Formule de Green-Riemann

Exo 60

Utiliser la formule de Green-Riemann pour les calculs suivants :

1. Soit la courbe C un cercle donné par l'équation $x^2+y^2=a^2$. Calculer les intégrales :

   1. $\oint_C xy\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y$, **2.** $\oint_C (x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y$, **3.** $\oint_C x^2y\mathrm{d}x-xy^2\mathrm{d}y$.

$\boxed{1.1}$
$$\oint_{x^2+y^2=a^2} xy\,dx+(x+y)\,dy=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x}-\frac{\partial(xy)}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le a^2}(1-x)\,dx\,dy \underset{\text{coord polaires}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^a(1-r\cos t)\,r\,dr\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}dt\int_0^a r\,dr-\int_0^{2\pi}\cos t\,dt\int_0^a r^2\,dr = 2\pi\frac{a^2}{2}-\underbrace{0}_{[\sin t]_0^{2\pi}}=\boxed{\pi a^2}$$

$\boxed{1.2}$
$$\oint_{x^2+y^2=a^2}(x-y)\,dx+(x+y)\,dy=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x}-\frac{\partial(x-y)}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{x^2+y^2\le a^2}1+1\,dx\,dy$$

$$=2\iint_{x^2+y^2\le a^2}dx\,dy=2\cdot(\text{aire du disque})=\boxed{2\pi a^2}$$

$\boxed{1.3}$
$$\oint_{x^2+y^2=a^2}x^2y\,dx-xy^2\,dy=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\left(\frac{\partial(-xy^2)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le a^2}-(y^2+x^2)\,dx\,dy=-\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\,r\,dr\,dt=-2\pi\frac{a^4}{4}=\boxed{-\frac{\pi a^4}{2}}$$

2. Soit la courbe E un ellipse donné par l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Calculer : $\oint_E (x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y$.

$$\oint_E(x+y)\,dx-(x-y)\,dy=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\frac{\partial(-(x-y))}{\partial x}-\frac{\partial(x+y)}{\partial y}\,dx\,dy$$

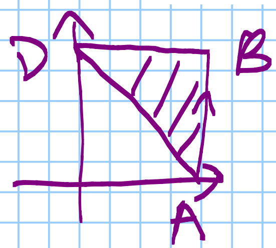
$$=-2\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}dx\,dy=-2\text{ aire de l'ellipse}=-2\pi ab$$

car <u>aire de l'ellipse</u> $\int_0^{2\pi}\int_0^1 ab\,r\,dr\,dt=\boxed{\pi ab}$

En effet : $x = ar\cos t$, $y = br\sin t$, $t \in [0, 2\pi[$, $r \in [0,1]$

Jacobien : $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & -ar\sin t \\ b\sin t & br\cos t \end{vmatrix} = \underline{\underline{abr}}$

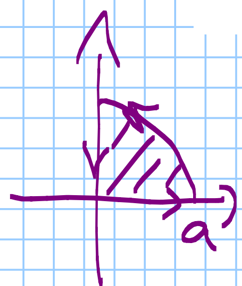
3. Soit la courbe T un triangle ABC de sommets $A(a,0)$, $B(a,a)$, $D(0,a)$. Calculer l'intégrale : $\oint_T y^2 \mathrm{d}x + (x+y)^2 \mathrm{d}y$.



$$\oint_T y^2dx + (x+y)^2dy = \iint (2(x+y) - 2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 2x\,dy \right) dx = \int_0^1 2x(1-(1-x))\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \boxed{\frac{2}{3}}$$

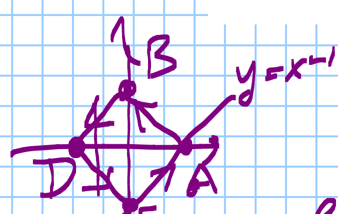
4. Soit la courbe L un quart du cercle d'équation $x^2+y^2 = a^2$, $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Calculer l'intégrale : $\oint_L (y - x^2)\,\mathrm{d}x - (x + y^2)\,\mathrm{d}y$.



$$= \iint \left(\frac{\partial(-(x+y^2))}{\partial x} - \frac{\partial(y-x^2)}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint (-1-1)\,dx\,dy$$

$$= -2 \cdot \text{aire}\left(\tfrac{1}{4} \text{ disque de rayon } a\right) = \boxed{-\frac{\pi a^2}{2}}$$

5. Soit la courbe Q un carré $A(1,0)$, $B(0,1)$, $D(-1,0)$, $E(0,-1)$. Calculer l'intégrale : $\oint_Q \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{x+y}$.



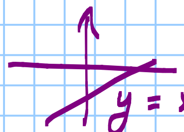
Correction de 30.11.2020 :

Ici on ne peut pas utiliser le thm de Green-Riemann car la fonction $\frac{1}{x+y}$ n'est pas continue en points $y=-x$. On est obligé de calculer l'intégrale curviligne sur quatre segments :

1. $y=-x+1$ $\quad \begin{cases} x = 1-t \\ y = -(1-t)+1 = t \end{cases}$ $\quad \begin{cases} dx = -dt \\ dy = dt \end{cases}$ $\quad \int_0^1 \frac{-dt-dt}{1-t+t} = -\int_0^1 2\,dt = -2$

2. $y=x+1$ $\quad \begin{cases} x = -t \\ y = 1-t \end{cases}$ $\quad \begin{cases} dx = -dt \\ dy = -dt \end{cases}$ $\quad \int \frac{-dt+dt}{-t+1-t} = 0$

3. $y=-x-1$ $\quad \begin{cases} x = -1+t \\ y = -(-1+t)-1 = -t \end{cases}$ $\quad \begin{cases} dx = dt \\ dy = -dt \end{cases}$ $\quad \int \frac{dt+dt}{-1+t-t} = -\int_0^1 2\,dt = -2$

4  $\begin{cases} x = t \\ y = t-1 \end{cases}$ $\begin{cases} dx = dt \\ dy = dt \end{cases}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt - dt}{t + t - 1} = 0$

La somme de ces quatre intégrales donne $\boxed{-4}$

6. Soit R le domaine délimité par l'astroïde de l'équation $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$. Calculer son aire.

L'aire de l'astroïde est donné par la formule de Green-Riemann :

$$\iint_R dx\,dy = \oint_{\text{astroïde}} (-y)\,dx = \int_0^{2\pi} a\sin^3 t \cdot 3a\sin t\cos^2 t\,dt$$

$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $\quad dx = -a3\sin t\cos^2 t\,dt$

$$= 3a^2\int_0^{2\pi} \sin^4 t\cos^2 t\,dt = 3a^2\int_0^{2\pi} \sin^4 t\,(1-\sin^2 t)\,dt$$

$$= 3a^2\int_0^{2\pi} (\sin^4 t - \sin^6 t)\,dt = 3a^2\cdot 2\pi\,(6+20) = \boxed{156\pi a^2}$$

en linéarisant

$$\sin^4 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{4it} - 4e^{3it}e^{-it} + 6e^{2it}e^{-2it} - 4e^{it}e^{-2it} + e^{-4it}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos 4t - 4\cos 2t + 6\right)$$

$$\sin^6 t = \frac{1}{8}\left(\cos 6t - 6\cos 4t + 15\cos 2t - 20\right)$$

Tous les cos en intégrant donnent 0 sur les bornes 0 et 2π.

7. Trouver l'aire de l'ellipse définie paramétriquement : $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

$$\iint_{\text{Ellipse}} dx\,dy = \oint_{\mathcal{E}} -y\,dx = \int_0^{2\pi} ab\sin^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\cdot 2\pi = \boxed{\pi ab}$$

$x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $dx = -a\sin t$, $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$ ce qu'on a déjà trouvé en exo 2.

Exo 61 Montrer que l'intégrale $\oint_L \frac{\partial(x^2y^3)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial(x^2y^3)}{\partial y}\mathrm{d}y$, le long du segment de droite allant du point $(7,1)$ au point $(5,2)$ est égale à 151. Quelle est la valeur de la même intégrale si L est une partie d'une parabôle passant du point $(7,1)$ au point $(5,2)$.

$$\int_L \frac{\partial(x^2y^3)}{\partial x}dx + \frac{\partial(x^2y^3)}{\partial y}dy = \int_{(7,2)}^{(5,1)} d(x^2y^3)$$

$$= \left[x^2y^3\right]_{(7,1)}^{(5,2)} = 5^2\cdot 2^3 - 7^2\cdot 1^3 = 25\cdot 8 - 49 = 151$$

Cela ne depend pas de chemin car c'est une intégrale de la différentielle $d(x^2y^3)$ – cela dépend que des extremités de ce chemin

---

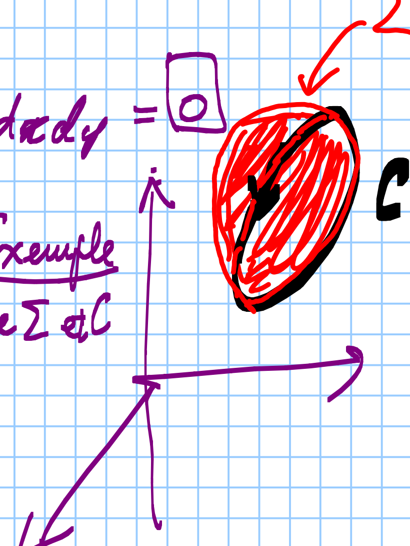
Exo 62 Montrer que l'intégrale curviligne $\oint_{\mathcal{C}} yz dx + xz dy + xy dz$ est égale à 0 le long tout le circuit fermé $\mathcal{C}$.

On utilise le thm. de Stokes.

Le champs (yz, xz, xy) est définie sur $\mathbb{R}^3$ et en particulier sur toute surface Σ pour laquelle C est le bord (comme C est <u>fermé</u> on peut trouver des surfaces qui ont C comme bord)

$$\oint_C \underbrace{yz}_{P}dx + \underbrace{xz}_{Q}dy + \underbrace{xy}_{R}dz \quad \text{par le thm. de Stokes}$$

$$= \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dxdy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \boxed{0}$$



Exemple de Σ et C

Car $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = x - x = 0$ ✓

$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = y - y = 0$ ✓

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = z - z = 0$ ✓