Math 5. Fiche 2 Exo 11-16.

Exercice 11.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \ln(x^2-3x+2)$, 2) $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(1-\ln x)}$, 3) $x \mapsto e^{\frac{1}{\ln x}}$,

4) $x \mapsto (\frac{1-x}{1+x})^{\pi}$, 5) $x \mapsto \cos(x^{\sqrt{3}})$, 6) $x \mapsto (\cos x)^{\tan x}$.

1) $\left(\ln(x^2-3x+2)\right)' = (2x-3)\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ attn : domaine de définition $x^2-3x+2>0$

$x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

2) $\left(\dfrac{1}{\ln(1-\ln x)}\right)$ domaine de définition : $\begin{cases} 1-\ln x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > \ln x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{\ln(1-\ln x)}$ pas défini

3) $\left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)' = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{-1}{(\ln x)^2} \cdot e^{1/\ln x}$ Domaine : $\begin{cases} x>0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$

$x \in]0,1[\cup]1, +\infty[$

4) $\left(\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\pi}\right)' = \dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\pi-1} = \dfrac{-2\pi}{(1+x)^{\pi+1}}(1-x)^{\pi-1}$

$x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

5) $\left(\cos x^{\sqrt{3}}\right)' = \sqrt{3}\, x^{\sqrt{3}-1} \left(-\sin x^{\sqrt{3}}\right)$

6) $\left((\cos x)^{\tan x}\right)' = \left(e^{\ln(\cos x) \cdot \tan x}\right)'$

$= \left((\ln(\cos x))' \tan x + \ln(\cos x)(\tan x)'\right) \cos x^{\tan x}$

Rq. : c'est bien défini pour $\cos x > 0$

Exercice 12.

Soit $f : (x,y) \mapsto e^{\cos(x^2 y)}$

1. Calculer les derivés partielles de f : $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $f'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ au point (x_0, y_0).
2. Écrire le gradient de f au point (x_0, y_0).
3. Calculer $\dfrac{\partial (f'_x)}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial (f'_y)}{\partial x}$ au point (x_0, y_0). Les comparer.
4. Écrire la formule de Taylor au point $(x_0, y_0) = (1, \pi/2)$ à l'ordre 2.

1. $f'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\cos(x^2y)}\right) = 2xy\,(-\sin(x^2y))\cdot e^{\cos(x^2y)}$ at pt. (x_0,y_0) mettre $x \Rightarrow x_0$, $y = y_0$

$f'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\cos(x^2y)}\right) = x^2(-\sin(x^2y))\cdot e^{\cos(x^2y)}$

2. $\overrightarrow{grad}\left(e^{\cos(x^2y)}\right)\Big|_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}(x_0,y_0)$

3. $f''_{xy} = \frac{\partial f'_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2xy\,(\sin(x^2y))\, e^{\cos(x^2y)}\right)$

$= (-2x)\,\sin(x^2y)\, e^{\cos(x^2y)}$

$+ (-2xy)\cdot x^2\cdot\cos(x^2y)\cdot e^{\cos(x^2y)}$

$+ (-2xy)\cdot\sin(x^2y)\cdot x^2(-\sin(x^2y))e^{\cos(x^2y)}$

$f''_{yx} = \frac{\partial f'_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2(-\sin(x^2y))\cdot e^{\cos x^2y}\right)$

$= 2x\,(-\sin(x^2y))\, e^{\cos x^2y}$

$+ x^2(-2xy\cos(x^2y))\cdot e^{\cos x^2y}$

$+ (x^2\cdot(-\sin(x^2y))\cdot 2xy\cdot(-\sin(x^2y))\cdot e^{\cos x^2y}$

$(x_0,y_0) = (1,\pi/2)$ $\quad f(1,\pi/2) = e^{\cos(1^2\cdot\pi/2)} = e^0 = 1$

$f'_x(1,\pi/2) = 2\cdot 1\cdot \pi/2 \cdot (-\sin 1^2\cdot\pi/2)\cdot e^{\cos 1^2\cdot\pi/2} = -\pi$

$f'_y(1,\pi/2) = 1^2\cdot(-\sin(1^2\cdot\pi/2))\cdot e^{\cos 1^2\cdot\pi/2} = -1$

$f''_{xy}(1,\pi/2) = f''_{yx}(1,\pi/2) = 2\cdot 1\,(-\sin(1^2\cdot\pi/2))\, e^{\cos 1^2\cdot\pi/2}$

$+ 1^2(-2\cdot 1\cdot\pi/2\ \underbrace{\cos(1^2\cdot\pi/2)}_{0})\, e^{\cos 1^2\cdot\pi/2}$

$+ 1^2\cdot(-\sin(1^2\cdot\pi/2))\cdot 2\cdot 1\cdot\pi/2\,(-\sin(1^2\cdot\pi/2))\cdot e^{\cos 1^2\cdot\pi/2}$

$= -2 + \pi$

$f''_{xx} = \left(2xy\,(-\sin(x^2y))\cdot e^{\cos(x^2y)}\right)' = 2y\,(-\sin x^2y)\cdot e^{\cos(x^2y)}$

$$+2xy\,(-2xy\cdot\cos(x^2y))\,e^{\cos x^2y} + 2xy(-\sin(x^2y))\cdot 2xy(-\sin x^2y)\cdot e^{\cos(x^2y)}$$

$$f''_{xx}(1,\pi/2) = 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(-1)\,e^0 + 0 + 2\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot 1$$
$$= -\pi + \pi^2$$

$$f''_{yx}(x,y) = \left(x^2(-\sin(x^2y))\cdot e^{\cos(x^2y)}\right)' = -x^2\cdot x^2\cos x^2y\cdot e^{\cos(x^2y)}$$
$$- x^2\sin x^2y\cdot x^2(-\sin x^2y)\,e^{\cos x^2y}$$

$$f''_{yy}(1,\pi/2) = -1^2\cdot 0\cdot e^0 + 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(1+h,\pi/2+k) &= 1 + (-\pi)\cdot h + (-1)k + \frac{1}{2}(\pi^2-\pi)h^2 \\ &+ (-2+\pi)hk + \frac{1}{2}k^2 + o(h^2+k^2)\end{aligned}}$$

Exercice 13.

Déterminer le développement de Taylor à l'ordre 3 en $t=1$ de la fonction $F(t) = \left(\frac{1}{t^2}+2t, \frac{2}{t}+t^2\right)$. En déduire la position de la courbe du plan C paramétrée par F par rapport à sa tangente en $t=1$ (Est-elle plus haut que sa tangente ? Plus à gauche ?).

$$t=1,\quad F(1) = \left(\frac{1}{1^2}+2\cdot 1, \frac{2}{1}+1^2\right) = (3,3)$$

$$F'(t) = \left(\left(\frac{1}{t^2}+2t\right)', \left(\frac{2}{t}+t^2\right)'\right) = \left((t^{-2}+2t)', (2t^{-1}+t^2)'\right)$$
$$= \left(-2t^{-3}+2, -2t^{-2}+2t\right)$$

$$F'(1) = (-2\cdot 1+2, -2\cdot 1+2) = (0,0)$$

$$F''(t) = (+6t^{-4}+2, +4t^{-3}+2),\quad F''(1) = (8,6)$$

$$F'''(t) = (-24t^{-5}, -12t^{-4}),\quad F'''(1) = (-24,-12)$$

$$F(1+h) = \left(3+\frac{8h^2}{2}+\left(-\frac{24}{3!}\right)h^3 + o(h^3), 3+\frac{6}{2}h^2 - \frac{12}{3!}h^3 + o(h^3)\right)$$
$$= \left(3+4h^2-4h^3+o(h^3), 3+3h^2-2h^3+o(h^3)\right)$$

Exercice 14.

Écrire la formule de Taylor au second ordre pour chacune des fonctions suivantes au point (x_0, y_0) donné.

1. $f(x,y) = \sin(x+2y)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
3. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\cos xy$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
4. $f(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
5. $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos y$, $(x_0,y_0) = (1,0)$.

1. $f(0,0) = \sin(0+2\cdot 0) = 0$

$f'_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\sin(x+2y) = -\cos(x+2y)$, $\quad f'_x(0,0) = -\cos 0 = -1$

$f'_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\sin(x+2y) = -2\cos(x+2y)$, $\quad f'_y(0,0) = -2\cos 0 = -2$

$f''_{xx}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(-\cos(x+2y)) = -\sin(x+2y)$, $\quad f''_{xx}(0,0) = 0$

$f''_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(-\cos(x+2y)) = -2\sin(x+2y)$, $\quad f''_{xy}(0,0) = 0$

$f''_{yy}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(-2\cos(x+2y)) = -4\sin(x+2y)$, $\quad f''_{yy}(0,0) = 0$

$$f(0+h,0+k) = 0 + (-1)h + (-2)k + 0\cdot\frac{h^2}{2} + 0\cdot hk + 0\cdot\frac{k^2}{2} + o(h^2+k^2)$$

$$= -h - 2k + o(h^2+k^2)$$

. . . . .

Exercice 15.

Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^2$, et $a \in \mathbb{R}^2$. On dit qu'une fonction f présente en a

— un maximum local s'il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall u \in A,\ \|u - a\| \leq r \implies f(u) \leq f(a)$.

— un minimum local s'il existe un réel $r > 0$ tel que : $\forall u \in A,\ \|u - a\| \leq r \implies f(u) \geq f(a)$.

— un extrémum local si elle présente en a un maximum local ou un minimum local.

— Montrer que si f présentey un extremum en a, alors les dérivées partielles de f en a sont nulles. Un tel point (où les dérivées partielles s'annulent) est appelé point critique de f.

On suppose dans la suite que f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et soit $a \in U$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$. Montrer que f admet $(1, 2)$ pour seul point critique. En effectuant le changement d'origine $x = 1 + X$ et $y = 2 + Y$ et en calculant $f(1 + X, 2 + Y)$, prouver que f admet un minimum local en $(1, 2)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$.
   (a) Montrer que f possède 4 points critiques.
   (b) En calculant $f(t, 0)$ et $f(0, t)$, prouver que f n'admet pas d'extrémum en $(0, 0)$, bien que ce point soit un point critique.
   (c) Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(4, 0)$. En déduire que f admet un minimum local en $(4, 0)$.
   (d) En s'aidant des questions précédentes, faire l'étude locale aux autres points critiques.

1)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2-2x-4y) = 2x-2=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2-2x-4y) = 2y-4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Point critique : $(1,2)$

$$(1+X)^2+(2+Y)^2-2(1+X)-4(1+Y)$$
$$= 1+2X+X^2+4+4Y+Y^2-2-2X-4-4X$$
$$= -1+\underbrace{X^2+Y^2}_{\geq 0} \geq -1 \quad \text{- min local !}$$

2) $f(x,y) = x^3+y^3-6(x^2-y^2)$

a)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-12x=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2+12y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-4)=0 \\ y(y+4)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \text{ ou } x=4 \\ y=0 \text{ ou } y=-4 \end{cases}$$

$(0,0)$, $(0,-4)$, $(4,0)$, $(4,-4)$ points critiques

$f(0,0)=0$ Soit $t<1$ par exemple $t=1/2$

b) $f(t,0)=t^3-6t^2$ $f(\frac{1}{2},0)=\frac{1}{8}-6\cdot\frac{1}{4}<0$

$f(0,t)=t^3+6t^2$ $f(0,\frac{1}{2})=\frac{1}{8}+6\frac{1}{4}>0$

Alors pour deux pts autours $(0,0)$ on a des valeurs négative et positive $<f(0,0)$ et $>f(0,0)$

Pas de min en $(0,0)$ ni de max en $(0,0)$

$f(4,0)=4^3-6\cdot4^2=64-96=-32$

c) $f'_x(4,0)=0$

$f'_y(4,0)=0$

$f''_{xx}(x,y)=6x-12$; $f''_{xx}(4,0)=6\cdot4-12=12$

$f''_{xy}(x,y)=0$ $f''_{xy}(4,0)=0$

$f''_{yy}(x,y)=6y+12$, $f''_{yy}(4,0)=12$

$$f(4+h,0+k)=f(4,0)+\underbrace{\cancel{f'_x(4,0)h}}_{0}+\underbrace{\cancel{f'_y(4,0)k}}_{0}$$

$$+\frac{1}{2}f''_{xx}(4,0)h^2+f''_{xy}(4,0)hk+\frac{1}{2}f''_{yy}(4,0)k^2+o(h^2+k^2)$$

$$=4^3-6\cdot4^2+0\cdot h+0\cdot k+\frac{1}{2}\cdot12h^2$$

$$+0\cdot hk+\frac{1}{2}\cdot12\cdot k^2+o(h^2+k^2)$$

$$=-32+6h^2+6k^2+o(h^2+k^2)\geq-32$$

$6h^2+6k^2>>o(h^2+k^2)$ et $6h^2+6k^2\geq0$

pour $h^2+k^2\neq0$

$\underline{d)}$ $(0,-4)$ $f(0,-4)=(-4)^3+6\cdot(-4)^2$
$= 32$

$f(0+h,-4+k) = 32 + \frac{1}{2}$

$f''_{xx}(0,-4) = 6\cdot 0 - 12 = -12$

$f''_{xy}(0,-4) = 0$

$f''_{yy}(0,-4) = 6\cdot(-4)+12 = -12$

$$f(0+h,-4+k) = f(0,-4) + \frac{1}{2} f''_{xx}(0,-4)h^2 + f''_{xy}(0,-4)hk + \frac{1}{2} f_{yy}(0,-4)k^2 + o(h^2+k^2)$$

$$= 32 \underbrace{- 6h^2 - 6k^2}_{<0} + o(h^2+k^2)$$

$$32 - 6(h^2+k^2) + o(h^2+k^2) \leq 32$$

Alors $(0,-4)$ – point de max.

$(4,-4)$ $f(4,-4) = 4^3+(-4)^3-6(4^2-(-4)^2) = 0$

$f''_{xx}(4,-4) = 6\cdot 4 - 12 = 12$

$f''_{yy}(4,-4) = 6\cdot(-4)+12 = -12$

$$f(4+h,-4+k) = f(4,-4) + \frac{1}{2} f''_{xx}(4,-4)h^2 + \frac{1}{2} f''_{yy}(4,-4)k^2 + o(h^2+k^2) = 0 + \frac{1}{2}\cdot 12h^2 + \frac{1}{2}\cdot(-12)k^2 + o(h^2+k^2)$$

$f(4+h,-4+k) = 6h^2 - 6k^2 + o(h^2+k^2)$ pas de max
pas de min.

Exercice 16.

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{4}$;
2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.

Indication. Il s'agit d'une application assez immédiate des résultats du cours. On cherche les points critiques, puis on étudie la nature de ces points critiques.

1. $f(x,y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{4}$

pts critiques :

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} : \begin{cases} -2x + \frac{4x^3}{4} = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(x^2-2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Pts critiques :

	$(0,0)$	$(-\sqrt{2},0)$	$(\sqrt{2},0)$
$R = f''_{xx} = -2+3x^2$	-2	4	4
$S = f''_{xy} = 0$	0	0	0
$T = f''_{yy} = 2$	2	2	2
$RT - S^2$	-4	8	8
si $RT - S^2 > 0$ signe de R	—	>0	>0
Nature de pt critique	selle	min	min

Exercice 17. Rappel sur les matrices 2×2

On considère les matrices

a. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, d. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, e. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, f. $\begin{pmatrix} R & S \\ S & T \end{pmatrix}$

1. Trouver les valeurs propres de ses matrices.
2. Quelles matrices peuvent être des matrices Hessiennes des fonctions ?
3. Étudier les extrema des formes quadratiques correspondantes.

1. Valeurs propres: A

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \operatorname{dét} A \end{cases}$$

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 4 = 5 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) = 6 \end{cases}$ $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\operatorname{dét}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$ – Eqn. caractéristique

$$(1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

f) $\operatorname{dét}\left(\begin{pmatrix} R & S \\ S & T \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} R-\lambda & S \\ S & T-\lambda \end{vmatrix} = (R-\lambda)(T-\lambda) - S^2$

$$= RT - S^2 - \lambda(R+T) + \lambda^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(R+T) \pm \sqrt{(R+T)^2 - 4(RT - S^2)}}{2} = \frac{(R+T) \pm \sqrt{(R-T)^2 + 4S^2}}{2}$$

2) Matrice Hessienne par définition

$\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}$ alors b, d, e, f – peuvent être Hess

3) Formes quadratiques correspondantes :

f) $\begin{pmatrix} R & S \\ S & T \end{pmatrix} \rightsquigarrow Rh^2 + 2Shk + Tk^2 = R\left(h^2 + 2\frac{S}{R}hk + \frac{T}{R}k^2\right)$

$= R\left(h^2 + 2h\left(\frac{S}{R}k\right) + \left(\frac{S}{R}k\right)^2 - \left(\frac{S}{R}k\right)^2 + \frac{T}{R}k^2\right)$

$= R\left(\left(h + \frac{S}{R}k\right)^2 + \frac{RT - S^2}{R^2}k^2\right)$ $\quad \left(h + \frac{S}{R}k\right)^2 > 0$ et

si $RT - S^2 < 0$ alors $(0,0)$ est un pt selle

si $RT - S^2 \geq 0$ et $R > 0 \Rightarrow (0,0)$ est un min
$\qquad\qquad\qquad\quad R < 0 \Rightarrow (0,0)$ est un max

Rq. Si $RT - S^2 \geq 0$ alors R, T même signe
$R > 0$ ou $R < 0 \iff R + T > 0$ ou $R + T < 0$

$\boxed{\text{Rq}}$ $\boxed{R + T = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} R & S \\ S & T \end{pmatrix}, \quad RT - S^2 = \det\begin{pmatrix} R & S \\ S & T \end{pmatrix}}$

a) $h^2 + hk - 2kh + 4k^2 = h^2 - hk + 4k^2$

$= h^2 - 2 \cdot h \cdot \frac{1}{2}k + \left(\frac{1}{2}k\right)^2 - \left(\frac{1}{2}k\right)^2 + 4k^2 = \left(h - \frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{15}{4}k^2 \geq 0$

Donc $(0,0)$ – min

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad h^2 + hk + kh = h^2 + 2h\ + k^2 - k^2$

$= (h + k)^2 - k^2 \Rightarrow (0,0)$ – pt. selle $\quad$ (En effet $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} < 0$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad h^2 - hk + hk + 3k^2 = h^2 + 3k^2 \geq 0$

$\Rightarrow (0,0)$ – pt. min

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad h^2 + hk + hk + k^2 = (h + k)^2 \geq 0$
$(0,0)$ – pt. min

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$