# Math 5 - surfaces.



**Exercice 50.** Calculer l'intégrale $\iint_\Sigma (x+y+z)\,\mathrm{d}S$, où $\Sigma$ est une partie du plan $x+2y+4z=4$, telle que $(x\geq 0,\ y\geq 0, z\geq 0)$.

On est dans le cas quand on peut exprimer par ex. $x$ via $y,z$ : $x = 4-2y-4z$

du coup on peut utiliser le formule analogue à celle juste avant l'exo 50:

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS = \iint_{D(y,z)} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz$$

$$= \iint_{D(y,z)} (4-2y-4z+y+z)\cdot\sqrt{1+(-4)^2+(-2)^2}\,dy\,dz$$

$$= \sqrt{21}\iint_{D(y,z)} (4-y-3z)\,dy\,dz = \sqrt{21}\int_0^1\left(\int_0^{2-2z}(4-y-3z)\,dy\right)dz$$

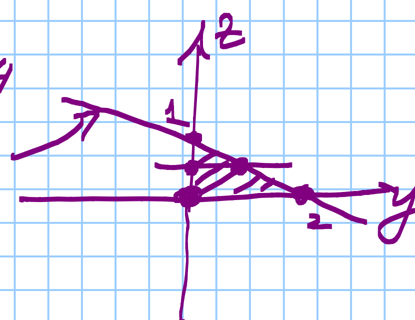
Pour déterminer $D(y,z)$

$x\geq 0$ donne $4-2y-4z\geq 0$ et avec $y\geq 0$, $z\geq 0$

On a $2y+4z\leq 4$

le bord $2y+4z=4$

$y = 2-2z$



$$= \int_0^1 \left[4y-\frac{y^2}{2}-3zy\right]_0^{2-2z} dz$$

$$= \int_0^1 4(2-2z) - \frac{(2-2z)^2}{2} - 4z(2-2z)\,dz$$

$$= \sqrt{21}\int_0^1 (8-8z-1+2z-z^2-8z+8z^2)\,dz$$

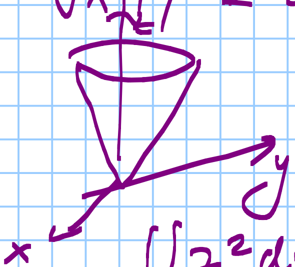
$$= \sqrt{21}\int_0^1 (7-14z+7z^2)\,dz = 7\sqrt{21}\left(7-7+\frac{7}{3}\right) = \boxed{\frac{49\sqrt{21}}{3}}$$

## Exo. 51

Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_\Sigma z^2 \mathrm{d}S$, où $\Sigma$ est une surface d'un cône $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$.

$$\iint_\Sigma z^2 dS = \iint_{(x,y)\in\Sigma} (x^2+y^2)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$ à chaque niveau $z$ entre 0 et 2




dernière

Surface est donnée par l'équation

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ ($\sqrt{x^2+y^2} \le z$ - l'interieur)

$$\iint_S z^2 dS = \iint_{(x,y)\in S} (x^2+y^2)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\, dx\, dy$$

$$= \iint_{(x,y)\in S} (x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

$$= \sqrt{2}\iint_{(x,y)\in S}(x^2+y^2)\, dx\, dy = \sqrt{2}\int_0^2\int_0^{2\pi} r^2\, r\, dr\, dt$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \cdot 2\pi = 8\sqrt{2}\,\pi$$

$$(r,t) \longmapsto (r\cos t, r\sin t, r)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\cos t, r\sin t, r) \wedge \frac{\partial}{\partial t}(r\cos t, r\sin t, r)$$

$$= (\cos t, \sin t, 1) \wedge (-r\sin t, r\cos t, 0)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos t & \sin t & 1 \\ -r\sin t & r\cos t & 0 \end{vmatrix} = \left| \vec{i}(-r\cos t) - \vec{j}\, r\sin t + \vec{k}\cdot r(\cos^2 t + \sin^2 t) \right|$$

$$= \sqrt{(r\cos t)^2 + (r\sin t)^2 + r^2} = \sqrt{2}\, r$$

Donc

$$\iint_S z^2 dS = \int_0^2\int_0^{2\pi} r^2 \sqrt{2}\, r\, dr\, dt = \boxed{8\sqrt{2}\,\pi}$$

Exo 53 Calculer l'intégrale $\iint\limits_{\Sigma} (xy+yz+zx)\,dS$, où $\Sigma$ est une partie d'un cône $z=\sqrt{x^2+y^2}$ satisfaisant $x^2+y^2\le 2ax$. 2

$$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\,dS = \iint\limits_{\Sigma}\left(xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{2}\,dx\,dy$$

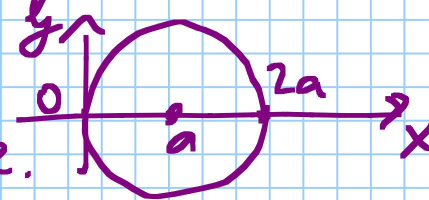
$x^2+y^2\le 2ax \Rightarrow x^2-2ax+a^2-a^2+y^2\le 0$

$z=\sqrt{x^2+y^2}\le 2ax$

$$\Downarrow$$

$$(x-a)^2+y^2\le a^2$$

C'est un disque D de centre $(a,0)$ et de rayon $a$.




Dans l'intégrale on a la quantité $\sqrt{x^2+y^2}$, on introduit les coord. polaires :

$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases}$, $\sqrt{x^2+y^2}=r$, la condition

$x^2+y^2\le 2ax$ devient $r\le 2a\cos t$

et pour $t$ : $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ($x$ est positive)

$$I=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos t}\left(r^2\cos t\sin t + r(\cos t+\sin t)r\right)r\,dr\,dt$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left((\cos t\sin t+\cos t+\sin t)\int_0^{2a\cos t} r^3\,dr\right)dt$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos t\sin t+\cos t+\sin t)\frac{(2a)^4(\cos t)^4}{4}\,dt$$

$$= 4\sqrt{2}\, a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^5 t + \cos^4 t)\sin t + \cos^5 t \, dt$$

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^5 t - \cos^4 t)\sin t \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^5 t - \cos^4 t)\, d(-\cos t)$$

$$= -\left[\frac{\cos^6 t}{6} - \frac{\cos^5 t}{5}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

$$I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 t \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 t)^2 \cos t \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^2 \, d(\sin t)$$

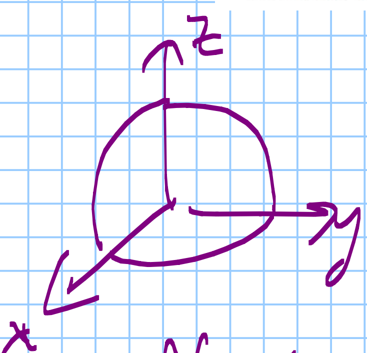
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - 2\sin^2 t + \sin^4 t)\, d(\sin t)$$

$$= \left[\sin t - \frac{2}{3}\sin^3 t + \frac{\sin^5 t}{5}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

alors $\boxed{I = \frac{64\sqrt{2}}{15} a^4}$

**Exo 54**

Trouver l'intégrale $\iint_{\Sigma} x dS$, où la surface $\Sigma$ est une partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, telle que $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.




Une huitième de la sphère:

$\theta \in [0, \pi/2]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \sin\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\theta \end{cases}$$

$$\iint_{\Sigma} x \, ds = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} a\cos\varphi\sin\theta \,(a^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta)$$

En effet, le calcul:

$$\frac{\partial(a\cos\varphi\sin\theta,\ a\sin\varphi\sin\theta,\ a\cos\theta)}{\partial\varphi} = (-a\sin\varphi\sin\theta,\ a\cos\varphi\sin\theta,\ 0)$$

$$\frac{\partial(a\cos\varphi\sin\theta,\ a\sin\varphi\sin\theta,\ a\cos\theta)}{\partial\theta} = (a\cos\varphi\cos\theta, a\sin\varphi\cos\theta, -a\sin\theta)$$

Leur produit vectoriel :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin\varphi\sin\theta & a\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ a\cos\varphi\cos\theta & a\sin\varphi\cos\theta & -a\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \left| \vec{i}(-a^2\cos\varphi\sin^2\theta) + \vec{j}(-a^2\sin\varphi\sin^2\theta) + \vec{k}a^2\left(\overbrace{\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta + \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta}^{\sin\theta\cos\theta}\right)\right|$$

$$= a^2\sqrt{\overbrace{\cos^2\varphi\sin^4\theta + \sin^2\varphi\sin^4\theta}^{\sin^4\theta} + \sin^2\theta\cos^2\theta} = a^2\sin\theta$$

$$\iint_\Sigma x\,d\sigma = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} a\cos\varphi\sin\theta\,(a^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta)$$

$$= a^3\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$= a^3(\sin\pi/2 - \sin 0)\left(\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}d\theta - \int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\,d\theta\right)$$

$$= a^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\sin 2\cdot\frac{\pi}{2} - \sin 0\right]\right) = \boxed{\frac{\pi a^3}{4}}$$

Exo 56

Calculer l'intégrale du champs $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,-1,z)$ sur l'intérieur de la surface $\Sigma$, donnée par l'équation $z = x\cos y$, où $0 \le x \le 1$, $\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{3}$.

$F(x,y,z) = (x,-1,z)$ intérieur de $S$

$0 \le x \le 1$

$\pi/4 \le y \le \pi/3$

$$\iint_\Sigma F(x,y,z)\,d\vec{S} = \iint_\Sigma F(x,y,z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right)dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_{\pi/4}^{\pi/3} (x, -1, x\cos y)(\cos y, -x\sin y, -1)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_{\pi/4}^{\pi/3} (x\cos y + x\sin y - x\cos y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_{\pi/4}^{\pi/3} x\sin y\,dy\,dx = \frac{1}{2}\left[-\cos y\right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-1}{4}}$$

## Exo 57

Trouver l'intégrale $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,x,z)$ sur la surface $\Sigma$, donnée par $\mathbf{r}(u,v) = (\cos v, \sin v, u)$, $0 \le u \le 2$, $\frac{\pi}{2} \le v \le \pi$.

$$F(x,y,z) = (y,x,z) \longmapsto (\sin v, \cos v, u)$$

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial(x,y,z)}{\partial u} & & \\ \frac{\partial(x,y,z)}{\partial v} & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & \cos v & u \\ \frac{\partial(\cos v)}{\partial u} & \frac{\partial \sin v}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial u} \\ \frac{\partial \cos v}{\partial v} & \frac{\partial \sin v}{\partial v} & \frac{\partial u}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin v & \cos v & u \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = \sin v \cdot (-\cos v) - \cos v \cdot (-(-\sin v))$$

$$= \underline{2\cos v \sin v}$$

Donc l'intégrale: $\int_0^2 \int_{\pi/2}^{\pi} 2\cos v \sin v\,dv\,du$

$$= 2\int_0^2 du \int_{\pi/2}^{\pi} \cos v\,[\sin v\,dv] = 4\left[\frac{\cos^2 v}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \boxed{2}$$

$W = \cos v$, $dW = -\sin v\,dv$

## Exo 58

Trouver le flux du champs de vecteurs $\mathbf{F} = y\cdot\mathbf{i} - x\cdot\mathbf{j} + z\cdot\mathbf{k}$ à travers de la surface conique exterieure $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 2$.

$$\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\cdot\vec{k}, \quad z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad 0 \le z \le 2$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(x,y,z)\,dS = \iint_{D(x,y)} \vec{F}(x,y,\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \left(-\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}, -\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}, 1\right) dx\,dy$$

$0 \leq z \leq 2$ avec $\sqrt{x^2+y^2} = z$ implique $x^2+y^2 \leq 4$ (6)

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 4} \left(y, -x, +\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \left(-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 4} \frac{-2xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{(-x)\cdot(-2y)}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2}\; dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy = \int_{t=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} \sqrt{r^2}\cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^2 r^2\, dr = 2\pi \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \boxed{\frac{16\pi}{3}}$$

**Exos 9** Trouver le flux du champs de vecteurs
$\mathbf{F}(x,y,z) = -y\cdot\mathbf{i} + x\cdot\mathbf{j} - z\cdot\mathbf{k}$ à travers de la sphère unitaire orientée à l'interieur $x^2+y^2+z^2=1$.

Sphère $x^2+y^2+z^2=1$ en coord. sphériques :
$$\begin{cases} x = 1\cdot\cos\varphi\sin\theta & \theta\in[0,\pi] \\ y = 1\cdot\sin\varphi\sin\theta & \varphi\in[0,2\pi] \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\cos\theta \\ \frac{\partial\cos\varphi\sin\theta}{\partial\varphi} & \frac{\partial\sin\varphi\sin\theta}{\partial\varphi} & \frac{\partial\cos\theta}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\cos\varphi\sin\theta}{\partial\theta} & \frac{\partial\sin\varphi\sin\theta}{\partial\theta} & \frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\cos\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= -\cos\theta\cdot\left(-\sin^2\varphi\sin\theta\cdot\cos\theta - (\cos\varphi\cos\theta)\cos\varphi\sin\theta\right)$$
$$-\sin\theta\times(0) = \underline{\cos^2\theta\sin\theta}.$$

$$\text{Flux} = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin\theta\, d\varphi\, d\theta = 2\pi\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi\cdot\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi = -2\pi\left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \boxed{+\frac{4}{3}\pi}$$