i, y_j \in R,$$

venant du partage de $[a, b]$ en m segments et de $[c, d]$ en n segments :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \ ; \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

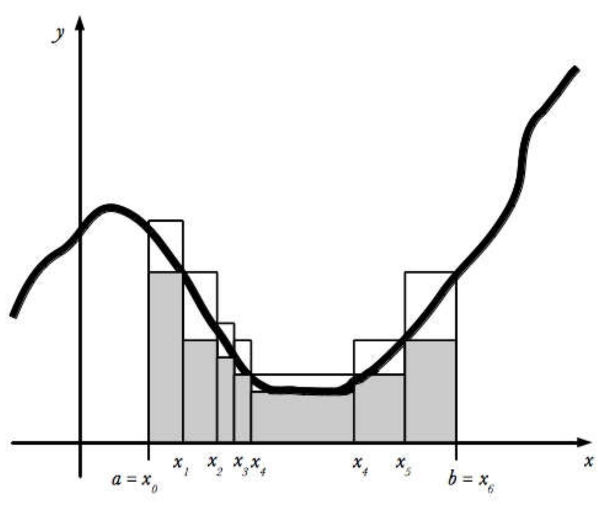
pour m et n quelconques.

Le rectangle R_{ij}, est d'aire $\mu(R_{ij}) = (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$.

Définition 156. À toute subdivison σ de R on associe deux quantités que l'on appelle les *sommes de Darboux* :

$$s(\sigma) := \sum_{R_{ij} \subset D} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$$

$$\text{et } S(\sigma) := \sum_{R_{ij} \bigcap D \neq \emptyset} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j).$$



Définition 157. On dit que $D \subset R$ est *quarrable* si la borne supérieure des sommes $s(\sigma)$ est égale à la borne inférieure des sommes $S(\sigma)$. Leur valeur commune donne l'aire de D.

Remarque 158. Si D est une partie quarrable du plan, alors la frontière de D est quarrable d'aire nulle. Ainsi, un disque ou un polygone sont des exemples de parties quarrables, que l'on prenne ou non leur frontière.

Définition 159. Une fonction f bornée sur une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ est *intégrable* si et seulement si la somme (appelée *somme de Riemann*)

$$\sum_{R_{ij} \bigcap D \neq \emptyset} f(u_i, v_j) \text{ Aire}(R_{ij})$$

tend vers une limite finie indépendante du choix de (u_i, v_j) lorsque les termes $x_{i+1} - x_i$ et $y_{j+1} - y_j$ tendent vers 0. Cette limite est appelée l'*intégrale* de f sur D et noté :

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Proposition 160. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction *continue et bornée* sur une partie quarrable du plan. Alors f est intégrable sur D.

Remarque 161. La propriété d'être bornée est importante. C'est la même chose pour les fonctions d'une seule variable comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui n'est pas bornée sur l'intervale $]0, 1]$: elle n'y est pas intégrable !

Proposition 162. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur une partie quarrable du plan. Si l'ensemble des points de discontinuité de f est d'aire nulle, alors f est intégrable sur D.

Remarque 163. L'aire d'une partie quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$ peut être vue comme une intégrale d'une fonction constante égale à 1 sur D :

$$\mathsf{Aire}(D) := \iint_D dx\, dy.$$

Il est facile d'expliquer cela par un raisonnement géométrique : il suffit de présenter le graphe de la fonction 1 sur D et voir quel volume représente l'intégrale double.

Comment, en pratique, calcule-t-on les intégrales doubles sur une partie quarrable du plan ?

Définition 164. On appelle description hiérarchique du domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$: l'existence de deux réels a et$b$, $a < b$ et de deux applications continues sur $[a, b]$, notées ϕ et ψ tels que $\forall x \in [a, b]$, $\phi(x) \leqslant \psi(x)$, avec

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [\phi(x), \psi(x)] \end{cases}$$

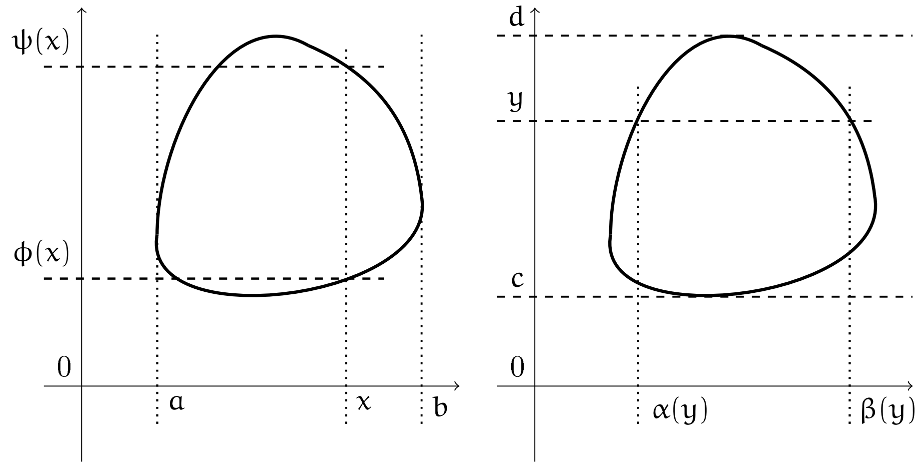


FIGURE 7.1 – Deux descriptions hiérarchiques du domaine.

Du coup le domain $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ a \leq x \leq b, \ \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Ce qui peut s'illustrer par la figure ci-dessous.

Attention ! C'est une description hierarchique du domaine D, il ne faut pas chercher les bornes extrèmes pour les deux variables independament les unes des autres, et transformer tous les domaines en rectangles...

Le même domaine peut avoir une autre description hiérarchique $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ c \leq y \leq d, \ \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$, comme illustré sur Fugure 7.2.

Théorème 165 (Fubini : inversion des bornes).

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un domaine* $D \subset \mathbb{R}^2$ *possédant une descriptions hiérarchiques*

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [a, b] \\ y \in [\phi(x), \psi(x)] \end{array} \right.$$

Alors, l'intégrale double de f *sur* D *est égale à deux intégrales simples emboitées :*

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Si le domain posséde une autre description hierarchique

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \in [c, d] \\ x \in [\alpha(y), \beta(y)] \end{array} \right.$$

alors la même intégrale est aussi égale à deux intégrales simples emboitées suivantes : $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$

Exemple 166. On calcule $I := \displaystyle\iint_D (x + y)^2\, dx\, dy$ où D est un triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(2, 0)$.

Alors, ici : $\phi(x) = 0$ et $\psi(x) = -\frac{x}{2} + 1,\ x \in [0, 2]$. Donc

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{-\frac{x}{2}+1} (x+y)^2 \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[(x+y)^3 \right]_{y=0}^{y=-\frac{x}{2}+1} dx = \frac{7}{6}.$$

La variable x ayant exactement le même statut que la variable y, on peut calculer la même intégrale comme suit : $I = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2y} (x+y)^2 \, dx \right) dy$ et obtenir le même résultat.

Remarque 167. Il faut faire attention aux bornes de l'intégrale. La valeur de l'intégrale est un nombre ; on ne peut pas avoir de fonctions aux bornes de l'intégrale simple calculée en dernier.

7.3 Changement de variables dans une intégrale double. Matrice jacobienne

Proposition 168. Soit f une fonction continue sur un compact quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit une bijection notée $\Delta \to D$ définie par :

$$(u, v) \mapsto (x := \phi(u, v), y := \psi(u, v)),$$

ϕ et ψ étant de classe C^1. Alors,

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_\Delta f(\phi(u, v), \psi(u, v) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du \, dv,$$

où $\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| := \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right|$

est la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne (`Définition 31`) de l'application $\Delta \to D$.

Esquisse de preuve. On peut le voir en utilisant le calcul des formes différentielles. Si $x := x(u, v)$ et $y := y(u, v)$, la 2-forme différentielle $dx \wedge dy$ s'exprime en $du \wedge dv$ par le calcul suivant (dans le contexte des intégrales on n'écrit pas le symbole du produit $\wedge$) :

$$\begin{aligned} dx \, dy &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} du \, dv + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} dv \, du = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du \, dv. \end{aligned}$$

□

Exemple 169. Changement linéaire de variables. Soient

$$\phi(u,v) := au + bv \quad \text{et} \quad \psi(u,v) := cu + dv.$$

Alors la fonction intégrée n'est modifiée que par le facteur $|ad - bc|$ (valeur absolue du déterminant). Lorsque ce déterminant est 1 (pour une rotation par exemple), la fonction intégrée reste inchangée. Ce changement de variables linéaire envoie un carré $[0,1] \times [0,1]$ vers le parallélogramme P engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Donc, en particulier,

$$\mathrm{Aire}(P) = \int_P dx\,dy = \int_{[0,1]\times[0,1]} |ad - bc|\,du\,dv = |ad - bc|.$$

Exemple 170. Changement en coordonnées polaires.
Soit $[0,\infty[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ une bijection entre les coordonées polaires et cartésiennes donnée par

$$(r,t) \mapsto (x := r\cos t, y := r\sin t).$$

$$\text{Alors,} \quad \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r.$$

On va calculer $I := \iint_D y^2\,dx\,dy$ sur D, disque de centre $(0,0)$ de rayon R. Le calcul direct est assez long :

$$\begin{aligned}
I = & \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2\,dy \right) dx = \int_{-R}^{R} 2 \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2\,dy \right) dx \\
= & \int_{-R}^{R} 2 \left(y^3/3 \right)_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \frac{4}{3}\int_0^R (\sqrt{R^2-x^2})^3\,dx \\
= & \tfrac{4}{3}\int_{\pi/2}^{0} R^3 \sin^3\theta(-R\sin\theta)d\theta = \frac{4}{3}R^4\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta d\theta = \frac{\pi R^4}{4}
\end{aligned}$$

où on utilise le changement de variables $x := R\cos\theta$ $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$. Et il suit que : $dx = -R\sin\theta\,d\theta$ et $R^2 - x^2 = R^2(1-\cos^2\theta) = R^2\sin^2\theta$. On utilise aussi la linéarisation de $\sin^4\theta$:

$$\begin{aligned}
\sin^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 &= \frac{e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} \\
&= \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Ce calcul a l'air assez long et fort utile, mais à l'aide d'un changement de variables sous l'intégrale double on arrive au résultat plus rapidement : les coordonnées polaires transforment le rectangle en disque. Ici on a un disque, et donc :

$$\Delta := \{(r,t) \in \mathbb{R}^2 \,|0 \le r \le R \text{ et } 0 \le t \le 2\pi\}$$
$$\to D := \{(x,y) \in R^2 \,\Big|\, x^2+y^2 \le R^2\}.$$

D'où :

$$I = \iint_\Delta r^2 \sin^2 t r \, dt \, dr = \int_0^R r^3 \, dr \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt$$
$$= \frac{R^4}{4} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} \, dt = \frac{\pi R^4}{4}.$$

7.4 Volume. Intégrales triples

Pour certaines parties $E \subset \mathbb{R}^3$ et certaines fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ on définit un nombre réel noté

$$I = \iiint_E f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

et appelé l'*intégrale triple* de f sur E.

Définition 171. Un *compact élémentaire* Δ de $\mathbb{R}^3$ est une partie de $\mathbb{R}^3$ de l'une des formes suivantes :

(1) $\Delta_{(x,y)} :=$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \phi_1(x,y) \le z \le \phi_2(x,y)$, où $(x,y) \in D$ est une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et ϕ_1, ϕ_2 sont des fonctions continues sur $D\}$.

(2) $\Delta_z :=$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ a \le z \le b$, où $(x,y) \in D(z) :=$ la projection sur le plan xy de l'intersection de Δ et du plan passant par $(0,0,z)$ et parallèle au plan $xy\}$.

(3) $P := [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, dans ce cas on dit aussi que c'est un pavé de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 172. Fubini. *Soit Δ un compact élémentaire de $\mathbb{R}^3$ et $f(x,y,z)$ une fonction continue sur Δ.*

1. *Si Δ est de type $\Delta_{(x,y)}$, alors :*

$$\iiint_\Delta f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iint_D \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z) \, dz \right) dx \, dy$$

(intégration par « piles »).

2. *Si Δ est de type Δ_z, alors :*

$$\iiint_\Delta f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\iint_{D(z)} f(x,y,z) \, dx \, dy \right) dz$$

(intégration par « tranches »).

3. *Si* $\Delta = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, *alors :*

$$\begin{aligned}\iiint_\Delta f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z)\,dz\right) dy\right) dx \\ &= \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z)\,dx\right) dy\right) dz \\ &= \cdots\end{aligned}$$

Remarque 173. En particulier, le volume de Δ est l'intégrale triple sur Δ de la fonction 1 :

$$\text{Volume de } \Delta := \iiint_\Delta dx\,dy\,dz.$$

Proposition 174. Les intégrales triples sont des intégrales de 3-formes différentielles. Pour les 3-formes différentielles on peut calculer ce qui se passe si on change les variables. On suppose que x, y et z sont des fonctions de variables u, v et w telles que l'on a les formules suivantes :

$$x := x(u, v, w),\ \ y := y(u, v, w),\ \ z := z(u, v, w).$$

Ce sont des formules de changement de variables ; c'est-à-dire une transformation qui à un point m de coordonnées u, v et w associe le point de coordonnées x, y et z. Le jacobien du changement de variables est le déterminant

$$\left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Alors, si le domaine Δ est transformé par ce changement de variables en Δ', la 3-forme différentielle $dx\,dy\,dz$ doit être changée à l'aide de la matrice jacobienne, et on obtient la formule suivante :

$$\iiint_\Delta f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{\Delta'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw.$$

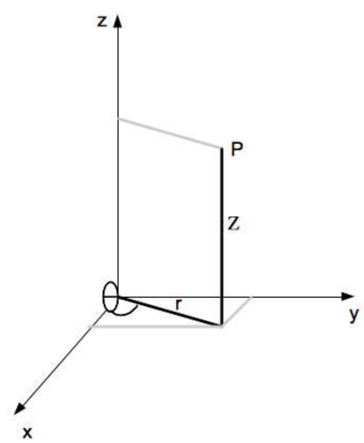
Remarque 175. Pour une présentation un peu différente des intégrales multiples, on renvoie le lecteur à l'annexe 1.

7.5 Coordonnées cylindriques et sphériques

7.5.1 Coordonnées cylindriques

Définition 176. Les *coordonnées cylindriques* sont r, t et z, telles que :

$$x := r\cos\theta,\; y := r\sin\theta,\; z := z,\; \text{avec } r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$



Proposition 177. On obtient :

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}\right| = r.$$

Exemple 178. Le volume de la partie Δ du cylindre d'équation cartésienne $x^2+y^2-ax \leq 0$ (où $a > 0$) comprise entre le plan xy et le plan d'équation $z = 1$ s'obtient grâce à la formule de changement de variables : Δ est transformée par les coordonnées cylindriques en

$$\Delta' := \{(r,t,z) |\; t \in [0, 2\pi[,\; r \in [0, a\cos t],\; z \in [0,1]\}.$$

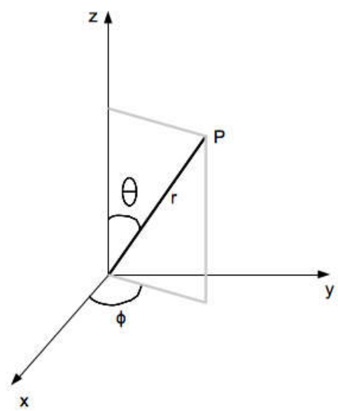
Alors,

$$V = \iiint_\Delta dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{a\cos t} r\,dr\,dt \int_0^1 dz = \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t)^2}{2}\,dt$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2\pi}{2}.$$

7.5.2 Coordonnées sphériques

Définition 179. Les *coordonnées sphériques* sont (θ, ϕ, r) telles que :

$$\begin{array}{rcl} g : [0,\pi] \times [0,2\pi] \times [0,+\infty[& \to & \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\phi,r) & \mapsto & (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta). \end{array} \tag{7.1}$$



7.6 Questions des khôlles

Questions théoriques

1. Énoncer la formule de changement de variables dans une intégrale double.
2. Énoncer le théorème de Fubini pour un rectangle.
3. Donner la définition d'une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$.
4. (a) Quel est le sens géométrique d'une intégrale double d'une fonction continue f sur une partie quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$?
   (b) Quel est le sens géométrique d'une intégrale double d'une fonction $f(x,y) := 1$ sur une partie quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$?

Exercice 1 : Calcul des intégrales

1. Calculer
$$\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$
où $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1 \ , \ x \ge 0 \ , \ y \ge x-1\}$.