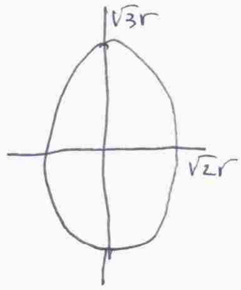
Ex41

1. $r \geq 0$, Γ_r est la courbe d'equation $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = r^2$

L'ellipse de centre $(0,0)$ et des axes $2a$, $2b$ admet $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ comme equation

donc Γ_r est une ellipse, $\left(\frac{x}{\sqrt{2}r}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}r}\right)^2 = 1$.



elle est parametre par $(\sqrt{2}r\cos t, \sqrt{3}r\sin t)$
$0 \leq t \leq 2\pi$

2. $x = \sqrt{2}r\cos t \quad y = \sqrt{3}r\sin t$

$$\Rightarrow f(x,y) = x^3 + xy^2 = 2\sqrt{2}r^3\cos^3 t + 3\sqrt{2}r^3\cos t\sin^2 t$$
$$= \sqrt{2}\cdot r^3\left(2\cos^3 t + 3\cos t(1-\cos^2 t)\right)$$
$$= \sqrt{2}r^3\left(3\cos t - \cos^3 t\right).$$

3. Pour trouver les points extremaux de f sur Γ_r il faut étudier la fonction $\phi(t) = \sqrt{2}r^3(3\cos t - \cos^3 t)$:

$$\phi'(t) = \sqrt{2}r^3(\sin t)(3)\cdot(\cos^2 t - 1) = 0 \iff t = 0, \tfrac{\pi}{2}, \pi, \tfrac{3}{2}\pi$$

et le tableau de variation est

	0		π		2π
f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

donc $\phi(t)$ admet un maximum en $t = 0$
admet un minimum en $t = \pi$

$\phi(0) = 2\sqrt{2}r^3 \quad \phi(\pi) = -2\sqrt{2}r^3$ donc le maximum de f sur Γ_r est $= 2\sqrt{2}r^3$ et le minimum de f sur Γ_r est $-2\sqrt{2}r^3$

4. Il decoule de la question 3 que la valeur maximal de f sur E est $2\sqrt{2}$, et la valeur minimal sur E est $-2\sqrt{2}$

(Pour chaque $0 \leq r \leq 1$ le maximum de f sur Γ_r est $2\sqrt{2}r^3$
le minimum de f sur Γ_r est $-\sqrt{2}\cdot 2r^3$

et $\{0\} \cup \bigcup_{r>0} \Gamma_r = E$)

Ex 42

1. $9x^2+4y^2-8y=32 \iff 9x^2+4(y^2-2y+1)-4=32$

$\iff (3x)^2+2(y-1)^2=36$

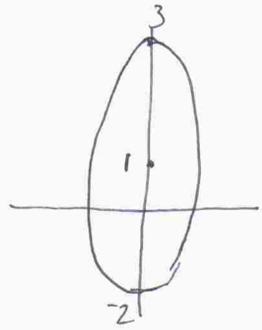
$\iff \left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y-1}{3}\right)^2=1$

la courbe est donc une ellipse centré en $(0,1)$

elle est donc parametré par $\frac{y-1}{3}=\sin t$

donc $(x,y)=(2\cos t, 3\sin t+1)$ $\quad \frac{x}{2}=\cos t$

$0\leq t\leq 2\pi$



2. Pour $t=\frac{\pi}{3}$ on a $x=2\cos t=1$

$y=3\sin t+1=\frac{2+3\sqrt{3}}{2}$

donc $\left(1,\frac{2+\sqrt{3}\cdot 3}{2}\right)$ est sur la courbe.

le vecteur tangente en ce point est $\left((2\cos t)'\left(\frac{\pi}{3}\right),(3\sin t+1)'\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$=\left(-\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$

3. $(x,y)=(2\cos t,3\sin t+1)$ alors $x^2-(y-1)^2=(2\cos t)^2-(3\sin t)^2$

$=4\cos^2 t-9\sin^2 t$

$=4\cos^2 t-9(1-\cos^2 t)$

$=\underline{13\cos^2 t-9}$

donc le minimum de la fonction

f sur la courbe s'obtient en $t=\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$

et le maximum de f s'obtient en $t=0,\pi$

le minimum de f sur la courbe est -9

le maximum de f sur la courbe est 4

Ex 43

1. $\gamma(t) = (3\cos t, 5\sin t, 4\cos t) \qquad t \in [0,\pi]$

$\gamma'(t) = (-3\sin t, 5\cos t, -4\sin t)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (5\cos t)^2 + (-4\sin t)^2} = \sqrt{25} = 5$

et $\|\gamma'(t)\|$ ne depend pas de t.

2. d'apres le rappel en debut de la fiche 4, l'equation de la tangente en $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ est

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial x}{\partial t}(t_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial y}{\partial t}(t_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial z}{\partial t}(t_0)}$$

ici le point $A = \left(\frac{3}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, 2\right) = \left(x(\frac{\pi}{3}), y(\frac{\pi}{3}), z(\frac{\pi}{3})\right)$

$t_0 = \frac{\pi}{3}$

donc l'éq. devient :

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{-\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{y - \frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{z - 2}{-2\sqrt{3}}$$

c.a.d $\boxed{\frac{2x-3}{-3\sqrt{3}} = \frac{2y - 5\sqrt{3}}{5} = \frac{z-2}{-2\sqrt{3}}}$

3. A l'intersection de Γ avec le plan yz, $x = 0$

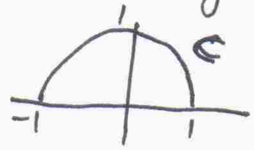
donc $t = \frac{\pi}{2}$ et alors l'intersection de Γ avec le plan yz

est $\boxed{(0, 5, 0)}$

Ex 44

C est l'arc de cercle définie par $x = \cos t$ et $y = \sin t$ $0 \leq t \leq \pi$

donc $C = \{(\cos t, \sin t) \mid 0 \leq t \leq \pi\}$



$y = \sin t \quad dy = \cos t\, dt$

$$\int_C xy\, dy = \int_0^{\pi} \cos(t)\cdot\sin(t)\cdot\cos t\, dt = -\int_1^{-1} s^2 ds = \frac{s^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$s = \cos t$

$ds = -\sin t\, dt$

$t = 0 \quad s = 1$

$t = \pi \quad s = -1$

Ex 45

1. Equation de la droite D passant par $(1,1)$ et $(2,4)$

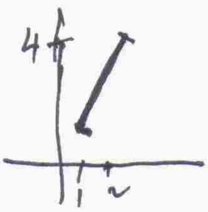
En general l'equation de la droite D passant par (x_1, y_1) et (y_1, y_2)

est $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ cela donne dans notre cas :

$(x_1, y_1) = (1,1)$

$(x_2, y_2) = (2,4)$

$\dfrac{y-1}{3} = \dfrac{x-1}{1}$ donc $y = 3x - 2$



le segment de D entre $(1,1)$ et $(2,4)$ est donc $(t, 3t-2)$ $1 \leq t \leq 2$

$x = t \Rightarrow dx = dt \qquad y - x = 2t - 2$

$y = 3t - 2 \Rightarrow dy = 3dt \qquad x + y = 4t - 2$

2. $$\int_C (y-x)dx + (y+x)dy = \int_1^2 \big((2t-2) + (4t-2)\cdot 3\big)dt$$

$$= \int_1^2 (14t - 8)dt = 14\frac{t^2}{2} - 8t\Big]_1^2 = 12 - (-1) = \boxed{13}$$

Ex 46

Le segment de la droite joignant $(1,1,1)$ à $(2,3,4)$ est paramétrisé par $(1,1,1) + t(1,2,3) = (1+t, 1+2t, 1+3t)$: Γ

$0 \leq t \leq 1$

$$x+y+z = 1+t + 1+2t + 1+3t = 6t+3$$

et l'intégrale de la fonction $f(x,y,z) = \ln(x+y+z)$ sur Γ

devient

$$\int_0^1 \ln(6t+3)\,dt = \frac{1}{6}\Big[(6t+3)\ln(6t+3) - (6t+3)\Big]_0^1$$

on sait que $\int \ln t\,dt = t\ln t - t$

$$= \frac{1}{6}\Big(9\ln 9 - 9 - (3\ln 3 - 3)\Big)$$

$$= \frac{1}{6}\Big(18\ln 3 - 3\ln 3 - 6\Big) =$$

$$= \boxed{\frac{5}{2}\ln 3 - 1}$$