Exo75)

Math 5. Ostrogradsky-Gauss

À l'aide du théorème d'Ostrogradski-Gauss calculer l'intégrale $\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ pour le champs $\mathbf{F}$ et la surface Σ suivants :

1. $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$, et Σ est une surface de sphère de l'équation $x^2+y^2+z^2 = a^2$ orienté à l'exterieur.
2. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, et Σ est une surface entourant le cylindre $x^2+y^2 \le a^2$ entre les deux plans $z=-1$, et $z=1$.
3. $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x^3, y^3, z^3\right)$, et Σ est une surface entourant le domaine borné par $x^2+y^2-z^2=0$ et $z=1$.
4. $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy, 8xz, 4yz)$, et Σ est une surface de tetrahedron de sommets $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.
5. $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2x^2y, xz^2, 4yz\right)$, où Σ est surface de parallélépipède formé par le domaine entre les plans déquations $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=3$.

1,

$$I = \iint_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy$$

S - sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$

Ostrogradsky-Gauss :

$$I = \iiint_{\substack{\text{Boule} \\ x^2+y^2+z^2 \le a^2}} \operatorname{div}(x^3, y^3, z^3)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{\text{boule de rayon } a} (3x^2+3y^2+3z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 3\iiint_{\text{boule de rayon } a} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 3\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a r^2\, r^2\,dr\right)d\varphi\right)\sin\theta\,d\theta$$

$$= 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{a^5}{5} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta}_{=2} = \boxed{\frac{12}{5}\pi a^5}$$

Où on utilise <u>les coordonnées</u>

sphériques

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0,\pi] \\ \varphi \in [0,2\pi] \\ r \in]0,a] \end{array}$$

en remarquant que

$x^2+y^2+z^2 = r^2$ et en calculant le jacobien :

$$dx\,dy\,dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \Big|\big[\cos\varphi\sin\theta \cdot r\cos\varphi\sin\theta\cdot(-r\sin\theta)$$
$$-(-r\sin\varphi\sin\theta)\times(-\sin\varphi\,\underline{\sin^2\theta} - r\sin\varphi\,\underline{\cos^2\theta})$$
$$+ r\cos\varphi\cos\theta\,(-r\cos\varphi\sin\theta\cos\theta)\big]\,dr\,d\varphi\,d\theta\Big|$$

$$= \big|-r^2\cos^2\varphi\,\underline{\underline{\sin^3\theta}} - r^2\sin^2\varphi\sin\theta$$
$$-r^2\cos^2\varphi\,\underline{\underline{\cos^2\theta\sin\theta}}\big|\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

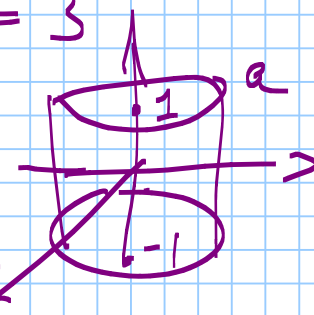
$$= \left(\underline{\underline{\cos^2\varphi}}\sin\theta + \underline{\underline{\sin^2\varphi}}\sin\theta\right) r^2\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \boxed{\sin\theta\, r^2\,dr\,d\varphi\,d\theta}$$

$\boxed{2}$ $J = \iint_S F \cdot dS = \iiint_{\text{cylindre}} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz$

$F = (x, y, z)$

$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$



$J = 3 \iiint_{\text{cylindre}} dx\,dy\,dz = 3 \cdot \text{volume}$

c'est juste $2 \times$ aire de 

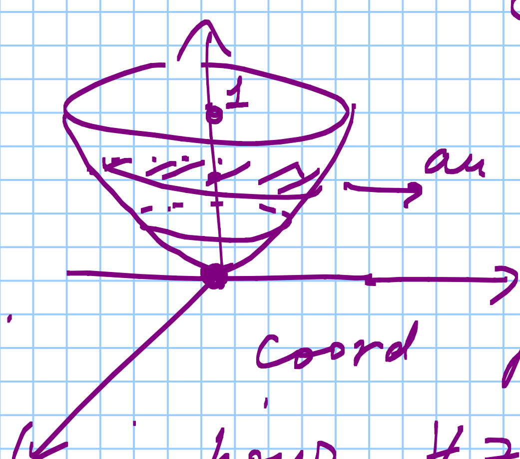
$J = 3 \cdot 2 \pi a^2$

③ $K = \iint_S F\,ds = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz$

$F = (x^3, y^3, z^3)$, $\operatorname{div} F = 3(x^2 + y^2 + z^2)$

S entre $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ et $z = 1$

i.e. $0 \leq z \leq 1$ et pour $\forall z$ on a
$x^2 + y^2 \leq z^2$



au niveau z x et y sont borné par le cercle de rayon z : $x^2 + y^2 = z^2$

coord polaires pour x, y

pour $\forall z$: $0 \leq r \leq z$, $t \in [0, 2\pi[$

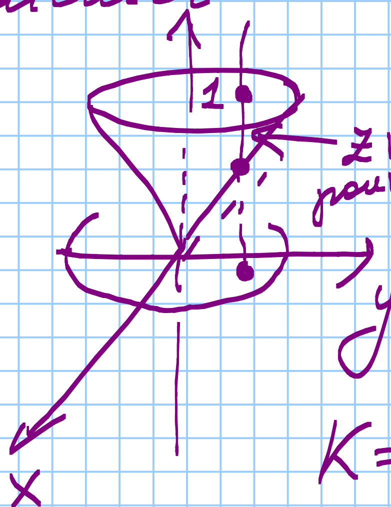
$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Rightarrow K = 3\int_{z=0}^{1}\left(\int_{r=0}^{z}\int_{t=0}^{2\pi}(r^2+z^2)\,r\,dr\,dt\right)dz$$

$$= 3\cdot 2\pi\int_0^1\int_0^z (r^3+z^2 r)\,dr\,dz = 6\pi\int_0^1\left[\frac{r^4}{4}+z^2\frac{r^2}{2}\right]_0^z dz$$

$$= 6\pi\cdot\left[\frac{z^5}{4\cdot 5}+\frac{z^5}{2\cdot 5}\right]_0^1 = \boxed{\frac{9}{10}\pi}$$

La même intégrale triple on peut calculer en calculant d'abord $\int dz$ et après sur le disque du plan xy : $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ et $x^2+y^2\le 1$:



$$K = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 3(x^2+y^2+z^2)\,dz\right)dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left[3\left((x^2+y^2)z+\frac{z^3}{3}\right)\right]_{z=\sqrt{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{1/2}}^{z=1} dx\,dy$$

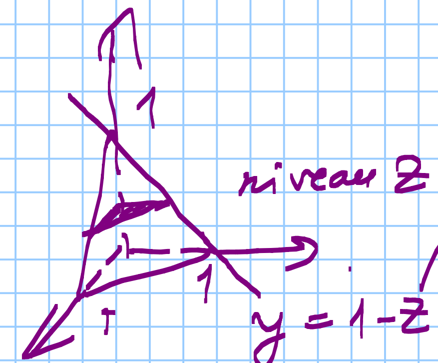
$$= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(3(\underbrace{x^2+y^2}_{r^2})+1) - (3+1)(\underbrace{x^2+y^2}_{r^2})^{3/2}\right)dx\,dy$$

$$= \int_{r=0}^{1}\int_{t=0}^{2\pi}\left[(3r^2+1) - 4r^3\right] r\,dr\,dt$$

$$= 2\pi\int_0^1 (3r^3+r-4r^4)\,dr = 2\pi\left[\frac{3r^4}{4}+\frac{r^2}{2}-\frac{4}{5}r^5\right]_0^1$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right] = 2\pi\, \frac{3\cdot 5 + 1\cdot 10 - 4\times 4}{20} = \boxed{\frac{9}{10}\pi}$$

$\boxed{4}$ $F(x,y,z) = (2xy,\ 8xz,\ 4yz)$

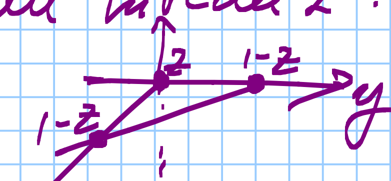


$$\operatorname{div} \vec{F} = 2y + 0 + 4y = 6y$$

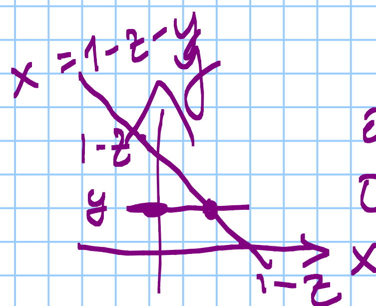
$$I = \iint_\Sigma 2xy\,dy\,dz + 8xz\,dx\,dz + 4yz\,dx\,dy$$

$$= \iiint 4y\,dx\,dy\,dz$$

au niveau z :



$$= \int_0^1 \left(\iint y\,dx\,dy \right) dz$$



$0 \le x \le$

$0 \le y \le 1-z$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-z} y \int_0^{1-z-y} dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} y(1-z) + y^2\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}(1-z) + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-z} dz = \int_0^1 \frac{5(1-z)^3}{6}\,dz = -\frac{5}{6} \left[\frac{(1-z)^4}{4} \right]_0^1 = \boxed{\frac{5}{24}}$$

$\boxed{5}$ à faire soi-même.