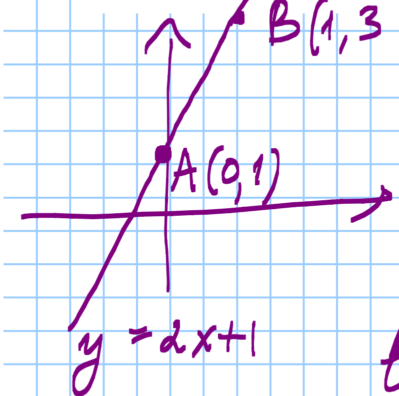
Fiche 4 - Intégrales curvilignes : exercises 34-41

Exercice 34. Droite. $*$

Trouver une paramétrization qui parcours le segment de la droite $y = 2x + 1$ du point $A(0, 1)$ au point $B(1, 3)$, $\gamma_1 : [0, 1] \to (AB)$ et une autre $\gamma_2 : [0, 1] \to (BA)$ qui va dans le sens opposé.



$\begin{cases} x = t \\ y = 2t+1 \end{cases}$ $t \in [0,1]$ donne γ_1

Pour trouver γ_2 on remarque qu'il suffit de renverser le parcours de t. On met

$s = 1 - t$: $\quad \gamma_2(s) := \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 2(1-s)+1 \end{cases}$

$t = 1 - s$

Donc $\gamma_2 = \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 3 - 2s \end{cases}$

Exercice 35. Trouver les équations de la tangente et du plan normal à la courbe

1. $*\ x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$ au point $t = 1$.
2. $x = t - 2, \quad y = 3t^2 + 1, \quad z = 2t^3$, au point où celle-ci coupe le plan yOz.

1. $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t \\ z' = 3t^2 \end{cases}$ au pt $t = 1$ $(x, y, z)(t) = (1,1,1)$

$(x', y', z') = (1, 2, 3)$

Donc la tangente : $\boxed{\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}}$

et le plan normal : $1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-1) + 3(z-1) = 0$

i.e. $\boxed{x + 2y + 3 - 6 = 0}$

2. $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3t^2 + 1 \\ z = 2t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 6t \\ z' = 6t^2 \end{cases}$ Le pt où la courbe coupe le plan yOz :

c'est le point sur la courbe où x s'annule.

Donc $x_0 = t - 2 = 0 \Rightarrow t_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3 \cdot 2^2 + 1 = 13$

et $z_0 = 2 \cdot 2^3 = 16$

On considère alors le pt. $(x_0, y_0, z_0) = (0, 13, 16)$

$(x', y', z')(2) = \cancel{(1, 4, 12)}$ $(1, 12, 24)$

La tangente :

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$ donne

$$\boxed{\frac{x-0}{1} = \frac{y-13}{12} = \frac{z-16}{24}}$$

et le plan normal :

$$1(x-0) + 12(y-13) + 24(z-16) = 0$$

$$\boxed{x + 12y + 24z - 492 = 0}$$

$-12 \times 13 - 24 \times 16$
$= -12 \cdot 41 = 492$

Exercice 36. ∗ Une particule se déplace dans l'espace et son movement décrit une courbe

$$x(t) = 4\cos t, \quad y(t) = 4\sin t, \quad z(t) = 6t.$$

Trouver les valeurs absolues de la vitesse et de l'accélération au temps $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$. Trouver aussi les equations de la droite tangente et du plan normale dans chaque de ces points.

vitesse : $\begin{cases} x'(t) = -4\sin t \\ y'(t) = 4\cos t \\ z'(t) = 6 \end{cases}$

valeur absolue :

$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$

$= \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$

$= \boxed{2\sqrt{13}}$

ne depend pas de pt.

accelaration : $\begin{cases} x''(t) = -4\cos t \\ y''(t) = -4\sin t \\ z''(t) = 0 \end{cases}$

La valeur absolue : $\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = \boxed{4}$

ne dépend pas de pt non plus.

Pour l'éq^n de la droite tangente

En pt $t=0$ on a $(x,y,z)\big|_{t=0} = (4,0,0)$

$(x',y',z')\big|_{t=0} = (0,4,6)$.

Donc l'équation de la droite tangente :

$$\boxed{\begin{cases} x=4 \\ \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{6} \end{cases}}$$ et du plan normal $\boxed{4y+6z=0}$

En pt. $t=\pi/2$ $(x,y,z)\big|_{t=\pi/2} = (0,4,3\pi)$.

$(x',y',z')\big|_{t=\pi/2} = (-4,0,6)$

Donc l'éq^n de la droite tang. au pt $t=\pi/2$:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{-4} = \dfrac{z-3\pi}{6} \\ y=4 \end{cases}}$$ et du plan tang. $\boxed{-4x+6z=18\pi}$

Exercice 37. ∗ Pour $x \in [0,1]$, calculer la longueur de la courbe $y = x^{3/2}$.

$\gamma(t) := \begin{cases} x=t \\ y=t^{3/2} \end{cases}$, $t\in[0,1]$ $\mathcal{L}(\Gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt$

$= \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}t^{1/2}\right)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}t}\,dt$

$$= \frac{4}{9}\int_1^{13/4} u^{1/2}\,du = \frac{4}{9}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^{13/4}$$

$u = 1+\frac{9}{4}t$

$dt = \frac{4}{9}du$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - 1\right]$$

$4^{3/2} = \sqrt{4^3} = 8$

$t=0 \quad u=1$

$t=1 \quad u=\frac{13}{4}$

$$= \frac{1}{27}\,13\cdot\sqrt{13} - \frac{8}{27} = \boxed{\frac{13\sqrt{13}-8}{27}}$$

Exercice 38. $*$

Calculer la longueur de la courbe paramétrée $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) := \left(-\frac{4}{3}t^3 + t - 2, 2t^2 + 7\right).$$

$$\gamma'(t) = \left(-\frac{4}{3}3\cdot t^2 + 1,\ 4t\right),\quad |\gamma'(t)| = \sqrt{(-4t^2+1)^2 + (4t)^2}$$

$$= \sqrt{(4t^2)^2 - 2\cdot 4t^2 + 1^2 + (4t)^2} = \sqrt{(4t^2)^2 + 8t^2 + 1^2} = 4t^2+1$$

$$L(\gamma) = \int_0^2 (4t^2+1)\,dt = \left[4\frac{t^3}{3} + t\right]_0^2 = \frac{4\cdot 8}{3} + 2 = \boxed{\frac{38}{3}}$$

Exercice 39. Calculer la longueur de la courbe paramétrée $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) := (\cos t + \cos^2 t, \sin t + \sin t \cos t)$.

$$\gamma'(t) = (-\sin t - \sin t \cdot (2\cos t),\ \cos t + \cos^2 t - \sin^2 t)$$

$$|\gamma'(t)|^2 = (-\sin t - \sin t \cdot 2\cos t)^2 + (\cos t + \cos^2 t - \sin^2 t)^2$$

$$= \sin^2 t + 4\sin^2 t \cos t + 4\cos^2 t \sin^2 t$$
$$+ \cos^2 t + \cos^4 t + \sin^4 t + 2\cos^3 t - 2\cos t \sin^2 t - 2\cos^2 t \sin^2 t$$

$$= (\sin^2 t + \cos^2 t) + 2\cos t(\sin^2 t + \cos^2 t)$$
$$+ \underbrace{\cos^4 t + 2\cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t}_{(\cos^2 t + \sin^2 t)^2}$$

$$= 2 + 2\cos t = 2(1 + \cos t)$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{2(1+\cos t)} = \sqrt{4\cos^2 \frac{t}{2}} = 2\left|\cos \frac{t}{2}\right|$$

$$\frac{1+\cos t}{2} = \cos^2 \frac{t}{2}$$

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi} 2\left|\cos \frac{t}{2}\right| dt = 4\left[\sin \frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = \boxed{4}$$

Exercice 40. Soit Γ une courbe paramétrée par $\varrho := \varrho(t)$ et $\theta := \theta(t)$ en coordonnées polaires, où $t \in [a; b]$.

1. Montrer que la longueur de Γ est

$$\int_a^b \sqrt{\varrho'^2 + \varrho^2 \theta'^2}\,dt.$$

2. Soit γ la courbe d'équation polaire $\varrho := 2(1 + \cos\theta)$ pour θ dans $[-\pi; \pi]$. Donner une paramétrisation en coordonnées polaires de cette courbe et calculer sa longueur.

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \rho(t)\cos\theta(t) \\ y = \rho(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

En coordonnées polaires.

D'où : $\begin{cases} x'(t) = \rho'(t)\cos\theta(t) - \rho(t)\,\theta'(t)\sin\theta(t) \\ y'(t) = \rho'(t)\sin\theta(t) + \rho(t)\,\theta'(t)\cos\theta(t) \end{cases}$

Donc $x'(t)^2 + y'(t)^2$

$$= (\rho'(t))^2\cos^2\theta(t) - 2\rho'(t)\rho(t)\cos\theta(t)\sin\theta(t) + \rho^2(t)(\theta'(t))^2\sin^2\theta(t)$$

$$+ (\rho'(t))^2\sin^2\theta(t) + 2\rho'(t)\rho(t)\sin\theta(t)\cos\theta(t) + \rho^2(t)(\theta'(t))^2\cos^2\theta(t)$$

$$= (\rho'(t))^2 + \rho^2(t)(\theta'(t))^2$$

ce qui donne exactement le résultat

$$\int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}\,dt$$

2. $\gamma : \rho = 2(1+\cos\theta) \qquad \theta \in [-\pi, \pi]$,

coord. polaires.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = 2(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$\text{Longueur}(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\,d\theta = \int \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(-2\sin\theta)^2 + 2^2(1+\cos\theta)^2 \cdot 1}\,d\theta \qquad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4\sin^2\theta + 4 + 8\cos\theta + 4\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{8(1+\cos\theta)}\,d\theta = 4\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4\left[+2\sin\frac{\theta}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 8\left[+\sin\frac{\pi}{2} - \left(+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right] = 8(1-(-1)) = \boxed{16}$$