Olga Kravchenko
Mai 1998

Les structures des algèbres différentielles graduées en géométrie différentielle.

Programme de Recherche.

C'est en géométrie différentielle et en géométrie non–commutative que résident mes principaux intérêts de recherche, mais j'utilise des méthodes plutôt algèbriques. Ma thèse porte sur la quantification par déformation, sujet relié à des domaines différents allant de la théorie de l'indice jusqu'à la physique quantique.

Maxim Kontsevich a récemment prouvé que toutes les structures de Poisson peuvent être déformées formellement [11]. La preuve est un corollaire de son théorème de formalité, qui dit que deux algèbres différentielles graduées sont quasi–isomorphes comme algèbres de Lie à homotopie près: l'algèbre des opérateurs multidifférentiels (des cochaînes de Hochschild locales), et l'algèbre des champs multivectoriels (avec la différentielle nulle).

Cela m'a guidée vers le cercle des idées de Gerstenhaber, Schack, Stasheff et d'autres [7, 24] dans la théorie des déformations, que j'aimerais regarder sous un certain angle, en étudiant des algèbres différentielles graduées (algèbres associative, algèbres de Lie, de Poisson, de Gerstenhaber, de Leibniz) qui sont les structures naturelles dans le sujet.

Ci–dessous je décris les problèmes sur lesquels je compte travailler.

Il s'avère que les algèbres de Gerstenhaber sont des objets très intéressants à étudier. Elles sont une version graduée des algèbres de Poisson.

Définition 1. *Une algèbre de Gerstenhaber (notée G–algèbre) $\mathcal{A} = \oplus A^i$ est une algèbre commutative associative graduée munie d'une structure d'algèbre de Lie graduée sur la suspension $\mathcal{A}[1] = \oplus A^{i+1}$ tel que pour tout $a \in A$ le crochet $[a, \ ]$ est une dérivation graduée.*

Exemple standard. C'est l' exemple de l'algèbre des champs multivectoriels sur $\mathbb{R}^n$ munie de la différentielle nulle et le crochet de Lie de Schouten-Nijenhuis. Choisissons dans $\mathbb{R}^n$ un système de coordonnées $\{x_i\}$ et dans l'espace tangent le système $\{\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\}$. Les champs multivectoriels dans $\Lambda T\mathbb{R}^n$ sont de la forme:

$$X = \Sigma f_{i_1,\dots i_k}(x)\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_k}.$$

Nous pouvons aussi considérer les polynôms $S\Pi T\mathbb{R}^n$ dans l'espace $T\mathbb{R}^n$ avec la parité inversée au lieu de $\Lambda T\mathbb{R}^n$.

Le crochet de Lie de deux champs vectoriels s'exprime comme

$$[X,Y] = \frac{\partial X}{\partial \xi_i}\frac{\partial Y}{\partial x_i} - \frac{\partial Y}{\partial \xi_i}\frac{\partial X}{\partial x_i}.$$

On peut aussi l'exprimer en utilisant l'opérateur différentiel impair d'ordre deux:

$$D = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

comme:

$$[X,Y] = D(ab) - Dab - aDb.$$

C'est l'exemple standard de l'algèbre de Batalin-Vilkovisky (BV–algèbres), qui constitue l'objet principal de mon programme.

Définition 2. [1, 13, 14] *Une BV–algèbre est une G–algèbre* $(\mathcal{A}, \cdot, [\ ,\ ])$ *muni d'un opérateur différentiel* D. *L'opérateur* D *est impair d'ordre deux, de carré zéro et tel que le crochet:*

$$[a, b] = \Phi_D^2(a, b),$$

où Φ_D^2 *est la 2–forme différentielle définie par:*

$$\Phi_D^2(a, b) = (-1)^{|a|} D(ab) - (-1)^{|a|} Dab - aDb,\ \ a, b \in \mathcal{A}, |a| = i + 1,\ \ si\ \ a \in A^i..$$

Pour une algèbre de Gerstenhaber $\mathcal{A}$ la question suivante est très naturelle:

Problème 1. *Quels crochets de Lie gradués sur* $\mathcal{A}$ *sont des BV–crochets?*

Koszul [16] a montré que le crochet de Schouten–Nijenhuis sur les champs multivecteurs est un BV–crochet. Je trouve extrêmement intéressante la question: lesquelles des algèbres de Lie graduées connues sont des BV–algèbres. La liste des exemples possibles est longue: les algèbres de Fröhlicher, Nijenhuis, Richardson, Poisson généralisée et d'autres. Le problème est de trouver l'opérateur différentiel d'ordre deux et de carré nul sur chaque algèbre qui donne le crochet de Batalin-Vilkovisky.

Dans le cas particulier de l'exemple standard le relèvement de l'opérateur D sur les cochaines de Hochschild locales $C^{\cdot}(A)$, où $A = C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas un opérateur de Batalin–Vilkovisky!

Pour remédier à la situation je cherche à définir une notion de BV–algèbre à homotopie près. Je vois deux approches possibles. L'une, la plus générale, est de considérer une algèbre de Lie graduée comme une algèbre sur une opérade ([19]) et énoncer les propriétés de cette opérade qui en font une BV–opérade.

Problème 2. *Définition de l'opérade de la BV–algèbre à homotopie près.*

L'opérade de Batalin–Vilkovisky a été défini par Ezra Getzler [8], mais on ne sait pas si c'est une opérade de Koszul. Si c' en est une on peut essayer de lancer le programme de Ginzburg–Kapranov [9] pour obtenir l'opérade a homotopie près. Il faut définir l'opérade dual et ensuite sa bar–construction. Ce type d'opérade n'a pas vraiment été étudié car il y a une opération unaire et non binaire comme dans les cas habituels – Lie, Comm, Ass, Poiss.

L'autre possibilité est de regarder cas par cas et trouver des BV–structures dans chaque cas au moyen de la géométrie différentielle.

Le côté géométrique des structures de BV pose des problèmes intéressants. C'est Albert Schwarz qui a décrit des structures de Batalin–Vilkovisky comme des structures provenant de la géométrie symplectique impaire [23].

Problème 3. *La géométrie symplectique (impaire) comme lieu géométrique des structures de BV.*

La BV–structure correspond à un triple (M, P, Q) : une variété M avec une structure symplectique (de Poisson) impaire P et un opérateur différentiel de carré nul Q. C'est un langage géométrique qui permet de décrire des objets algébriques, par exemple, l'opérateur Q correspond à un morphisme d'algèbres de Lie graduées à homotopie près. Les exemples particuliers sont explicités dans l'article [2]. Une déformation d'un triplet (M, P, Q) est un problème très intéressant puisqu'il correspond à la quantification de "Master equation" et d'une BV–algèbre. Ces questions, qui viennent de la physique, peuvent avoir des applications en géométrie non–commutative [5].

Comme on l'a indiqué dans [4] et [20] la BV–structure est en correspondance avec certaines variétés de Frobenius. Manin a suggéré une relation entre les variétés de Frobenius [3] et la théorie conforme topologique des champs (TQFT) [10] probablement par l'intermédiaire de BV–algèbres à homotopie près.

Problème 4. *Exprimer explicitement les relations entre les BV–structures, les variétés de Frobenius et la théorie conforme topologique des champs.*

Là encore la théorie des opérades peut se révéler utile.

Par ailleurs, les BV–algèbres sont des exemples d'algèbres de Leibniz, qui sont elles–mêmes une généralisation des algèbres de Lie. De nombreux exemples d'algèbres de Leibniz sont donnés par les crochets dérivés des algèbres de Lie différentielles $(\mathfrak{g}, [,], d)$. On peut définir un nouveau crochet, qui n'est pas un crochet de Lie, mais celui de Leibniz [6, 12, 13, 15, 22]:

$$[x, y]_d = [x, dy], \quad \text{for} \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Parmi ces crochets il y a des BV–crochets, ce qui nous ramène au Problème 1.

En regardant les BV–structures généralisées [1, 8, 17, 21, 24] comme des exemples d'algèbres de Leibniz je m'attends à de nouveaux résultats.

Des calculs de (co)homologie d'algèbres de Leibniz (voir par exemple [18]) peuvent servir à définir

Problème 5. *Les invariants des structures de Batalin–Vilkovisky.*

Cet aspect des structures de Batalin–Vilkovisky n'a pas encore été étudié. Néanmoins on peut espérer l'utiliser pour obtenir des invariants des variétés symplectiques graduées correspondant aux BV–structures. Il n'est pas encore évident de décrire la relation entre l'homologie de Leibniz et l'homologie de Batalin–Vilkovisky, dont le premier exemple est la BRST–cohomologie.

References

[1] Akman, F. *On some generalizations of Batalin-Vilkovisky algebras.* J. Pure Appl. Alg., **120** (1997), 105–141.

[2] Alexandrov, M. - Kontsevich, M. - Schwarz, A. - Zaboronsky, O. *The geometry of the master equation and Topological Quantum Field Theory,* hep-th/9502010 (1995).

[3] Audin, M. *An introduction to Frobenius manifolds, moduli spaces of stable maps and quantum cohomology,* Preprint (May 1997).

[4] Barannikov, S. - Kontsevich, M. *Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields,* alg-geom/9710072.

[5] A. Connes. Noncommutative geometry, Academic Press (1994).

[6] Dubois-Violette, M. - Michor, P.W. *A common generalization of the Frölicher-Nijenhuis bracket and the Schouten bracket for symmetric multivector fields* Indag. Math., N.S., **6** (1) (1995), 51-66.

[7] Gerstenhaber, M. - Schack, S.D. *Algebraic cohomology and deformation theory,* in Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications, M. Gerstenhaber and M. Hazewinkel, eds., ASI C247, Kluwer, 1988.

[8] Getzler, E. *Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories,* Comm. Math. Phys., **159** (1994), no. 2, 265–285.

[9] Ginzburg, V. - Kapranov, M. *Koszul duality for operads,* Duke Math. J., **76** (1994), no. 1, 203–272.

[10] Kimura, T. - Voronov, A. - Zuckerman, G. *Homotopy Gerstenhaber algebras and topological field theory,* q-alg/9602009, in "Operads: Proceedings of Renaissance Conferences", J.-L. Loday, J. Stasheff, and A.A. Voronov, eds., Contemp. Math., AMS, Providence, RI (1996).

[11] Kontsevich, M. *Deformation quantization of Poisson manifolds,I,* q-alg/9709040

[12] Kosmann-Schwarzbach, Y. *From Poisson Algebras to Gerstenhaber Algebras,* Ann. Inst. Fourier **46** (1996) 1241–1272.

[13] Kosmann-Schwarzbach, Y. *Derived brackets and the Gauge Algebra of Closed String Theory,* Proc. XXI International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics (Goslar 1996), 9 pp.

[14] Kosmann-Schwarzbach, Y. *Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids,* Acta Applic. Math. **41** (1995) 153–165

[15] Kosmann-Schwarzbach, Y. - Magri, F. *Poisson-Nijenhuis structures,* Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Thèor., 53 (1) (1990), 35-81.

[16] Koszul, J.-L. *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie,* in Elie Cartan et les mathématique d'aujourd'hui, Asterisque, hors série, (1985), 257–271.

[17] Lian, B.H. - Zuckerman, G.J. *New perpectives on the BRST-algebraic structure of string theory,* Comm. Math. Phys., **154** (1993), 613–646.

[18] Loday, J.-L. *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz.* Ensegn. Math. (2), **39** (1993),no.3-4, 269–293.

[19] Loday, J.-L. *Renaissance des opérades.* , Séminaire Bourbaki, Vol.1994/95. Astérisque No. 237 (1996), Exp.No. **792**, 3, 47–74.

[20] Manin, Yu. *Three constructions of Frobenius manifolds: a comparative study,* math.QA/9801006

[21] Penkava, M. - Schwarz, A.S. *On some algebraic structures arising in string theory,* in Perspectives in mathematical physics, 219–227, Conf. Proc. Lecture Notes Math. Phys., III, Internat. Press, Cambridge, MA, 1994.

[22] Roger, C. *Algèbre Lie graduées et quantification,* Symplectic Geometry and Mathematical Physics, in Progress in math. 98, Birkhäuser, 1991.

[23] Schwarz, A.S. *Superanalogs of symplectic and contact geometry and their applications to quantum field theory,* hep-th/9406120

[24] Stasheff, J. *Deformation theory and the Batalin-Vilkovisky master equation,* in Deformation Theory and Symplectic Geometry, pp. 271-284, Sternheimer et al., eds., Kluwer 1997. 22