1.6. Application linéaire

$u : E \to E$

$\underline{\underline{u}} (a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot u(X) + b \cdot u(Y)$

$u(a e_1 + b e_2) = a \cdot u(e_1) + b u(e_2)$

Moral : Si on sait où vont les vects de base sous u — on sait où va tout autre de E.

$$\begin{cases} u(e_1) = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 \\ u(e_2) = a_{21} e_1 + a_{22} e_2 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ Soit $v = x e_1 + y e_2$

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x + a_{21} y \\ a_{12} x + a_{22} y \end{pmatrix}$$

$u(v) = u(x e_1 + y e_2)$

$= x\, u(e_1) + y\, u(e_2) = x a_{11} e_1 - x a_{12} e_2$

$+ y a_{21} e_1 + y a_{22} e_2 .$

$= (x a_{11} + y a_{21}) e_1 + (x a_{12} + y a_{22}) e_2$

Exo 10.1 On a $h\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

$h\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

Base canonique dans un esp. euclidien (esp. vect avec un produit scalaire)

$\{e_1, e_2\}$ - une base canonique $\Leftrightarrow$

$|e_1|=|e_2|=1$, $\langle e_1, e_2\rangle=0$

On cherche la matrice de h dans la base canonique:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix} \quad \text{E.g.}$$

h a $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ pour cette matrice

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+b=2\\ 2c+d=-3\\ a-b=3\\ c-d=-1\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & -1\end{pmatrix} \Big| \times\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Big| \times\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{AD-BC}\begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

Chapitre 2 Fonction de plusieurs variables

2.1 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Ex.1 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonction de deux variables à valeurs réelles

$$(x,y) \longmapsto e^x \cos(x^2+y)$$

$g : \underline{\underline{\mathbb{R}}} \to \mathbb{R}^3$ l'image est une courbe

$$t \longmapsto (t^2, 2t, t+1)$$

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = t^2 \text{ et } y = 2t \text{ et } z = t+1\}$$

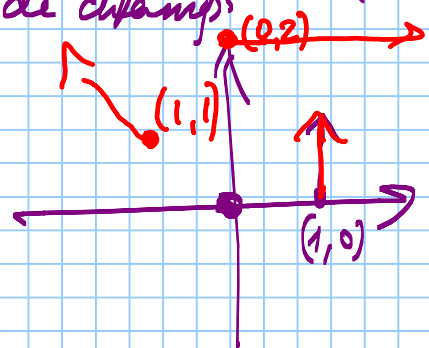
$\vec{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - champs de vecteurs

c.a.d. à tout pt de domaine de déf. de $\vec{V}$ dans $\mathbb{R}^2$

on associe un vecteur de $\mathbb{R}^2$

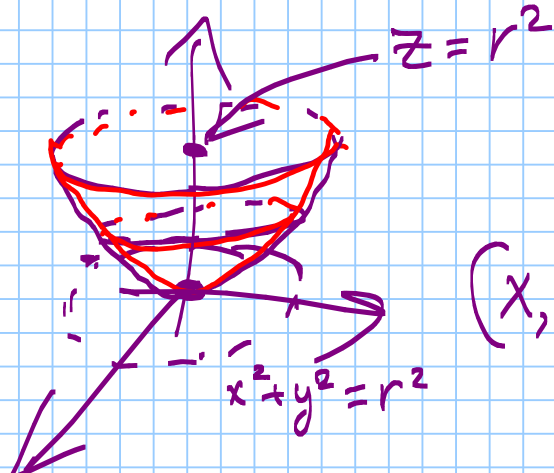
$$(x,y) \longmapsto \big(\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{f(x,y)}},\ \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{h(x,y)}}\big)$$

Exemple de champs : $(x,y) \longmapsto (y,x)$



$$S:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

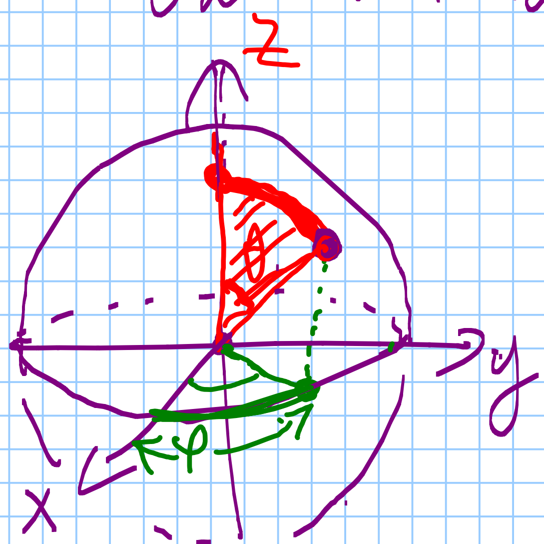
$$(s,t) \longmapsto \big(f_1(s,t), f_2(s,t), f_3(s,t)\big)$$



une surface : une paraboloïde

$$(x,y) \longmapsto (x, y, x^2+y^2)$$

On a bien une sphère unitaire

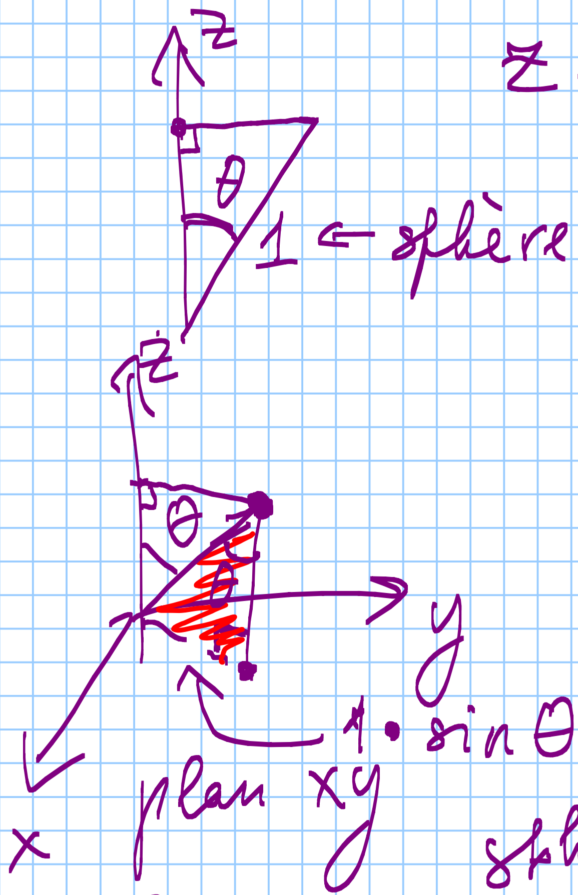


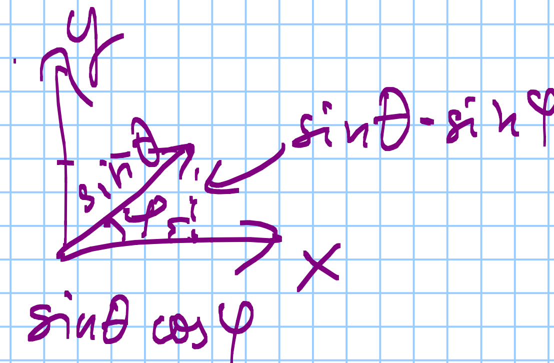
θ – l'angle avec l'axe Oz

φ – l'angle avec l'axe Ox

$\varphi \in [0, 2\pi[\ ,\ \theta \in [0, \pi]$

$z = \cos\theta$





sphère de rayon r:

$$(\theta, \varphi) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

une surface de $\mathbb{R}^3$

2.2 Dérivées partielles

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ $f(x,y) = x^2 y$ par ex: $\in \mathbb{R}$

dérivées en direction de x ou de y dans un pt donné (x_0, y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Aussi notation: $f'_x(x_0, y_0)$, $\partial_x f$ ....

$$f(x,y) \xrightarrow{\partial/\partial x} f'_x \xrightarrow{\partial/\partial x} f''_{xx}$$

$$f'_x \xrightarrow{\partial/\partial y} f''_{xy} = f''_{yx}$$

$$f(x,y) \xrightarrow{\partial/\partial y} f'_y \xrightarrow{\partial/\partial x} f''_{xy}$$

$$f'_y \xrightarrow{\partial/\partial y} f''_{yy}$$

thm de Schwarz

<u>Exemple</u>

$$e^{\cos(x+x^2y)} \xrightarrow{\partial x} e^{\cos(x+x^2y)} \cdot (-\sin(x+x^2y))(1+2xy)$$

$$e^{\cos(x+x^2y)} \xrightarrow{\partial_y} e^{\cos(x+x^2y)} (-\sin(x+x^2y)) \cdot x^2$$

$\boxed{2.3}$ Matrice Jacobienne. Gradient

$$f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

$$(x_1, \dots x_p) \longmapsto (f_1(x_1, \dots x_p), \dots, f_q(x_1, \dots x_p))$$

<u>Exemple</u> : $f(x,y) = (\underbrace{x+y}_{f_1}, \underbrace{x^2 \cos xy}_{f_2})$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

Gradient

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix}(x,y)$$ champs de vecteurs

$\boxed{2.4}$ Formule de Taylor

Idée : faire une approximation par un $\boxed{\text{polynôme}}$

Rappel

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$

$k \neq 0$ P est de degré $i \geq 0$

$$P(x,y) = a_{00} + a_{01} x + a_{10} y + a_{11} xy + a_{12} xy^2 + \dots + a_{kn} x^k y^n$$

Rappel 2 : petit o on écrit

$g(x) = o(x^n)$ en 0 si

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0$$

par exemple

$$x^4 = o(x) \text{ car } \frac{x^4}{x} = x^3 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

En dim 1 — En pt. a une fn f

$$\boxed{f(a+t) = f(a) + f'(a)t + \frac{f''(a)}{2}t^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}t^n + o(t^n)}$$

Rq. $f(a), f'(a) \dots f^{(n)}(a)$ — constants

$f^{(n)}$: n-ème dérivé

ce sont des coeffs du polynôme de Taylor en variable t.

Par exemple : $f(x) = \cos x$

au pt $a = \frac{\pi}{2}$ on a

$x = a + t$

		En pt $\pi/2$
f	$\cos x$	$\cos \pi/2 = 0$
f'	$-\sin x$	$-\sin \pi/2 = \boxed{-1}$
f''	$-\cos x$	$-\cos \pi/2 = 0$
f'''	$\sin x$	$\sin \pi/2 = 1$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = 0 + (-1)t + 0 \cdot t^2 + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$$

II.9

$$f(a+t) = f(a) + \boxed{f'(a)t} + \underbrace{\frac{f''(a)}{2!}t^2}$$
$$+ \frac{f'''(a)}{3!}t^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}t^n + o(t^n)$$

dim 2 $f(x,y)$ au voisinage de (a,b)

$x = a+t, \quad y = b+s$

Formule de Taylor en 2 variables en pt (a,b) :

$$\boxed{\begin{aligned} f(a+t, b+s) &= f(a,b) + f'_x(a,b)\cdot t + f'_y(a,b)\cdot s + \\ &+ \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)t^2 + 2\underbrace{f''_{xy}(a,b)}\,t\cdot s + f''_{yy}(a,b)s^2\right) \\ &+ \frac{1}{3!}\left(f'''_{xxx}(a,b)t^3 + 3f'''_{x^2y}(a,b)t^2s + 3f'''_{xy^2}(a,b)ts^2 + f'''_{yyy}(a,b)s^3\right) \\ &+ o\left(\left(\sqrt{t^2+s^2}\right)^3\right) \end{aligned}}$$

$\sqrt{t^2+s^2} \to t,s$

$t=0 \quad o\left(\sqrt{s^2}^3\right) = o(s^3)$

3 façons $xxy, \; xyx, \; yxx$

$\boxed{2.5}$ Extrema locaux et globaux

Déf : Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction sur une partie $A \subset \mathbb{R}^p$ ($\mathbb{R}^2$).

1. On dit que f admet un maximum (resp minimum) global au point $\alpha \in A$ si pour $\forall$ pt $X \in A$ on a $f(X) \leq f(\alpha)$ (resp $f(X) \geq f(\alpha)$)
respectivement

2. On dit que f admet un max (resp. min) local au pt $\alpha \in A$ si on peut trouver un nombre $r > 0$ t.q.

$\forall X \in A$ et $\|X - \alpha\| < r$ entraîne $f(x) \leq f(\alpha)$