Math 5. Cours 1

Chapitre 1 Algèbre linéaire. Rappels

1.1 Bases et dimension

une fonction $E \to F$ est une application qui à tout élément de E associe au plus un élément de F.

Où $E = \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3 \ldots$

et $F = \mathbb{R}$ - à valeurs réelles (fonction scalaire)

$\mathbb{R}^m$ $m > 1$

Les éléments de $\mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3)$ sont des vecteurs qu'on peut additionner et aussi multiplier par un scalaire (un nombre réel).

On dit que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_k$ forment une famille libre si toute combinaison linéaire à coeffts non-nulle de ces vecteurs est nécessairement non-nulle. Autrement dit si

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$$

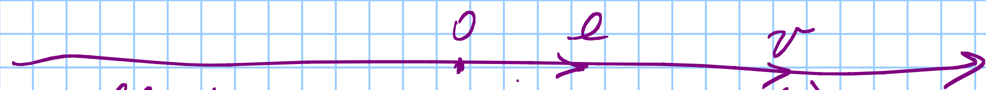
alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$

Notion de dimension:

Dans un espace vectoriel la dimension c'est le nombre maximal de vecteurs dans une famille libre.

On appelle une base les éléments de la famille libre de taille maximale

– **Dans $\mathbb{R}$** – la droite. Dès qu'on choisi un vecteur, notons le e. tout autre vecteur est un multiple de e, donné par un scalaire:



En effet, si on considère

$$\alpha \cdot e + \beta v = 0$$

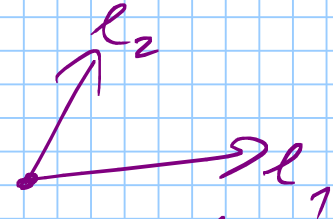
il existe une solution $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. En effet, α, β sont que 0 a dimension est 2 mais on parle de l'espace de dim 1 pas 2, alors $v = -\frac{\alpha}{\beta} e$

$-\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}$ – un scalaire

Du coup on identifie l'espace de dimension 1 avec des scalaires.

– **Dans $\mathbb{R}^2$** on peut choisir n'importe quels deux vecteurs non-colinéaires pour avoir une base.

e_1, e_2



n'importe quel vecteur v de E - espace de dimension 2 est une combinaison linéaire de ses deux vecteurs car

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma v = 0$$

a pour α, β, γ des nombres non-tous nul (en particulier $\gamma \neq 0$)

$$v = -\frac{\alpha}{\gamma} e_1 - \frac{\beta}{\gamma} e_2$$

Donc, v est donné par deux nombres : $-\frac{\alpha}{\gamma}, -\frac{\beta}{\gamma}$

et on identifie les vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ avec les couples de nombres.

Les vecteurs e_1, e_2 du coup correspond au couples $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

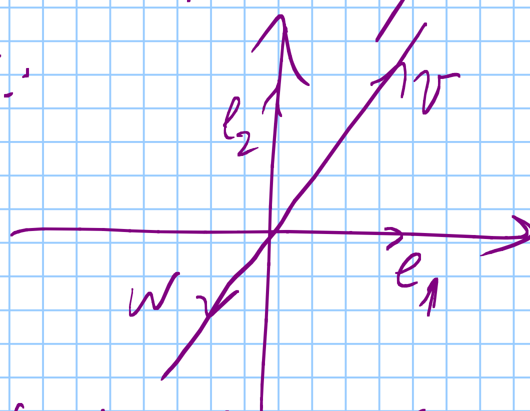
et tout autre vecteur s'écrit comme

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

$\boxed{1.2}$ Sous-espace vectoriel $X \subset E$ est un sous-ensemble non-vide t.q. $\forall\ v, w \in X$

$$av + bw \in X \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R}$$

Exemple dans $\mathbb{R}^2$: Droite passant par 0



$y = kx$

$v = (x_1, k\cdot x_1)$

$w = (x_2, k\cdot x_2)$

$$(ax_1, akx_1) + (bx_2, bkx_2) = (ax_1 + bx_2, k(ax_1 + bx_2))$$

$av + bW$ est aussi sur la droite

Pourquoi par l'origine ?

- deux vecteurs opposés sur la même droite - leur somme est 0

Toute somme doit être dans le ssespace

Eqn. d'une droite $\alpha x + \beta y = 0$

(si $\beta \neq 0$ on a $y = \frac{\alpha}{\beta} x$, $k = \frac{\alpha}{\beta}$, $y = kx$

et si $\beta = 0 \longrightarrow x = 0$ - une droite donné par le vecteur-directeur e_2

1.3 Espace v. euclidien

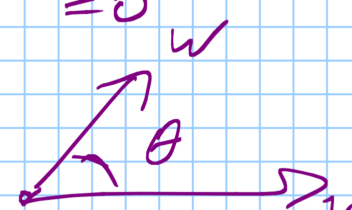
: si en plus de +, et multiplication par un scalaire on a produit de vecteurs:

$$E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v, W \longmapsto \langle v, W \rangle$$

On dit que deux vecteurs sont orthogonals si leur produit scalaire est 0.

$\langle v, W \rangle = 0$



$\langle v, W \rangle = |v| \cdot |W| \cdot \cos\theta$

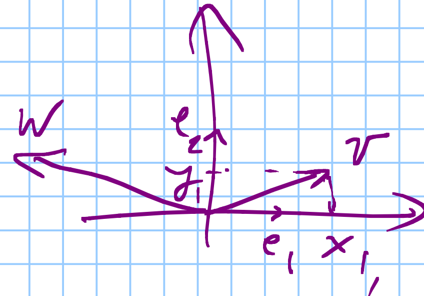
$\Rightarrow \langle v, v \rangle = |v| \cdot |v| \cos 0 = |v|^2$

Une base canonique: e_1, e_2 t.q. $|e_1| = |e_2| = 1$ et $e_1 \perp e_2$

Dans une base orthonormale: le produit scalaire devient le produit des coordonnées correspondants

$v = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = x_0 x_1 + y_0 y_1$$

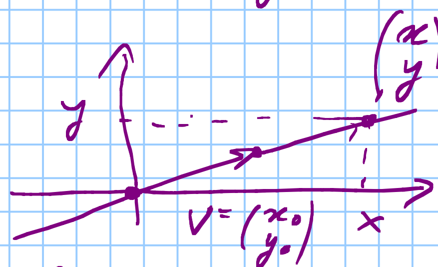


1.4 Equation d'une droite:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \exists \alpha : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \alpha x_0 \\ y = \alpha y_0 \end{cases}$$

si $x_0 \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x}{x_0} \\ y = \underbrace{\dfrac{y_0}{x_0}} x \end{cases}$$



coefficient $k = \dfrac{y_0}{x_0}$ $\quad y = kx$

si $x_0 = 0$ alors on a l'équation de la droite $x = 0$

Pour resumer les deux cas: $\overset{a}{\widehat{y_0}}\, x - \overset{b}{\widehat{x_0}}\, y = 0$

Finalement, $ax + by = 0$ donne une uation d'une droite passant par l'origine

Vecteur-directeur $(-b, a)$ ou $(b, -a)$

Vecteur normal (a, b)

Sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ sont des droites passants par l'origine

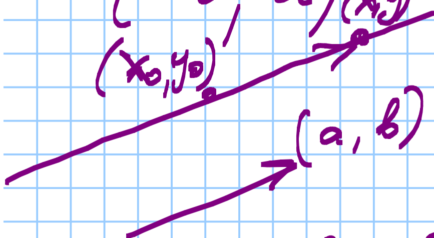
d'équation $ax + by = 0$

($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a^2 + b^2 \neq 0$ i.e. a et b ne peuvent pas être les deux nuls)

Et les droites qui ne passe pas

par origine mais par un pt quelconque ?

- Droite D passant par le pt (x_0, y_0) et de vecteur directeur (a, b) ?
(vecteur normale est par exemple $(-b, a)$ ou $(b, -a)$ ou ...)



Donc pour $\forall$ pt $(x,y) \in D$ on aura le vecteur $(x,y) - (x_0, y_0)$ $\parallel$ au vecteur (a,b) et $\perp$ au vecteur $(-b, a)$

Donc
$$\Big((x,y) - (x_0, y_0)\Big) \cdot (-b, a) = 0$$
produit scalair

l'eqn de la droite D: $\boxed{-bx + ay = \underbrace{-bx_0 + ay_0}_{\text{nombre}}}$

On peut aussi le presenter de façon paramétrique, que $(x,y) - (x_0, y_0)$ est proportion. à (a, b)

Donc il existe un $t \in \mathbb{R}$
$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \boxed{a}t + \boxed{x_0} \\ y = \boxed{b}t + \boxed{y_0} \end{cases}$$
vect. directeur   pt

$\{x, y, t\}$ - réels.

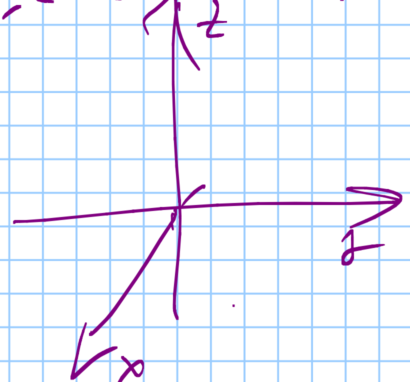
15 Équations de droite et de plan dans $\mathbb{R}^3$

On a 3 vecteurs dans une base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de la base –

$$v = x e_1 + y e_2 + z e_3$$

Il faut 3 nombres $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$!

Sous-espaces. Plan passant par l'origine : $Ax + By + Cz = 0$ avec A, B, C des nombres fixés



Par exemple, $A = B = 0$ $C = 1$ définit le plan (x, y) de l'équation

$$z = 0$$

Dimension d'un sous-espace E ?

- Nombre maximal de vecteurs dans une famille libre de vecteurs dans E
- aussi le nombre de coordonnées nécessaire pour décrire n'importe quel élément de E.

$\dim E$ = dim de l'espace original – Nombre d'équations

Car chaque équation exprime une de coordonnée via les autres.

Pour un plan dans $\mathbb{R}^3$:

dim Plan = $\underset{\dim \mathbb{R}^3}{3} - 1$ équation $Ax+By+Cz=0$

Une droite est de dim 1

En $\mathbb{R}^2$ une droite est donnée par une equation

$\underset{\dim \mathbb{R}^2}{2} - \underset{1 \text{equation}}{1} = 1$

en $\mathbb{R}^3$ — une droite est une intersection de deux plans, c.à.d.

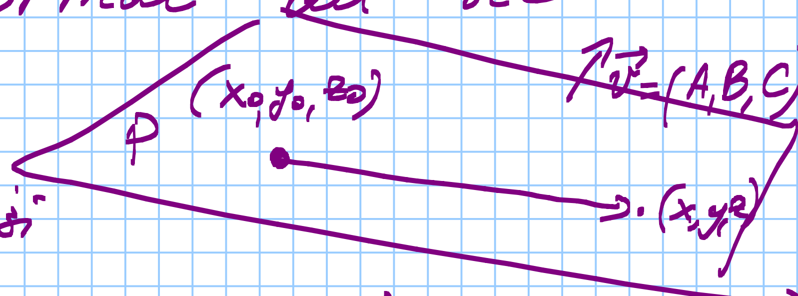
$\begin{cases} Ax+By+Cz=0 \ (*) \\ A'x+B'y+C'z=0 \ (**) \end{cases}$ points d'une droite satisfont

les deux equations en se trouvant dans les deux plans $(*)$ et $(**)$.

Une droite est d'une dimension 1

$\dim \mathbb{R}^3 - 2 \text{ equations} = 1$

Equation d'un plan passant par un pt (x_0,y_0,z_0) et normal au vecteur $\vec{v} = (A,B,C)$



donc $(x,y,z) \in P$ si le vecteur $(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0) \perp (A,B,C)$

$\Rightarrow \langle (x-x_0, y-y_0, z-z_0), (A,B,C) \rangle = 0$ et donc

$\boxed{Ax+By+Cz = Ax_0+By_0+Cz_0}$

Si on a ~~deux vecteurs~~ (v_1, v_2, v_3) et (u_1, u_2, u_3) // au plan et le plan passe par le pt. (x_0, y_0, z_0) comment trouver l'équ paramétrique?

On a
$$\begin{cases} x = \boxed{v_1} t + \boxed{u_1} s + \boxed{x_0} \\ y = v_2 t + u_2 s + y_0 \\ z = v_3 t + u_3 s + z_0 \end{cases}$$

1ier vect. 2ème vect. pt

1.6 Application linéaire:

$A : E \longrightarrow F$ $\quad$ ($E = \mathbb{R}^n$, dim n ; $F = \mathbb{R}^m$, dim m)

t.q. $\forall v, w \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

on a $A(v+w) = A(v) + A(w)$ et $A(\alpha v) = \alpha A(v)$

du coup, dès qu'on sait comment A agit sur les éléments d'une base on sait comment A agit sur n'importe quel vecteur de E

Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$, i.e. $\forall$ vecteur de E $v = xe_1 + ye_2$ dans une base $\{e_1, e_2\}$ on a

$$A(xe_1 + ye_2) = x A(e_1) + y A(e_2)$$

Du coup on aura 4 nombres $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$Ae_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2$$

et $$Ae_2 = a_{21} e_1 + a_{22} e_2$$

Si on connait ces coeffts a_{ij} on sait comment A agit sur n'importe quel vecteur $\rightsquigarrow$ écriture matricielle

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad xe_1 + ye_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et $$A(xe_1 + ye_2) \rightsquigarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x + a_{21} y \\ a_{12} x + a_{22} y \end{pmatrix}$$