# Math5 – DM2 – Corrigé 1.12.2020

**Exercice 1.** Cycloïde

Le but de cette exercice est d'étudier une cycloïde. La cycloïde est une courbe qui décrit le trajectoire d'un point fixé à un cercle de rayon $R$ qui roule sans glisser sur une droite (le chewing-gum collé sur le pneu d'une roue de vélo décrit une cycloïde).

On concidère une paramétrisation d'un arc d'une cycloïde $C$ suivante

$$x = R(t - \sin t),\ y = R(1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$$

3 1. Calculer les valeurs $(x, y)(t)$ des points de la cycloïde $C$ pour les valeurs de $t$ suivantes :

$$t_1 = \pi/3, t_2 = \pi/2, t_3 = \pi, t_4 = 3\pi/2$$

et les dessiner sur le plan $xy$.

2. Dessiner les vecteurs tangents $(x', y')(t)$ dans ces quatre points.

2 3. Trouver les équations des droites tangentes dans ces quatre points.

2 4. Calculer la longueur de la cycloïde $C$.

2 5. Calculer l'intégrale curviligne sur la cycloïde $C$ :

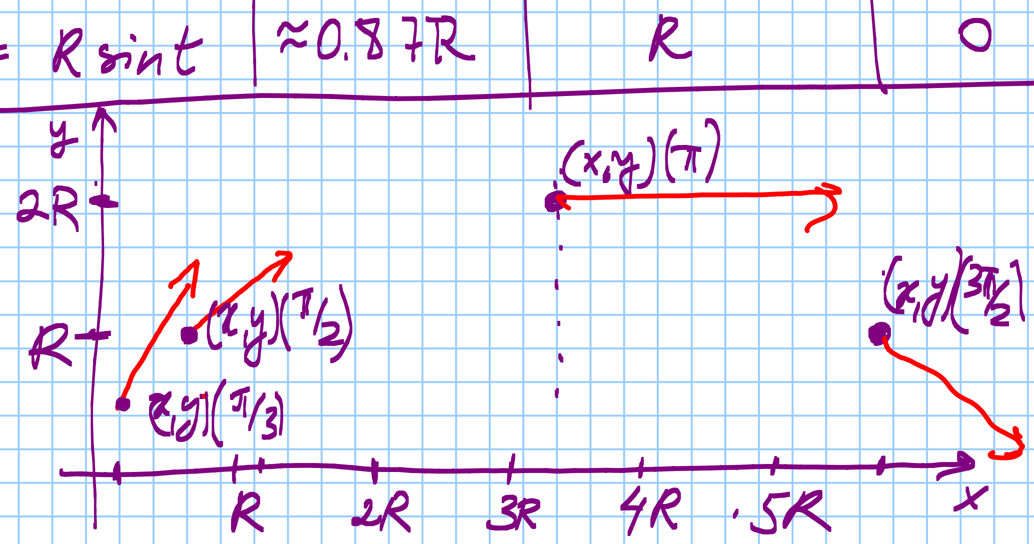
$$\int_C (2R - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

2 6. On remarque que entre $t = 0$ et $t = 2\pi$, la variable $x$ parcours de 0 à $2\pi R$. Alors l'aire sous l'arc de la cycloïde :

$$\int_0^{2\pi R} y\mathrm{d}x$$

Calculer la.

| $t$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin t$ | $\sqrt{3}/2 \approx 0.87$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $\cos t$ | $1/2$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $x = R(t - \sin t)$ | $\approx R(\pi/3 - 0.87)$ $\approx 0.18R$ | $R\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ $\approx 0.57R$ | $R(\pi - 0)$ $\approx 3.14R$ | $R\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right)$ $\approx 5.71R$ |
| $y = R(1 - \cos t)$ | $R\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ $\approx R/2$ | $R(1-0) = R$ $= R$ | $R(1+1)$ $= 2R$ | $R(1-0)$ $= R$ |
| $x' = R(1 - \cos t)$ $(= y)$ | $R/2$ | $R$ | $2R$ | $R$ |
| $y' = R\sin t$ | $\approx 0.87R$ | $R$ | $0$ | $-R$ |



3. Eqn. de droite tangente : $\dfrac{x-x_0}{x'} = \dfrac{y-y_0}{y'}$ pour $x' \neq 0,\ y' \neq 0$

$t = \pi/3$ : $\dfrac{x - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R}{R/2} = \dfrac{y - R/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \Rightarrow \sqrt{3}x - \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{3}{2}\right)R = y - R/2$

$$\boxed{y = \sqrt{3}x - \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3} - 2\right)R}$$

$t = \pi/2$ : $x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)R = y - R \Rightarrow \boxed{y = x - \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)R}$

$t = \pi$ : $\boxed{y = 2R}$

$t = 3\pi/2$ : $\dfrac{x - R\left(3\pi/2 + 1\right)}{R} = \dfrac{y - R}{-R}$

$$\boxed{y = -x + R\left(\frac{3\pi}{2} + 2\right)}$$

4. $$L(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(R(1-\cos t)\right)^2 + (R\sin t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin t}\, dt$$

$$= R\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}$$

$$1 - \cos t = \frac{2 - e^{it} - e^{-it}}{2} = -2\left(\frac{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}}{2}\right)^2 = -2\sin^2\frac{t}{2}$$

$$= R\int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 2R\cdot 2\int_0^{\pi} \sin u\, du = -4R\left[\cos\pi - \cos 0\right]$$

$$= \boxed{8R}$$

5. $$\int_C (2R-y)\,dx + x\,dy$$
$$= \int_0^{2\pi} R\left(2 - (1-\cos t)\right) R(1-\cos t)\,dt + R(t - \sin t) R\sin t\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2 \left(2 - 2\cos t - (1-\cos t)^2 + t\sin t - \sin^2 t\right) dt$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(2 - 2\cos t - 1 + 2\cos t \overbrace{- \cos^2 t + t\sin t - \sin^2 t}^{1}\right) dt$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ u}}{t}\, \underset{\substack{\uparrow \\ v'}}{\sin t}\, dt = R^2 \left\{ \left[-t\cos t\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t\, dt \right\}$$

$u' = 1$
$v = -\cos t$

$$= \boxed{-2\pi R^2}$$

6. $$\begin{pmatrix} \text{aire} \\ \text{sous } C \end{pmatrix} = \int_0^{2\pi R} y\, dx = R^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)(1-\cos t)\, dt$$

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1-\cos t) \end{cases} \qquad x \in [0, 2\pi R] \Rightarrow t \in [0, 2\pi]$$

$$dx = R(1-\cos t)\, dt$$

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \text{aire} \\ \text{sous } C \end{pmatrix} = R^2 \left( \int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi} \cos t\, dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt \right)$$

$$= R^2 \left[ \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}\, dt - 2\int_0^{2\pi} \cos t\, dt + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{2}\, dt \right.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \text{aire} \\ \text{sous } C \end{pmatrix} = 3\pi R^2}$$

**Exercice 2.**
Calculer l'intgrale curviligne sur un circuit fermé $ABCDA$ :

$$\oint_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$$

où $ABCDA$ est le périmetre du carré des sommets $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$.


Rq: On ne peut pas utiliser le thm. de Green-Riemann car la fonction $|x|+|y|$ n'est pas défini en $(0,0)$.

On calcul l'intégrale sur quatres segments:

1. $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ sur la droite $y = 1 - x$

$$t \mapsto \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = -dt \\ dy = dt \end{cases} \qquad \begin{cases} |x| = 1-t \\ |y| = t \end{cases}$$

1

2. $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ sur la droite $y = x+1$

1 $t \mapsto \begin{cases} x = -t \\ y = 1-t \end{cases}$ $\begin{cases} dx = -dt \\ dy = -dt \end{cases}$ $\begin{cases} |x| = t \\ |y| = 1-t \end{cases}$

3. $\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ sur la droite $y = -x-1$

1 $t \mapsto \begin{cases} x = -1+t \\ y = -t \end{cases}$ $\begin{cases} dx = dt \\ dy = -dt \end{cases}$ $\begin{cases} |x| = 1-t \\ |y| = t \end{cases}$

4. $\gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ sur la droite $y = x-1$

1 $t \mapsto \begin{cases} x = t \\ y = t-1 \end{cases}$ $\begin{cases} dx = dt \\ dy = dt \end{cases}$ $\begin{cases} |x| = t \\ |y| = 1-t \end{cases}$

1 $$\int_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_0^1 \Big(\underbrace{0}_{\gamma_1} - \underbrace{\frac{2}{1}}_{\gamma_2} + \underbrace{0}_{\gamma_3} + \underbrace{\frac{2}{1}}_{\gamma_4}\Big)\, dt = 0$$

**Exercice 3.** Le potentiel d'un champs

Si le champs $V(x,y) = (P,Q)(x,y)$ est un champs de gradient de la fonction $f(x,y)$, la fonction $f$ est appelée le potentiel de $V$. Soit

$$P(x,y) = x^4 + 4xy^3 \text{ et } Q(x,y) = 6x^2y^2 - 5y^4.$$

Vérifier la condition necessaire pour que $V$ soit un champs de gradient et trouver son potentiel.

Ici $\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$

Alors $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ - la condition necessaire est satisfaite 1

On cherche $f(x,y)$ t.q. $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$

On a (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = x^4 + 4xy^3$ (1) $\Rightarrow f(x,y) = \int x^4 + 4xy^3 dy$

(2). $\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y^2 - 5y^4$ $= \underline{\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + \varphi(y)}$ 1

(2) $\Rightarrow \frac{\partial\left(\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + \varphi(y)\right)}{\partial y} = 6x^2y^3 + \varphi'(y) = 6x^2y^2 - 5y^4$

$\Rightarrow \varphi(y) = \int -5y^4 dy = -y^5 + const$ 1

Alors $\boxed{f(x,y) = 2x^2y^3 + \frac{x^5}{5} - y^5 + const}$ 1