

A rendre dans ma boîte aux lettres (N°62) avant 16h, le Mardi, 12 mai 2009

**Exercice I.** Déterminer l'intérieur, la frontière et l'adhérence des ensembles suivants (aucune justification n'est demandée). Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés, compacts, connexes par arc, en justifiant brièvement la réponse.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

$$B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^*\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \text{ et } y \leq 1 - x^2\}.$$

**Exercice II.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Si la distance  $d$  est induite par une norme, quelle est cette norme ? Donner un exemple d'un espace métrique tel que la distance n'est pas induit par une norme. Quelle axiome de la norme n'est pas satisfaite ?

**Exercice III.** Soit l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{2x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = \alpha \end{cases}$$

- (1) Calculer la limite de  $f(x, y)$  en  $(0, 0)$ . Trouver la valeur de  $\alpha$  pour laquelle la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- (2) Désormais soit  $\alpha = 0$ . Calculer la dérivée de  $f$  en  $(0, 0)$  suivant le vecteur  $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$  pour  $\theta \in [0, 2\pi]$ .
- (3) Trouver les dérivées partielles de  $f$  en  $(0, 0)$ . Calculer le gradient  $\overrightarrow{\text{grad}}f(0, 0)$ .
- (4) Vérifier si la formule liant la dérivée directionnelle et le gradient est vraie pour  $f$  en  $(0, 0)$ .
- (5) Déterminer le plus grand sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  sur lequel la fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$ . Justifier la réponse.

**Exercice IV.** On considère l'application sur  $\mathbb{R}^2$  privé de la droite  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$  définie par

$$g(x, y) = \exp\left(1 + \frac{x^2}{1 - y}\right).$$

- (1) Déterminer la différentielle de  $g$  en tout point  $(x, y)$  du domaine de la définition de  $g$ . Calculer ensuite la différentielle de  $g$  au point  $(2, 5)$ .
- (2) A l'aide de la question précédente, trouver une valeur approximative de  $g$  au point  $(2.06, 4.92)$ .

**Exercice V.** On considère l'application  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$g(x, y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{1 - x^2 - y}.$$

- (1) Déterminer le plus grand sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ , noté  $C$ , sur lequel  $g$  est bien définie. Représenter graphiquement cet ensemble. On pourra s'inspirer de l'exercice 1 pour cette question.
- (2) On note par  $\Gamma$  la frontière de  $C$ . Calculer

$$\min_{(x,y) \in \Gamma} g(x, y) \quad \text{et} \quad \max_{(x,y) \in \Gamma} g(x, y),$$

et déterminer en quels points  $(x, y)$  de  $\Gamma$  ces valeurs sont atteintes.

- (3) Trouver les points critiques de  $g$  à l'intérieur de  $C$ , et déterminer la valeur de  $g$  en ces points.
- (4) En déduire la valeur minimale et la valeur maximale de  $g$  sur  $C$ .
- (5) Déterminer le développement de Taylor de  $g$  à l'ordre 1 au voisinage du point  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .