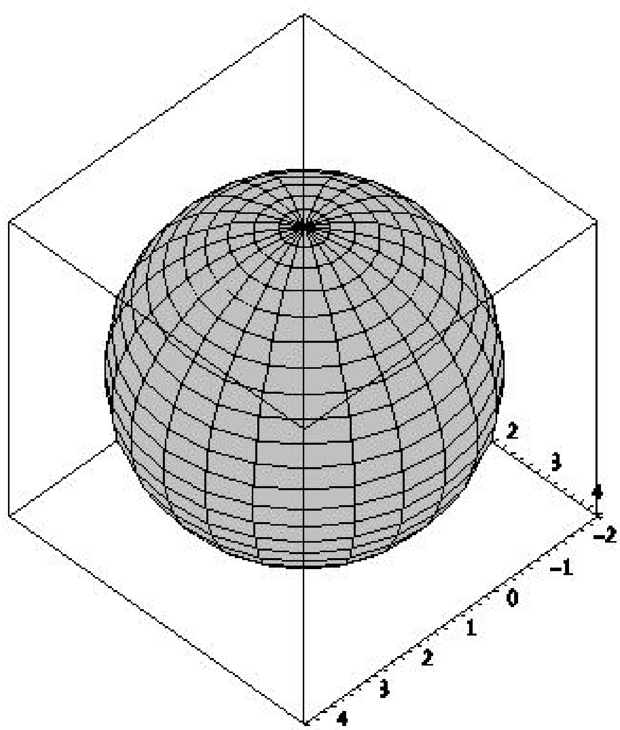
9.3 Surfaces. Intégrales de surface de fonctions réelles

L'idée de base est la même que pour les intégrales curvilignes, mais au lieu d'intégrer sur un arc de courbe, on intègre sur une surface. C'est par une intégrale de surface que l'on calcule

- l'aire d'une surface (l'aire d'une sphère, par exemple),
- le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface.

Proposition 220. Une surface S de $\mathbb{R}^3$ peut être définie de différentes façons :

1. **Forme explicite :** Par une équation de la forme $z = f(x, y)$ où $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$,
$$S =: \{(x, y, z)|\ (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\}.$$
Une paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2$ en est un exemple.
2. **Forme implicite :** Par une équation de la forme $F(x, y, z) = 0$, où $F : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^3$,
$$S := \{(x, y, z) \in E \subset \mathbb{R}^3|\ F(x, y, z) = 0\}.$$
La sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre l'origine et de rayon R en est un exemple :



$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

3. **Forme paramétrique :** Par une représentation paramétrique :

$$g: \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^2 & \to & S \subset \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & (x,y,z) \end{array}.$$

Exemple 221. Soit S une une sphère de centre l'origine et de rayon R. Soit

$$g: \begin{array}{ccc} [0,\pi] \times [0,2\pi] & \to & S \subset \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\phi) & \mapsto & (R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta) \end{array}. \tag{9.3}$$

Soit m le point de S de paramètres θ et ϕ.

1. Lorsque ϕ est fixé et que θ varie dans $[0,\pi]$, m décrit un demi-cercle. Un vecteur tangent à ce demi-cercle au point m est
$$\overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial \theta}} = (R\cos\theta\cos\phi, R\cos\theta\sin\phi, -R\sin\theta).$$
2. Lorsque θ est fixé et que ϕ varie dans $[0,2\pi]$, m décrit un cercle. Un vecteur tangent à ce cercle au point m est
$$\overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial \phi}} = (-R\sin\theta\sin\phi, R\sin\theta\cos\phi, 0).$$

Définition 222. On note $\overrightarrow{N}(\theta,\phi) := \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial\theta}} \wedge \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial\phi}}$. Ce vecteur, s'il est non nul, est normal à la sphère au point m. Le point $m \in S$ est appelé un *point régulier* de la surface si ce vecteur est non nul en m.

Remarque 223. On a une situation analogue pour une surface quelconque paramétrée par

$$g: \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^2 & \to & S \\ (u,v) & \mapsto & (x,y,z). \end{array}, g \text{ de classe } C^1.$$

On considère D une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et g de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant D. On note

$$\overrightarrow{N}(u,v) := \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial u}} \wedge \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial v}}.$$

Ce vecteur, s'il est non nul, est normal à la surface S au point (u,v).

La notion d'aire de la surface paramétrée par $\overrightarrow{g}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$ vient de la considération suivante :

La surface peut être fractionnée en un nombre fini de parties associées à des rectangles $R_{ij} := [u_i, u_i + \Delta_i u] \times [v_j, v_j + \Delta_j v]$ du plan de paramètres (u,v). L'aire de la portion de surface correspondant à R_{ij} sera approchée par l'aire d'un rectangle de côtés

$$\overrightarrow{g}(u_i, v_j + \Delta_j v) - \overrightarrow{g}(u_i, v_j) \approx \frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial v}\Delta_j v$$

$$\text{et } \overrightarrow{g}(u_i + \Delta_i u, v_j) - \overrightarrow{g}(u_i, v_j) \approx \frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial u}\Delta_i u.$$

Il en résulte :

$$\mathcal{A} = \sum_{i,j} \|\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial v}\| \Delta_i u \Delta_j v.$$

Ce qui, après des fractionnements de plus en plus fins, aboutit à la définition précise de l'aire avec une intégrale double.

Définition 224. On note

$$dA := \|\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial v}\| \, du \, dv$$

et on l'appelle *l'élément d'aire*.

Remarque 225. Cas particulier. Quand la surface est le graphe d'une fonction d'équation $z = h(x, y)$, on a :

$$dA = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \overrightarrow{h}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overrightarrow{h}}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy.$$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^3$ et $S \subset U$. On a :

$$\begin{array}{cccccc} f \circ g : & D \subset \mathbb{R}^2 & \to & S \subset U \subset \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (u, v) & & \longmapsto & & f(g(u, v)) \end{array}.$$

On peut considérer l'intégrale double

$$I := \iint_D f(g(u, v)) \|\overrightarrow{N}(u, v)\| \, du \, dv$$

et démontrer que I est indépendante du choix de la représentation paramétrique g.

Définition 226. Pour calculer l'intégrale d'une fonction sur une surface, on note

$$I := \iint_S f dA$$

et on l'appelle *intégrale de* f *sur la surface* S.

En particulier, lorsque l'on prend pour f la fonction constante égale à 1 on obtient par définition *l'aire de* S notée

$$\mathcal{A}(S) := \iint_S dA.$$

Proposition 227. Après le choix d'une représentation paramétrique de S on calcule $\mathcal{A}(S)$ comme suit :

$$\mathcal{A}(S) = \iint_D \|\overrightarrow{N}(u, v)\| \, du \, dv.$$

Exemple 228. Calotte sphérique. Sur la sphère de rayon R, la calotte sphérique S est l'ensemble des points de coordonnées sphériques (R, θ, ϕ) tels que : $0 \leq \theta \leq \alpha$. Cette calotte S a la représentation paramétrique donnée par l'équation (9.3) de l'exemple 221. Le vecteur normal est

$$\overrightarrow{N}(\theta, \phi) = \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial \theta}} \wedge \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial \phi}} = (R^2 \sin^2 \theta \cos \phi, R^2 \sin^2 \theta \sin \phi, R \sin \theta \cos \theta), \quad (9.4)$$

et

$$\|\overrightarrow{N}(\theta, \phi)\| = R^2 \sin \theta.$$

L'aire de la calotte vaut donc

$$\mathcal{A}(S) = \iint_{0 \leq \theta \leq \alpha,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi} R^2 \sin \theta \ d\theta \ d\phi = R^2 \int_0^\alpha \sin \theta \ d\theta \int_0^{2\pi} \ d\phi$$

$$= 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha).$$

En particulier, pour $\alpha = \pi$, S est une sphère et son aire est $4\pi R^2$.

Remarque 229. On remarque que si on change des variables, par exemple $\{x, y\}$ en $\{u, v\}$, c'est exactement comme dans la section 7.3. La 2-forme :

$$dx \wedge dy \text{ devient } \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du \wedge dv = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du \wedge dv$$

et on a le même type de formule pour $dy \wedge dz$ et $dz \wedge dx$.
On a le produit vectoriel :

$$\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Et finalement,

$$dA = \frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial v} du \, dv = dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx. \quad (9.5)$$

9.4 Intégrales de surface d'un champ de vecteurs

Définition 230. Soit S une surface comportant deux faces distinctes. Elle est dite *orientable.*

En chaque point régulier, il existe deux vecteurs unitaires normaux opposés. Le choix d'un de ces vecteurs $\overrightarrow{n}^+$ *oriente la surface* S.

Remarque 231. Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs continu sur S. Le flux d'un champ $\overrightarrow{V}$ à travers S est l'intégrale de surface

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}^+ \, dA$$

On peut noter $\overrightarrow{n}^+ \, dA := \overrightarrow{dA}$. De (9.5), on a :

$$\overrightarrow{dA} = \overrightarrow{k} \, dx \wedge dy + \overrightarrow{i} \, dy \wedge dz + \overrightarrow{j} \, dz \wedge dx.$$

Pour un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ défini par $\overrightarrow{V} := P \overrightarrow{i} + Q \overrightarrow{j} + R \overrightarrow{k}$ et une surface S définie par $g(u, v) := (x, y, z)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^3$,

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dA} = \iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy. \tag{9.6}$$

Proposition 232. Formule de la divergence. Elle relie un flux de champ à travers une surface fermée à l'intégrale triple de divergence de ce champ sur le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par cette surface. Soit E un domaine de $\mathbb{R}^3$ et $S := \partial E$ la surface qui est le bord de E. Alors la formule de la divergence (aussi appelée « Ostrogradski »et dans le contexte électromagnétique « Gauss ») est la suivante :

$$\iint_{\partial E} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dA} = \iiint_E \operatorname{div} \overrightarrow{V} \, dx \, dy \, dz. \tag{9.7}$$

Exemple 233. On va vérifier la formule d'Ostrogradski avec E, boule de $\mathbb{R}^3$ de centre $O(0, 0, 0)$ et de rayon R et $\overrightarrow{V} := P \overrightarrow{i} + Q \overrightarrow{j} + R \overrightarrow{k}$, un champ de vecteurs de composantes $P := x$, $Q := y$, $R := 2z$. La frontière de E est la sphère S de centre O et de rayon R. On peut prendre la paramétrisation de la sphère (9.3) avec le vecteur normal $\overrightarrow{N}(\theta, \phi)$ (9.4). Ce vecteur est dirigé vers l'extérieur, donc on note S^+ la sphère orientée ainsi. On pose :

$$I := \iint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{N}(\theta, \phi) \, d\theta d\phi.$$

On a :

$$\overrightarrow{V}(g(\theta, \phi)) := (R \sin\theta \cos\phi, R \sin\theta \sin\phi, 2R \cos\theta).$$

Son produit scalaire avec

$$\overrightarrow{N}(\theta, \phi) := (R^2 \sin^2\theta \cos\phi, R^2 \sin^2\theta \sin\phi, R \sin\theta \cos\theta)$$

est égal à $R^3(\sin\theta + \cos^2\theta \sin\theta)$.
Finalement, l'intégrale recherchée est :

$$I = R^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} (\sin\theta + \cos^2\theta \sin\theta) d\theta = \frac{16\pi R^3}{3}.$$

D'autre part, $\operatorname{div}\overrightarrow{V} := \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 4.$
Et donc on a l'intégrale triple

$$\iiint_E \operatorname{div}\overrightarrow{V}\, dx\, dy\, dz = 4 \iiint_E dx\, dy\, dz$$

$$= 4 \text{ Volume}(E) = 4 \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{16\pi R^3}{3}.$$

Proposition 234. Formule du rotationnel. Elle relie l'intégrale curviligne d'un champ de vecteurs sur un circuit fermé avec le flux de rotationel du même champ à travers une surface dont le circuit est le bord. La formule du rotationnel (aussi appelée « formule de Stokes ») est la suivante :

$$\oint_{\partial S = C^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{ds} = \iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dA}. \tag{9.8}$$

Remarque 235. Autrement dit, la circulation du champ $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe fermée C^+ est égale au flux de rotationnel de $\overrightarrow{V}$ à travers une surface limitée par C^+ (avec l'orientation compatible). Cette formule est une reformulation de la formule de Green-Riemann pour une courbe fermée dans $\mathbb{R}^3$.

9.5 Formule de Stokes généralisée : $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$

Remarque 236. L'intégration est une opération qui à un domaine de dimension k et à une k-forme différentielle associe un nombre. Des exemples sont :

• L'intégrale simple
$$\int_I f(x)\,dx$$
qui associe un nombre à une 1-forme différentielle $f(x)\,dx$ sur un segment $I := [a, b]$ de dimension 1.

• L'intégrale double
$$\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$
qui associe un nombre à une 2-forme différentielle $g(x,y)\,dx\,dy$ sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$.

• L'intégrale triple
$$\iiint_E h(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
qui associe un nombre à une 3-forme différentielle $h(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ sur un domaine $E \subset \mathbb{R}^3$.

• L'intégrale curviligne
$$\int_\Gamma p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$$
qui associe un nombre à une 1-forme différentielle $p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$ sur une courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, ou bien
$$\int_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$
qui associe un nombre à une 1-forme différentielle
$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ sur une courbe $C \subset \mathbb{R}^3$. Une courbe étant un objet de dimension 1, c'est possible.

• L'intégrale de surface
$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(z,y,z)\,dx\,dy$$
qui associe un nombre à une 2-forme différentielle
$P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(z,y,z)\,dx\,dy$ dans $\mathbb{R}^3$ sur une surface $S \in \mathbb{R}^3$, objet de dimension 2.

Proposition 237. Formule de Stokes généralisée. Soit D un domaine fermé et borné de dimension q dans $\mathbb{R}^p$, on note ∂D son bord (qui est de dimension $q-1$.) Soit ω une $(q-1)$-forme dans $\mathbb{R}^p$ (`Définition 132`). Alors la *formule de Stokes généralisée* est satisfaite :

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega. \tag{9.9}$$

Proposition 238. Les cas particuliers de cette formule sont :

- $q = 1,\ p = 1$: théorème fondamental de l'analyse :

$$\int_a^b df = f(b) - f(a).$$

- $q = 2,\ p = 2$: théorème de Green-Riemann.
- $q = 2,\ p = 3$: théorème de Stokes (du rotationnel).
- $q = 3,\ p = 3$: théorème d'Ostrogradski (de la divergence).

9.6 Remarques sur la formule de Stokes

La formule (9.9) donne une formulation élégante de plusieurs théorèmes.

Elle présente une connection entre l'opération géométrique ∂ qui à un domaine D associe son bord ∂D et l'opération algébrique d qui à une forme différentielle ω associe une forme différentielle $d\omega$. Selon la formule (9.9) ces deux opérations sont en dualité [1] !

Il faut remarquer que ∂, l'opération de prendre le bord d'un sous-ensemble, est différente de la notion topologique de prendre la frontière du même sous-ensemble.

La notion de bord est independente de la dimesion de l'espace global. La notion des points intérieurs (Annexe A *Définition* **??**) et par conséquent des points frontière change avec la dimension. Par exemple, si on regarde un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ son intérieur est un segment ouvert $]a, b[$ et sa frontière est deux points $\{a, b\}$. Le même segment dans $\mathbb{R}^2$ n'a pas de points d'intérieur ! Tous les points de $[a, b]$ sont des points frontière.

Ici, soit D un domaine de dimension k de $\mathbb{R}^p$. Si D est donné par sa forme paramétrique avec m équations paramétriques avec n variables, sa dimension est

$$k = p + n - m.$$

Par exemple, pour une courbe de $\mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := (x(t), y(t), z(t))$, il y a $m = 3$ équations

$$x := x(t),\ y := y(t),\ z := z(t)$$

1. Cf. l'annexe B.

sur $p = 3$ variables de $\mathbb{R}^3$, (x, y, z) qui dépendent d'une variable t. En tout, on a $p + n = 4$ variables, dont une, t, que l'on appelle *variable libre.* Donc, dans $\mathbb{R}^3$, la dimension d'une courbe est $p + n - m = 1$.

Un autre exemple : une surface paramétrée dans $\mathbb{R}^3$ est donnée par 3 équations sur 5 variables (u, v, x, y, z), dont u, v sont des variables libres et x, y, z s'expriment à partir de u, v. Cela donne que la dimension d'une surface dans $\mathbb{R}^3$ est égale à $2 = 5 - 3$.

Souvent un domaine de dimension $p - 1$ dans $\mathbb{R}^p$ est appelé une *hypersurface.* Pour définir une hypersurface dans $\mathbb{R}^p$ il faut une équation reliant p variables. Ou bien on peut introduire $p-1$ variables libres et avec p équations définir une hypersurface. Une surface de $\mathbb{R}^3$ en est un exemple.

On peut résumer comme suit : la dimension d'un domaine est le nombre minimal de variables indépendantes qui le définissent.

Ce qui suit ces considérations de dimension, c'est qu'un voisinage Ω d'un point X de D de dimension k dans $\mathbb{R}^p$ peut être de deux types :

$$(1)\ \Omega \simeq U \subset \mathbb{R}^k \text{ ou } (2)\ \Omega \simeq V \subset \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}.$$

Les points de D avec le voisinge de type (1) sont des points intérieurs. Les points de D avec le voisinge de type (2) sont des points du bord[2].

On remarque que $\partial(\partial D) = \emptyset$ pour tout domaine D. Cette propriété est en correspondance avec la relation $d(d\omega) = 0$ pour toute forme différentielle ω (`Lemme 144`). Le théorème de Stokes généralisé dit que l'on peut « échanger » une opération avec l'autre.

C'est un résultat très profond qui relie l'analyse des objets géométriques par des méthodes algébriques. C'est une pierre angulaire de l'analyse moderne[3].

---

2. L'opération de prendre le bord peut aussi être définie à l'aide des simplexes et des chaînes (cf. Chapitre 9 de [17]), ce qui dépasse le programme de ce cours.
3. Cf. aussi l'annexe 3.