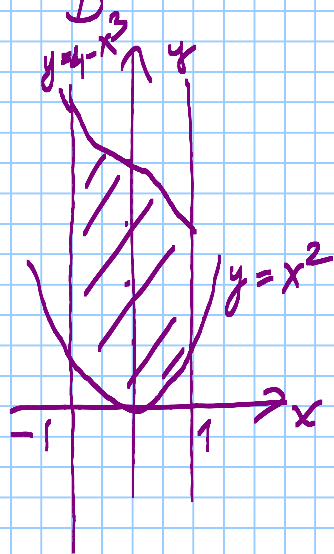
Exercice 26 L'aire d'un domaine D du plan est donnée par l'intégrale $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Calculer l'aire du domaine D suivant : $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ -1\le x\le 1 \text{ et } x^2\le y\le 4-x^3\}$.

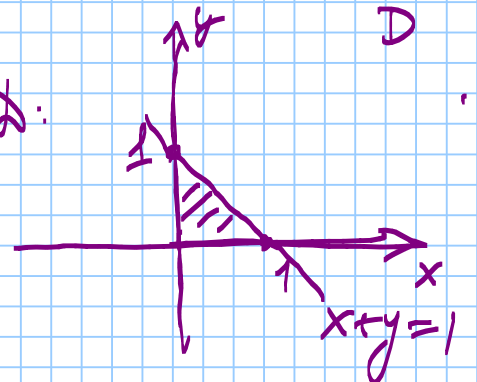
$$\iint_D dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{4-x^3} dy\right)dx = \int_{-1}^{1}(4-x^3-x^2)\,dx$$

$$= \left[4x - \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{0 \text{ car paire}} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 4\cdot 2 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{22}{3}}$$



Exercice 27 Soit D le domaine : $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$. Calculer $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dans les cas suivants : a) $f(x,y)=x^2+y^2$ b) $f(x,y)=xy(x+y)$.

D :



$x+y\le 1$

$y=1-x$

$$\iint_D x^2+y^2\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy\right)dx = \int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}dx$$

$$= \int_0^1 x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}\,dx = \int_0^1 x^2-x^3+\frac{1}{3}-x+x^2-\frac{x^3}{3}\,dx$$

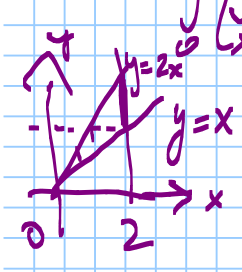
$$= \int_0^1 -\frac{4}{3}x^3+2x^2-x+\frac{1}{3}\,dx = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

b) - devoir maison

Exercice 28. Changer l'ordre d'intégration dans les intégrales suivantes :

a) $\int_0^2\int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ b) $\int_{-6}^2\int_{(x^2/4)-1}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ c) $\int_0^1\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

a) $\int_0^2\left[\int_x^{2x} f\,dy\right]dx \rightsquigarrow \begin{cases}0\le x\le 2\\ x\le y\le 2x\end{cases} \iff \begin{cases}y\ge x\ge 0\\ \frac{y}{2}\le x\le 2\end{cases}$ $\quad\begin{cases}0\le y\le 2\\ \frac{y}{2}\le x\le y\end{cases}$ et $\begin{cases}2\le y\le 4\\ \frac{y}{2}\le x\le 2\end{cases}$



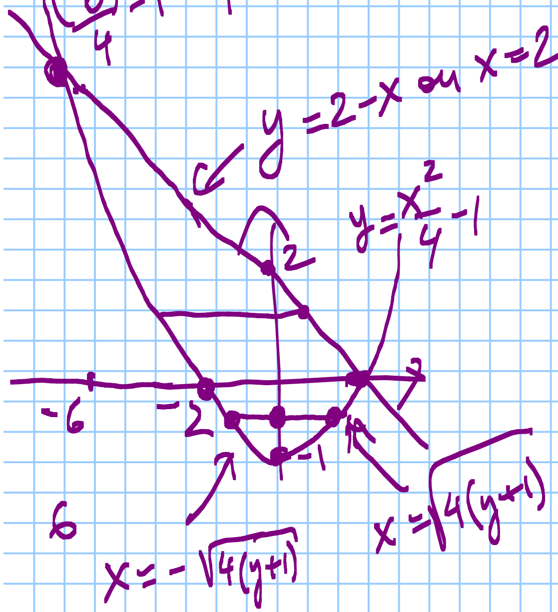
$$\int_0^2\left[\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx\right]dy + \int_2^4$$

b) $$\int_{-6}^{2}\left[\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy\right]dx = \int_{-1}^{0}\left(\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx\right)dy + \int_0^2\left[\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f\,dx\right]dy$$

Car on a (2)

$$\frac{x^2}{4}-1=y \Rightarrow \begin{cases}-1\le y\le 0\\ -2\sqrt{y+1}\le x\le 2\sqrt{y+1}\end{cases}$$

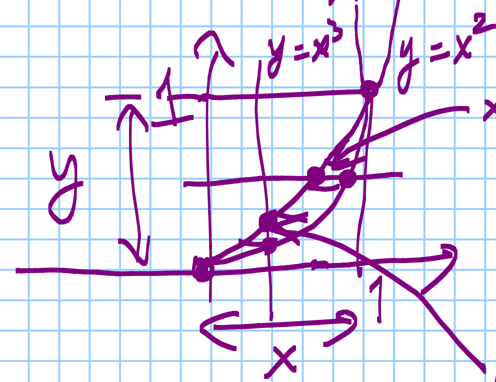
$$\frac{(-6)^2}{4}-1=\frac{36}{4}-1=8$$



et

$$\begin{cases}0\le y\le 2\\ -2\sqrt{y+1}\le x\le 2-y\end{cases}$$

c) $$\int_0^1\left[\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy\right]dx=\int_0^1\left[\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f\,dx\right]dy$$



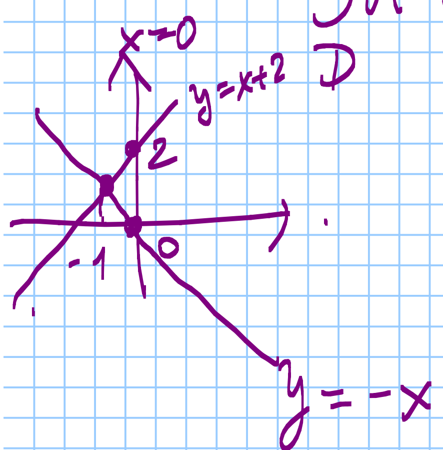
x varie de la courbe $y=x^2$ à la courbe $y=x^3$

y varie de la courbe $y=x^3$ à la courbe $y=x^2$

Exercice 29 **a)** Calculer $\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où D est une partie du plan délimitée par les droites d'équation : $x=0,\quad y=x+2,\quad y=-x$.

b) Calculer la même intégrale au moyen du changement de variables défini par : $u=x+y$, $v=x-y$.

a) $$\iint_D (x-y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{0}\left[\int_{-x}^{x+2}(x-y)\,dy\right]dx=\int_{-1}^{0}\left[xy-\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{x+2}dx$$



$$=\int_{-1}^{0}\left(x(x+2)-\frac{(x+2)^2}{2}-\left[-x^2-\frac{x^2}{2}\right]\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\left[x^2+2x-\frac{x^2+4x+4}{2}+x^2+\frac{x^2}{2}\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(2x^2-2)\,dx=\left[\frac{2x^3}{3}-2x\right]_{-1}^{0}=\cancel{-\frac{2}{3}+2=\boxed{\frac{4}{3}}}$$

$$=0-\left(\frac{2\cdot(-1)^3}{3}-2\cdot(-1)\right)=-\frac{4}{3}$$

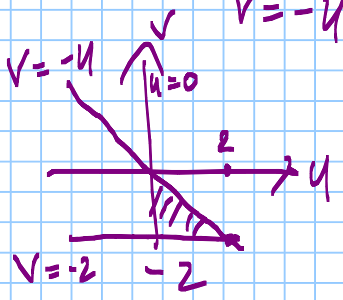
b) $u = x+y$, $v = x-y$ $\Rightarrow$ $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$ 3

borné par

$\frac{u+v}{2} = 0$ $\frac{u-v}{2} = \frac{u+v}{2} + 2$, $\frac{u-v}{2} = -\frac{u+v}{2}$

Donne que u, v ~~sont~~ bornés par , $J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$

$v = -u$, $v = -2$ et $u = 0$



$$\int_{-2}^{0}\left(\int_{0}^{-v}\frac{1}{2}v\,du\right)dv = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left[vu\right]_{0}^{-v}dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(-v^2\right)dv = \frac{1}{2}\left[-\frac{v^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \cancel{\boxed{\frac{4}{3}}}$$

$$\frac{1}{2}\left(0 - \left(-\frac{(-2)^3}{3}\right)\right) = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

Exercice 30 Passer en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dans l'intégrale double $\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pour **a)** le disque $x^2+y^2 \leq a^2$, **b)** le disque $x^2+y^2 \leq ax (a>0)$, **c)** l'anneau $a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2$, **d)** le triangle $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-x$.

a) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ pour le disque : $x^2+y^2 \leq a^2$

$r \geq 0$ et

$r^2 \leq a^2$ et θ parcours de 0 à 2π

$dxdy = r\,dr\,d\theta$ car on a le Jacobien :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \boxed{r}$$

Donc on a $\boxed{a)\ \int_{0}^{\pi}\left(\int_{0}^{a} f(r,\theta)\,d\theta\right) r\,dr\Big)\,d\theta}$

b) le cercle $x^2+y^2 \le ax \iff r^2 \le ar\cos\theta$

r - le rayon par définition est positif

on remarque que $ax \ge x^2+y^2 \Rightarrow x \ge 0$

Donc $\cos\theta \ge 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

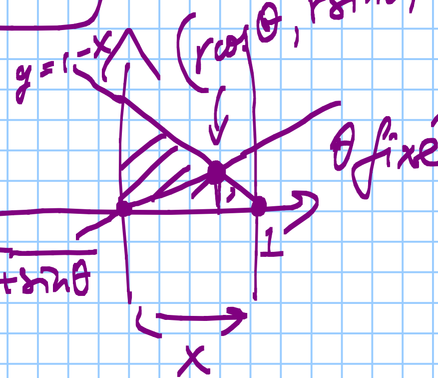
Puis $r^2 \le ar\cos\theta \Rightarrow r \le a\cos\theta$ et finalement

on a $\boxed{b)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\left[\int_0^{a\cos\theta} f(r,\theta)\, r\, dr\right] d\theta}$

c) $a^2 \le x^2+y^2 \le b^2 \iff \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ |a| \le r \le |b| \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{c)\ \int_0^{2\pi}\left[\int_{|a|}^{|b|} f(r,\theta)\, r\, dr\right] d\theta}$

d) Triangle : $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases}$



$\iff \begin{cases} 0 \le r\cos\theta \le 1 \\ 0 \le r\sin\theta \le 1 - r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow 0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$

du dessin on voit que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

et pour $\forall\theta$ on a r qui varie de 0 à l'intersection avec la droite $y=1-x$. Le pt. d'intersection est $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et on a $r\sin\theta = 1 - r\cos\theta$

sur cette droite : $r = \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$

$$\int_0^1\left[\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\right]dx = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r,\theta)\,\underline{\underline{r}}\,dr\right)d\theta$$

on n'oublie pas !

Exercice 31. Calculer les intégrales suivantes en passant en coordonnées polaires.

$I = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $J = \iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2-2x\le 0\}$.

$z = 1+r^2$
$dz = 2r\,dr$

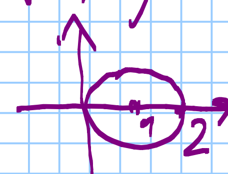
$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{1+r^2}\, r\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dz}{z} = \boxed{\pi\cdot\ln 2}$$

$x^2+y^2\le 1 \iff \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ avec $0\le r\le 1$ car $r^2 = x^2+y^2$ et $0\le\theta\le 2\pi$

Pour calculer J on remarque que D est délimité par :

$x^2+y^2-2x = 0 \iff x^2-2x+1+y^2 = 1$

$\iff (x-1)^2+y^2 = 1$ - cercle au centre $(1,0)$ et de rayon 1.



<u>Une méthode de calcul</u> :

$\begin{cases} x-1 = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ où $\begin{cases} \theta\in[0,2\pi] \\ r\in[0,1] \end{cases}$

Donc on a $\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left((1+r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\right) r\,dr\,d\theta$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r^2+2r\cos\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^1 r\,dr\int_0^{2\pi} d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)d\theta + \int_0^1 2r^2\,dr\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}2\pi + \frac{1}{4}2\pi + \frac{2}{3}(\sin 2\pi - \sin(0)) = \boxed{\frac{3}{2}\pi}$$

<u>Une autre</u> : $J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\, r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(2\cos\theta)^4}{4}\,d\theta = \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos 4\theta + 8\cos 2\theta + 6\,d\theta$

Comme dans 42b

Linéarisation :

$$\cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{i4\theta}+4e^{i3\theta}e^{-i\theta}+6e^{i2\theta}e^{-i2\theta}+4e^{i\theta}e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

$$J = \frac{1}{4}\left[2\sin 4\theta + 4\sin 2\theta + 6\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

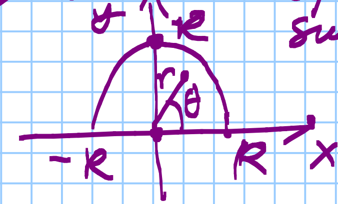
Exercice 32 Centre de gravité

Soit (x_0, y_0) le centre de gravité d'une surface Ω placée dans le plan Oxy de densité $\rho(x,y)$. Alors

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_\Omega \rho x \mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ et } y_0 = \frac{1}{M}\iint_\Omega \rho y \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{ où } M = \iint_\Omega \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Si la surface est homogène (ρ est constant) dans les formule de centre de gravité on peut mettre $\rho = 1$. **a)** Trouver le centre de gravité d'un demi-disque homogène de rayon R. **b)** Trouver le centre de gravité d'une surface plane délimitée par les courbes $ay = x^2, x + y = 2a$ $(a > 0)$.

a) Plaçons le Demi-disque sur le plan



$$x_0 = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}, \quad y_0 = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}, \quad \iint_D dx\,dy = \frac{\pi R^2}{2}$$

Comme c'est symétrique par raport à l'axe Oy

$x_0 = 0$. Pour y_0 on a $\iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\left(\text{Aire de disque}\right) = \frac{\pi R^2}{2}$

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_0^\pi\left[\int_0^R r\sin\theta\, r\,dr\right]d\theta = \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \cdot \int_0^R r^2\,dr$$

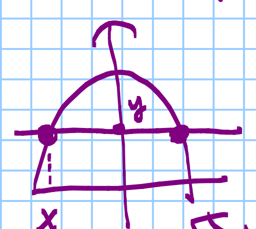
$$= \frac{R^3}{3}\left(-\cos\pi - (-\cos 0)\right) = \boxed{\frac{2}{3}R^3}$$

Ou bien par le calcul directe sans passage aux coord. polaires.

$$\int_0^R\left[\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}} y\,dx\right]dy = 2\int_0^R y\sqrt{R^2-y^2}\,dy = -\int_{R^2}^0 \sqrt{z}\,dz$$

$z = R^2 - y^2$, $\quad y = 0 \Rightarrow z = R^2$

$dz = -2y\,dy \quad y = R \Rightarrow z = 0$



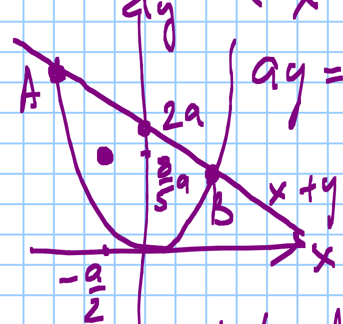
$x^2 + y^2 = R^2$

$$= \int_0^{R^2} z^{1/2}\,dz = \left[\frac{z^{3/2}}{3/2}\right]_0^{R^2} = \boxed{\frac{2}{3}R^3}$$

Donc

$$\boxed{x_0 = 0,\ y_0 = \frac{4}{3\pi}R}$$

b)



$ay = x^2$

$x + y = 2a$

Aire:

$$\iint_\Omega dx\,dy = \int_{x_A}^{x_B}\left[\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy\right]dx$$

points d'intersections? x_A et x_B coordonnées x.

$y=\frac{x^2}{a} \Rightarrow x+\frac{x^2}{a}=2a \Rightarrow x^2+ax-2a^2=0$ — équation sur les pts. d'intersection de $ay=x^2$ et $x+y=2a$

donne $x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8a^2}}{2}=\frac{-a\pm 3a}{2}$ $\quad x_A=-2a,\ x_B=a$

Donc on a $\int_{-2a}^{a}\left[\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy\right]dx = \int_{-2a}^{a} 2a-x-\frac{x^2}{a}\,dx$

$$=\left[2ax-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3a}\right]_{-2a}^{a} = 2a^2-\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3a}-\left(-4a^2-\frac{4a^2}{2}-\frac{(-2a)^3}{3a}\right)$$

$$=\left(2-\frac12-\frac13+4+2-\frac83\right)a^2 = 4{,}5a^2=\frac92 a^2$$

Pour le centre de gravité alors : (x_0,y_0)

$$x_0=\frac{2}{9a^2}\cdot\int_{-2a}^{a}\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} x\,dy\,dx = \frac{2}{9a^2}\int_{-2a}^{a} x\left(2a-x-\frac{x^2}{a}\right)dx$$

$$=\frac{2}{9a^2}\left[2a\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4a}\right]_{-2a}^{a} = a\cdot\frac29\left[1-\frac13-\frac14-\left(4+\frac83-\frac{16}{4}\right)\right]$$

$$= a\cdot\frac29\left(1-\frac13-\frac14-4-\frac83+4\right)=a\cdot\frac29\left(-2-\frac14\right)=\boxed{-\frac a2}$$

$$y_0=\frac{2}{9a^2}\int_{-2a}^{a}\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y\,dy\,dx = \frac{2}{9a^2}\int_{-2a}^{a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dx = \frac{1}{9a^2}\int_{-2a}^{a}(2a-x)^2-\frac{x^4}{a^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{9a^2}\int_{-2a}^{a}\left(4a^2-4ax+x^2-\frac{x^4}{a^2}\right)dx = \frac{1}{9a^2}\left[4xa^2-\frac{4ax^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5a^2}\right]_{-2a}^{a}$$

$$=\frac a9\left[4-2+\frac13-\frac15-\left(-8-8-\frac83+\frac{32}{5}\right)\right]=a\cdot\frac19\left(21-\frac{33}{5}\right)$$

$$=\frac a3\left(7-\frac{11}{5}\right)=\frac a3\cdot\frac{35-11}{5}=\boxed{\frac85 a}$$

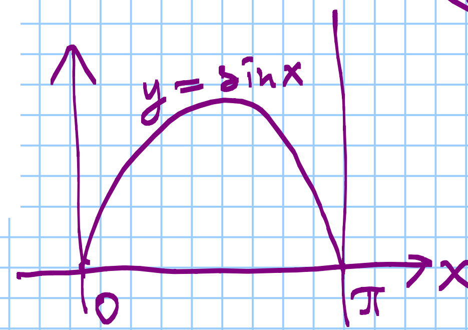
Exercice 33. Moments d'inértie

Soient I_x, I_y les moments d'inértie d'une surface Ω placée dans le plan Oxy par rapport aux axes Ox et Oy. Alors

$$I_x = \iint_\Omega \rho y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ et } I_y = \iint_\Omega \rho x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

où ρ est la densité de la surface. Si on met $\rho = 1$ on obtient les moments d'inértie géométriques.

1. Trouver les moments d'inértie géométriques de la surface délimitée par la courbe $y = \sin x$ entre les droites $x = 0$ et $x = \pi$.
2. On considère une surface homogène délimitée par la parabole $4y = x^2$, et par la droite $y = x$. Trouver son aire et son moment d'inértie géométrique par rapport à l'axe Oy.



$\boxed{45.1}$

$0 \le x \le \pi$ et $0 \le y \le \sin x$

$$I_x = \int_0^\pi \left[\int_0^{\sin x} y^2 dy\right] dx = \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin^3 x \, dx = \frac{1}{3}\int_0^\pi (1-\cos^2 x)\sin x \, dx$$

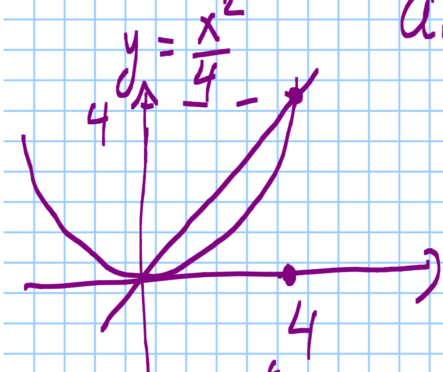
$$= \frac{1}{3}\left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\pi = \frac{4}{9}$$

$$I_y = \int_0^\pi \int_0^{\sin x} x^2 dy \, dx = \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$$

IPP deux fois

$$= \left[2\cos x + 2x\sin x - x^2\cos x\right]_0^\pi = \pi^2 - 4$$

$\boxed{45.2}$



Aire: $$A = \int_0^4 \int_{x^2/4}^{x} dy\,dx = \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3\cdot 4}\right]_0^4$$

$$= \frac{16}{2} - \frac{16}{3} = \frac{16}{6} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

$$I_y = \int_0^4 \int_{x^2/4}^{x} x^2 dy \, dx = \int_0^4 x^2\left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$I_y = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5\cdot 4}\right]_0^4 = 64 - \frac{256}{5} = \boxed{\frac{64}{5}}$$