Université Claude Bernard – Lyon 1

Math IV: ANALYSE Examen, 16 juin 2009

Durée : 2 heures

Calculatrices et tous documents sont interdits

Exercice I.

(1) Dessiner les boules ouvertes de $\mathbb{R}^2$ de centre $(1,2)$ et de rayon $r = 1$ pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

On note ici les boules correspondantes B_1 et B_∞.

(2) Est-ce que le bord de la boule B_1 est un ensemble ouvert, fermé ou ni l'un ni l'autre dans $\mathbb{R}^2$? Même question pour la boule B_∞. Est-ce que la réponse depend de la norme choisi ?

Rappel : $\overline{B}(A,r) := \{X \in \mathbb{R}^p \mid d(A,X) < r\}$ est appelée boule ouverte de centre A et de rayon r. La distance $d(A,X)$ doit être explicitée pour compléter la définition. On peut avoir une distance induite par une norme, par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, par les normes $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$, $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$, où (x,y) est un point de $\mathbb{R}^2$. Dans le cas de la norme euclidienne la boule est juste un disque $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$.

Exercice II.

(1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = a$.

Est-il possible de choisir $a \in \mathbb{R}$ de façon à ce que f soit continue au point $(0,0)$?

(2) Même question pour g définie par $g(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $g(0,0) = a$.

Exercice III.

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$: $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2+1})$

(1) Calculer les dérivées partielles premières de f.

(2) Déterminer la norme du champs de gradient $\nabla f(x,y)$. Montrer qu'elle est constante sur le cercle $x^2+y^2 = r^2$, où r est un réel strictement positif fixé.

(3) Trouver le vecteur V de norme $\|V\| = 1$ tel que la dérivée directionnelle $D_{\overrightarrow{V}} f(3,4)$ est maximale.

(4) Donner l'équation du plan tangent au graphe de f au point $P_0 = (2,2,\ln(3))$.

Exercice IV.

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2).$$

(1) Déterminer les points critiques de F sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Etudier les extrema locaux de F sur $\mathbb{R}^2$.

(3) On considère le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \ x^2+y^2 \leq 1\}$.

(a) Justifier l'existence d'un maximum absolu M et d'un minimum absolu m pour la restriction de la fonction F à D.

(b) Soit $(x,y) \in D$. Démontrer que si $F(x,y) = M$ ou si $F(x,y) = m$, alors $x^2+y^2 = 1$.

(c) Etudier la fonction $t \mapsto F(\cos t, \sin t)$. Déterminer les nombres M et m.

Exercice V. (Chapitre VI)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et

$$\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \overrightarrow{V}(x,y) = (x+ay, 2x+4y).$$

(1) Déterminer a pour que l'on ait $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V}) = 0$.

(2) Pour ces valeurs de a, déterminer une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} g$.

(3) Trouver les extréma (éventuels) de la fonction g.