Math 5 Cours 3

Chapitre 3 Extrema

3.1 Extrema locaux et globaux

Déf. Soit $f: A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^p (\mathbb{R}^2)$

1. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) global au point $\alpha \in A$ si pour tout point $X \in A$ on a $f(X) \leq f(\alpha)$ (resp. $f(X) \geq f(\alpha)$).

2. On dit que f admet un max (resp. min) local au pt. $\alpha \in A$ si on peut trouver un nombre $r > 0$ t.q. $X \in A$ et $\|X - \alpha\| < r$ entraîne $f(X) \leq f(a)$ (resp. $f(X) \geq f(\alpha)$)

3.2 Rappel en dim 1

$f: \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$ une fonction d'une variable.

Chercher les max et min locaux sur I: – On calcule $f'(x)$ et trouve les pts. a t.q. $f'(a) = 0$.

– On calcule $f''(x)$ et si $f''(a) < 0$ alors on a un max et si $f''(a) > 0$ on a un min.

(si $f''(a) = 0$ on ne peut pas conclure
Pourquoi ? — Formule de Taylor
en a : $x = a + t$

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + \frac{f''(a)}{2}t^2 + o(t^2)$$

On se demande quand $f(a) \geq f(a+t)$
pour tout $a+t$ autours de a, c. à d. pour tout $|t|$ suffisamment petits.
i.e. $f(a+t) - f(a)$ doit être ≤ 0, pour $\forall t$ petits
Or $f(a+t) - f(a) = f'(a).t + \frac{f''(a)}{2}t^2 + o(t^2)$

On a $|f'(a)t| \gg \left|\frac{f''(a)}{2}t^2 + o(t^2)\right|$ si $f'(a) \neq 0$

alors le signe de $f(a+t) - f(a)$ depend de signe de $f'(a).t$ qui depend de signe de t.
Donc avec t peut être positif ou négatif
(si $f'(a) \neq 0$) Marche pas !

Pour avoir un max en a il faut que $f'(a) = 0$!

Du coup, on a :

$$f(a+t) - f(a) = 0 \cdot t + \frac{f''(a)}{2}t^2 + o(t^2)$$

et comme $t^2 \gg o(t^2)$ (définition de $o(t^2)$)

On a aussi $\left|\frac{f''(a)}{2}t^2\right| \gg o(t^2)$ pour t suffisam. petit.

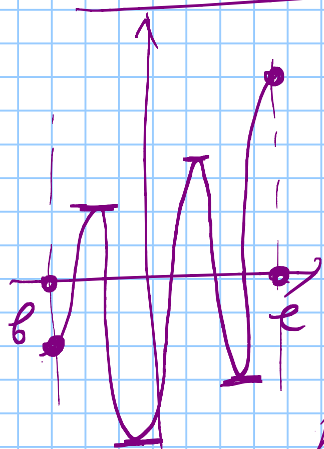
finalement $f(a+t) - f(a) > 0$ si $f''(a) > 0$

et $f(a+t) - f(a) < 0$ si $f''(a) < 0$ (1)

(1) on a un min en a.

(2) on a un max en a.

Max et min globaux sur un intervalle $[b,e]$



- Trouver les points de I où $f'(x)$ s'annule: $a_1, a_2 \ldots$
- Calculer dans ses pts: $f''(a_1), f''(a_2)$ et si $f''(a_i) < 0$ alors f a un max local en a_i
si $f''(a_i) >$ — min local
- Pour trouver le max (min) global de f sur l'intervalle $[b, e]$ on prend la valeur max (min) parmi $f(b), f(e), f(a_1) \ldots f(a_n)$.

$\boxed{3.3}$ En dim 2 Extremum local en $(a,b) \in K$

compact = fermé et borné ← peut trouver un disque qui le contient

tout les pts de la frontière sont dedans K

	dim 1	dim 2
Domain	Interval	compact
points critiques	$f'(a) = 0$	$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$
condition sur les dérivées secondes	$f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0)$	?

Thm. des extrema sur un compact | III-4

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$, et $f : K \to \mathbb{R}$ alors K admet un max global et un min global sur K.

Def Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $A \subset \mathbb{R}^p$. On dit que $a \in A$ est un pt critique de f si toutes les dérivées partielles s'annulent en a.

Thm. Condition necessaire d'extremum local: Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 définie sur $A \subset \mathbb{R}^p$. Si f admet un max (ou un min) local en pt $a \in A$, alors a est un pt critique de f.

Reprenons une formule de Taylor à l'ordre 2 pour une fonction de deux variables en pt (a, b):

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \cancel{h \partial_x f(a,b) + k \cdot \partial_y f(a,b)}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 \right) + o(h^2 + k^2)$$

$f(a+h, b+k) > f(a,b)$

$\forall\ h,k$ suffisam. petits

Si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h \cdot k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 > 0$$

$\forall h,k$

et (a,b) est un min.

Notations $R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

On a une forme quadratique :

$Q(h,k) = R h^2 + 2S hk + T \cdot k^2$

En fonction de R, S et T

Q peut être positive pour $\forall h, k \to$ min

négative — " — $\to$ max

ou pas toujours $\to$ pt. selle (côl)

$$Rh^2 + 2Shk + Tk^2 \overset{R \neq 0}{=} R\left(h^2 + 2\frac{S}{R}hk + \frac{T}{R}k^2\right)$$

(si $R=0$ et $T=0$ évidement le signe de $2Shk$ dépende de h et k donc on a un selle)

$$= R\left(h^2 + 2h \cdot \left(\frac{S}{R}k\right) + \frac{S^2}{R^2}k^2 - \frac{S^2}{R^2}k^2 + \frac{T}{R}k^2\right)$$

$$= R\left(\underbrace{\left(h + \frac{S}{R}k\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{TR - S^2}{R^2}k^2}_{\substack{\geq 0 \text{ si } TR \geq S^2 \\ < 0 \text{ si } TR < S^2}}\right)$$

≥ 0 si $TR \geq S^2$ $\leftarrow$ pt max si $R<0$, min si $R>0$

<0 si $TR<S^2$ $\leftarrow$ pt. selle

34) **Recette de calcul des extrema locaux :**

- Déterminer des pts où f n'est pas de classe C^1 et regardez les valeurs de f en ces pts

Par exemple, $f(x,y) = 1-\sqrt{x^2+y^2}$ admet un max en pt $(0,0)$ qui ne se trouve pas parmi les pts critiques

- Recherchez les pts critiques
- Étudier R, S, T en pts critiques

Exemple : $f(x,y) = 2xy^2 + x^2 + 2y^2$ sur $\mathbb{R}^2$

pts critiques

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 + 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + x = 0 \\ y(x+1) = 0 \end{cases}$$

$y = 0 \nearrow x=0$

ou $x = -1 \Rightarrow y^2 = 1$

alors pts critiques : $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$

	$(0,0)$	$(-1,-1)$	$(-1,1)$
$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$	2	2	2
$S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4y$	0	-4	4
$T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x+4$	4	0	0
$RT - S^2$	8	-16	-16
signe de R	$+1$		
nature de pt critique	min	selle	selle

Les extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$?
($\mathbb{R}^2$ n'est pas un compact)

$f(x,y) = 2xy^2 + x^2 + 2y^2$ n'a pas de max global car

pour $y \to +\infty$ et $x = 0$ on a

$f(x, y) \to +\infty$

Pas de min global non-plus
soit $x = -2$ et $y \to +\infty$ on a

$$f(-2, y) = -4y^2 + (-2)^2 + 2y^2 = -2y^2 + 4 \to -\infty$$

Extrema sur un compacte ?

calculer les extrema locaux et comparer avec les extrema sur le bord.

Sur le bord — c. a. d. de la fonction restrainte sur l'eqn. du bord

Exemple à considerer ulterieurement.

3.5 Point de vue matricielle

matrice Hessienne d'une fonction —

matrice de ces dérivées secondes
$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial}$, $T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
valeurs en pt (a,b) :

$$\operatorname{Hess} f(a,b) = \begin{pmatrix} R & S \\ S & T \end{pmatrix}$$

on dit que la matrice est <u>signe-défini</u> si ses valeurs-propres ont la même signe.

Forme quadratique correspondant à la matrice symétrique :

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & S \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Rx + Sy \\ Sx + Ty \end{pmatrix}$$

$$= x(Rx + Sy) + y(Sx + Ty)$$

$$= Rx^2 + Sxy + Sxy + Ty^2 = Rx^2 + 2Sxy + Ty^2$$

<u>Ses valeurs propres</u> :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = R + T \\ \lambda \cdot \mu = RT - S^2 \end{cases}$$

si $RT - S^2 > 0$ alors λ et μ ont le même signe.
- c'est + si $R + T > 0$ (ou si $R > 0$)
- c'est − si $R < 0$ ($\Rightarrow R + T < 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = R + T - \lambda \\ \lambda(R + T - \lambda) = RT - S^2 \quad (*) \end{cases}$$

$(*)$ $\lambda^2 - \lambda(R+T) + RT - S^2 = 0$

l'équation quadratique avec 2 solution $\lambda_{1,2}$ — un sera λ l'autre μ :

en effet si λ et μ sont de racines d'une équation quadratique

$$x^2 - \underline{(R+T)}\,x + \underline{\underline{RT-S^2}} = 0$$

on a (thm de Vieta)

$$(x-\lambda)(x-\mu) = x^2 - \underline{(\lambda+\mu)}\,x + \underline{\underline{\lambda\mu}}$$

Donc $\begin{cases} \lambda+\mu = R+T \\ \lambda\mu = RT-S^2 \end{cases}$

Quand on étudie les dérivées secondes d'une fonction de deux variables dans une formule de Taylor à l'ordre 2 on a affaire à des formes quadratiques

$$Q(x,y) = Rx^2 + 2Sxy + Ty^2$$

$Q(x,y)$ est sign. définie si les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ S & T \end{pmatrix}$ ont le même signe. ($+$ ou $-$) ce qui se passe si $RT-S^2>0$ et c'est $+$ si $R+T>0$

et $-$ si $R+T<0$

Exercice 18.

Calculer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Ecrire la forme quadratique correspondante et trouver ses extrema.

III-10

Valeurs propres : on cherche λ t.q.

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

(car les valeurs propres sont t.q. l'équ. matricielle suivante a une solution nonnulle :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 5-\lambda \end{pmatrix}$ soit colinéaire

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0)$$

$$(1-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 0$$

$$5 - 6\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = 3 \pm \sqrt{9-1}$$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix} R & S \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$RT - S^2 = 1 \cdot 5 - (-2)^2 = 1$$

$$R + T = 6$$

Critère d'extrema $RT - S^2 > 0$ et $R > 0$ $\Rightarrow$ un min.

$$Q(h,k) = 1 \cdot h^2 + 2 \cdot (-2)\, hk + 5 \cdot k^2$$

$$= h^2 + 2 \cdot h \cdot (-2k) + (-2k)^2 - (-2k)^2 + 5k^2$$

$$= (h-2k)^2 + k^2$$ – toujours positive (ou 0)

On a le min en pt. $h = 2k = 0$

car dans les pts voisins $Q(h,k)$ sera > 0

Conclusion : Pour une forme quadratique – le min ou le max se trouve en $(0,0)$ (sinon c'est un pt. selle en $(0,0)$)