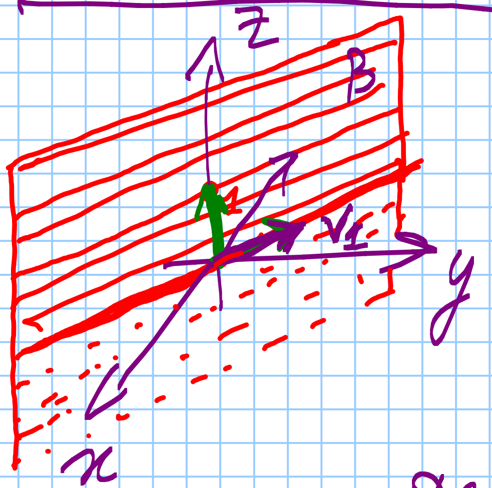
Math 5. Cours 3 30.09.2020

Exercice 6.

Trouver une base du plan donné par l'équation $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x + y = 0\}$. Faire le lien avec le fait que la dimension de B est 2 en explicitant tout vecteur de cet sous-espace comme combinaison linéaire de vecteurs de la base.

Pas de TD ou Cours de Math 5 à la fac aujourd'hui.



$x + y = 0$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in B$

On choisit :

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Deux vecteurs de base

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in B$ alors $x + y = 0$

alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

et $z = b \cdot 1$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 8.

Soit l'application linéaire $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez le vecteur v qui est image de u.
2. Déterminez le vecteur w qui a pour image u.

1)

$$Mu = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 4 + (-2)\cdot 1 \\ 2\times 4 + 1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

2)

$$Mw = u \underset{\text{inversible}}{\overset{M \text{ est}}{\Longleftrightarrow}} \underbrace{M^{-1}\cdot M}_{Id} w = M^{-1}u$$

$$w = M^{-1}u$$

M est inversible $\Longleftrightarrow$ $\det M = 1\cdot 1 - 2(-2) = 5 \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc}$$

$$\det A = ad - bc$$

$$w = M^{-1}u = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1\times 4 + 2\times 1 \\ (-2)\cdot 4 + 1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

$$E \xrightarrow{M} F$$

$$\operatorname{Im} M = \{u \in F \mid \exists w \in E, \; Mw = u\} \subset F$$

$$\operatorname{Ker} M = \{v \in E \mid Mv = 0\} \subset E$$

Exercice 9.

Déterminez les matrices des applications linéaires suivantes :

1. $h_1(x, y) = (2x - y, x)$,
2. $h_2(x, y) = (x - y, 0)$
3. $h_3(x, y) = (x, y, x - y)$
4. $h_4(x, y) = (x - y, y - x)$
5. $h_5(x, y) = (0, y, x + 2y)$
6. $h_6(x, y, z) = (x + 2y, z - 2y)$
7. $h_7(x, y, z) = (z, y, x)$

$$h_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x \end{pmatrix}$$

$$h_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x - y \end{pmatrix} \qquad h_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$h_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 0 \\ 0 + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$h_6\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ z - 2y \end{pmatrix}$$

$$h_6\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\underline{\underline{2\cdot 0}}\\0-2\cdot 0\end{pmatrix},\quad h_6\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+2\cdot 1\\0-2\cdot 1\end{pmatrix},\quad h_6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+2\cdot 0\\1-2\cdot 0\end{pmatrix}$$

$$M_6=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & -2 & 1\end{pmatrix}\qquad h_6:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\cdot x+2\cdot y+0\cdot z\\0\cdot x-2\cdot y+1\cdot z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\-2y+z\end{pmatrix}$$

Exercice 10.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ avec la base canonique $\{e_1, e_2\}$. On peut presenter les vecteurs de base e_1, e_2 comme vecteurs ayant les coordonnées $(1,0)$ et $(0,1)$.

Fait cours 2

1. Soit l'application linéaire $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $h(2,1) = (2,-3)$ et $h(1,-1) = (3,-1)$. Déterminez la matrice de h.
2. Soit l'application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $g(2,1) = (1,0)$ et $g(1,-1) = (0,1)$. Déterminez la matrice de g.
3. Soit l'application linéaire $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $r(1,2) = (2,-3)$ et $r(-1,1) = (3,-1)$. Déterminez la matrice de r.

$$g\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad g\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$(1) \quad \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$$\text{dét}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}=-3$$

$$A\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}}_{\text{dét}\neq 0}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad \Big| \times\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}=(-1)\cdot\begin{pmatrix}-1/3&-1/3\\-1/3&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2\cdot(-1)-1\cdot 1}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&1/3\\1/3&-2/3\end{pmatrix}$$

Et si on echange l'ordre des vecteurs ?

- d'abord $g\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et après $g\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

On va chercher B t.q.

$$B\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

et comparer avec A.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1)2$$
$$= 3$$

$$\boxed{B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

$$A = B$$