# DÉFORMATIONS ET STRUCTURES À HOMOTOPIE PRÈS. PROGRAMME DE RECHERCHE.

OLGA KRAVCHENKO

**Mots-clés**: théorème de formalité de Kontsevich, structures algébriques à homotopie près, équation de Maurer-Cartan, quantification de $r$–matrices, groupes quantiques, symétrie miroir, algèbres de Batalin-Vilkovisky, algébroïdes de Lie.

Mon travail de recherche se trouve à la croisée de plusieurs domaines comme l'algèbre homotopique, la topologie algébrique, la théorie des groupes quantiques.
Ma thèse porte sur la quantification par déformation, sujet relié à des domaines différents allant de la théorie de l'indice jusqu'à la physique quantique.
Maxim Kontsevich a récemment prouvé que toutes les structures de Poisson peuvent être déformées formellement [13]. La preuve est un corollaire de son théorème de formalité, qui dit que les deux algèbres différentielles graduées suivantes sont quasi–isomorphes comme algèbres de Lie à homotopie près: l'algèbre des opérateurs multidifférentiels (des cochaînes de Hochschild locales), et l'algèbre des champs multivectoriels (avec la différentielle nulle).
Cela m'a amenée à la théorie des déformations, en particulier à étudier des structures à homotopie près et les equations de connexion plate liées (aussi applé "Master équation" ou "équation de Maurer–Cartan").
J'oriente mon travail dans deux directions de recherche principales:

- **Théorèmes de formalité généralisés**
- **La quantification des structures algébriques**

Kontsevich a utiliser la formalité de l'algèbre des opérateurs multidifférentiels pour démontrer l'existence de la quantification des structures de Poisson. La structure de Poisson satisfait à l'équation de Maurer–Cartan sur l'algèbre des champs multivectoriels. Le quasi-isomorphisme de $L_\infty$ algèbres envoie cette structure de Poisson sur la solution de l'équation Maurer–Cartan sur l'algèbre des opérateurs multidifférentiels. Cette dernière est une quantification de la structure de Poisson.
*Le schéma général pour résoudre un problème de quantification d'une structure*:

1. Essayer d'interpréter la structure, que l'on voudrait quantifier, comme une solution d'équation de Maurer–Cartan sur une certaine algèbre.
2. Essayer de trouver une autre algèbre pour laquelle la structure quantifiée pourra avoir une interprétation comme une solution d'équation de Maurer–Cartan.
3. Construire un quasi-isomorphisme entre ces deux algèbres. Il va envoyer les solutions de l'équation de Maurer–Cartan sur la première algèbre vers celle sur la dernière. On obtient la quantification.

Ci–dessous je décris les problèmes sur lesquels je compte travailler en utilisant ce schéma.

*Date*: Avril 1999.

L'algèbre des opérateurs multidifférentiels sur une variété est une algèbre de Gerstenhaber à homotopie près. Il s'avère que les algèbres de Gerstenhaber sont des objets très intéressants à étudier. Elles sont similaire à une version graduée des algèbres de Poisson.

*Définition* 1. Une algèbre de Gerstenhaber (notée G–algèbre) $\mathcal{A} = \oplus A^i$ est une algèbre commutative associative graduée munie d'une structure d'algèbre de Lie graduée sur la suspension $\mathcal{A}[1] = \oplus A^{i+1}$ tel que pour tout $a \in A$ le crochet $[a,\ ]$ est une dérivation graduée.

**Exemple standard.** C'est l' exemple de l'algèbre des champs multivectoriels sur $\mathbb{R}^n$ munie de la différentielle nulle et le crochet de Lie de Schouten-Nijenhuis. Choisissons dans $\mathbb{R}^n$ un système de coordonnées $\{x_i\}$ et dans l'espace tangent le système $\{\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\}$. Les champs multivectoriels dans $\Lambda T\mathbb{R}^n$ sont de la forme:

$$X = \Sigma f_{i_1,\dots i_k}(x)\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}.$$

Nous pouvons aussi considérer les polynômes $S\Pi T\mathbb{R}^n$ dans l'espace $T\mathbb{R}^n$ avec la parité inversée au lieu de $\Lambda T\mathbb{R}^n$.
Le crochet de Lie de deux champs vectoriels s'exprime comme

$$[X, Y] = \frac{\partial X}{\partial \xi_i}\frac{\partial Y}{\partial x_i} - \frac{\partial Y}{\partial \xi_i}\frac{\partial X}{\partial x_i}.$$

On peut aussi l'exprimer en utilisant l'opérateur différentiel impair d'ordre deux:

$$D = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

comme:

$$[X, Y] = D(ab) - Dab - aDb.$$

C'est l'exemple standard de l'algèbre de Batalin-Vilkovisky (BV–algèbres), qui constitue l'objet principal de mon programme.

*Définition* 2. [1, 15] Une BV–algèbre est une G–algèbre $(\mathcal{A}, \cdot, [\ ,\ ])$ muni d'un opérateur différentiel $D$. L'opérateur $D$ est impair d'ordre deux, de carré zéro et tel que le crochet:

$$[a, b] = \Phi^2_D(a, b),$$

où $\Phi^2_D$ est la 2–forme différentielle définie par:

$$\Phi^2_D(a, b) = (-1)^{|a|}D(ab) - (-1)^{|a|}Dab - aDb,\ \ a, b \in \mathcal{A}, |a| = i + 1,\ \text{si}\ \ a \in A^i..$$

Koszul [17] a montré que le crochet de Schouten–Nijenhuis sur les champs multivecteurs est un BV–crochet. Le problème est de trouver l'opérateur différentiel d'ordre deux et de carré nul qui donne le crochet de Batalin-Vilkovisky.
Dans le cas particulier de l'exemple standard le relèvement de l'opérateur $D$ sur les cochaines de Hochschild locales $C^{\cdot}(A)$, où $A = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas un opérateur de Batalin–Vilkovisky! Pour remédier à la situation j'ai définie une notion de BV–algèbre à homotopie près dans mon travail récente [18]. J'y ai aussi formulé une conjecture sur l'algèbre d'opérateurs multidifférentiels, qui nous ammene au problème suivante.

**Problème 1.** *Définition d'une structure de Batalin–Vilkovisky sur l'algèbre d'opérateurs multidifférentiels.*

L'aspect opéradique peut être utile ici [10, 20], . L'opérade de Batalin–Vilkovisky a été défini par Ezra Getzler [9], mais une définition de l'opérade de la BV–algèbre à homotopie près reste à formuler.

Comme on l'a indiqué dans [3] et [22] la BV–structure est en correspondance avec certaines variétés de Frobenius. Manin a suggéré une relation entre les variétés de Frobenius [2] et la théorie conforme topologique des champs (TQFT) [12] probablement par l'intermédiaire de BV–algèbres à homotopie près.

**Problème 2.** *Démontrer le théorème de formalité d'algèbre des opérateurs multidifférentiels comme une $BV_\infty$–algèbre. Construire la symétrie miroir non-commutative.*

La symétrie miroir non-commutative sera une conséquence de l'application du schéma de quantification. La structure de variété de Frobenius sur les classes de solutions de l'équation de Maurer–Cartan ont été obtenues dans [3]. Par formalité cette équation définira une structure de symétrie miroir non-commutative.
Je compte aussi exprimer explicitement les relations entre les BV–structures, les variétés de Frobenius et la théorie conforme topologique des champs.

Le côté géométrique des structures de BV pose des problèmes intéressants. C'est Albert Schwarz qui a décrit des structures de Batalin–Vilkovisky comme des structures provenant de la géométrie symplectique impaire [26]. La géométrie symplectique (impaire) c'est le lieu géométrique des structures de BV. La BV–structure correspond à un triple $(M, P, Q)$ : une variété $M$ avec une structure symplectique (de Poisson) impaire $P$ et un opérateur différentiel de carré nul $Q$. C'est un langage géométrique qui permet de décrire des objets algébriques, par exemple, l'opérateur $Q$ correspond à un morphisme d'algèbres de Lie graduées à homotopie près. Une déformation d'un triplet $(M, P, Q)$ est un problème très intéressant puisqu'il correspond à la quantification de "Master equation" et d'une BV–algèbre. Ces questions, qui viennent de la physique, peuvent avoir des applications en géométrie non–commutative [4].
La notion géométrique correspondante à une algèbre de Gerstenhaber est celle d'algébroïde de Lie.

*Définition* 3. Une algébroïde de Lie est un fibré vectoriel $A \to M$ avec

1 une structure d'algèbre de Lie sur l'espace de sections $\Gamma(A)$
2 une application de fibré vectoriel: $A \to \mathcal{T}M$, (le fibré tangent)
  – qui définie l'homomorphisme d'algèbres de Lie:
$$\rho : \Gamma(A) \to \Gamma(\mathcal{T}M) : \quad \rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] \quad \text{pour} \quad X, Y \in \Gamma(A)$$
  – qui obeit à une regle de Leibniz:
$$[X, fY] = f[X, Y] + \rho(X)(f)Y, \quad \text{pour} \quad X, Y \in \Gamma(A),\ f \in C^\infty(M)$$

Une algébroïde de Lie est une généralisation à la fois des notion d'algèbre de Lie et de fibré tangente.
D'un autre côté, une algébroïde de Lie est une réalisation géometrique d'un couple Lie–Rinehart [11] $(\mathcal{A}, L)$ où $\mathcal{A}$ est une algèbre commutative et $L$ une algèbre de Lie où en plus $\mathcal{A}$ est un $L$–module, et $L$ est un $\mathcal{A}$–module à gauche.
Voici quelques examples:

- $M$ est un point, $A$ une algèbre de Lie, $\rho = 0$
- $A = \mathcal{T}M$ un fibré tangent, les sections de $\mathcal{T}M$ sont les champs vectoriels, avec une structure d'algèbre de Lie standard, $\rho =$ idèntité
- $M$ est une variété de Poisson, avec une structure de Poisson $\pi \in \Gamma(\Lambda\mathcal{T}M)$, $A = \mathcal{T}^*M$ un fibré cotangent, $\rho = \hat{\pi} : \Gamma(\mathcal{T}^*M) \to \Gamma(\mathcal{T}M)$ est donné par le dual du bivecteur de Poisson.
- Une algébroïde de groupoïde de Lie $(G, \alpha, \beta)$.

À une algébroïde de Lie $A$ correspond une structure d'algèbre de Gerstenhaber sur $\mathfrak{g} = \Gamma(\Lambda A)$, où $\Lambda A = \sum_k \Lambda^k A$ est le fibré vectoriel d'algèbre exterieure du fibré $A$.
Il y a une notion de connexion sur une algébroïde de Lie. À une algébroïde de Lie $A$ avec une connexion plate correspond aux BV–algèbres.Ça donne un lien avec le problème 1:

**Problème 3.** *Définir et étudier une algébroïde de Lie à homotopie près. Étudier ses liens avec les notions d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près et Batalin-Vilkovisky à homotopie près.*

Motivée par le théorème de formalité de Kontsevich j'ai défini une notion nouvelle d'algébroïde de Lie à homotopie près et j'essaye de montrer que cette notion est une généralisation à la fois des notions de $L_\infty$–algèbre et de l'algèbresdes opérateurs différentiels sur une variété.

Par ailleurs, les BV–algèbres sont des exemples d'algèbres de Leibniz, qui sont elles–mêmes une généralisation des algèbres de Lie. De nombreux exemples d'algèbres de Leibniz sont donnés par les crochets dérivés des algèbres de Lie différentielles $(\mathfrak{g}, [,], d)$. On peut définir un nouveau crochet, qui n'est pas un crochet de Lie, mais celui de Leibniz [6, 14, 16, 25]:

$$[x, y]_d = [x, dy], \quad \text{for} \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Parmi ces crochets il y a des BV–crochets, ce qui nous ramène au Problème 1.
En regardant les BV–structures généralisées [1, 9, 19, 24, 27] comme des exemples d'algèbres de Leibniz je m'attends à de nouveaux résultats.
Des calculs de (co)homologie d'algèbres de Leibniz (voir par exemple [20]) peuvent servir à définir

**Problème 4.** *Les invariants des structures de Batalin–Vilkovisky.*

Cet aspect des structures de Batalin–Vilkovisky n'a pas encore été étudié. Néanmoins on peut espérer l'utiliser pour obtenir des invariants des variétés symplectiques graduées correspondant aux BV–structures. Il n'est pas encore évident de décrire la relation entre l'homologie de Leibniz et l'homologie de Batalin–Vilkovisky, dont le premier exemple est la BRST–cohomologie.

Une autre application du schéma général de quantification peut donner la reponse au

**Problème 5.** *Écrire explicitement les coefficients de la quantification de $r$-matrices.*

La motivation originelle pour l'introduction des groupes quantiques était la recherche de solutions de l'équation de Yang-Baxter, en particulier avec paramètre spectral; ceci conduit à étudier en détail la quantification de $r$-matrice classique.
Drinfeld, dans l'artile "On some unsolved problems in quantum group theory" [5], a posé la question de l'existence de quantifications de bigèbres de Lie, quelle provient du problème

de quantification des groupes de Lie–Poisson. Etingof et Kazhdan en 1995 [7] ont resolue ce problème d'existence dee quantification de bigèbres de Lie. Néanmoins la formule explicite n'est toujours pas écrit. C'est un problème très difficile mais aussi avec beaucoup d'applications.

Une façon de l'approcher est d'utiliser le schéma générale décrit au début.

L'équation de $r$–matrice classique dynamique est une équation de connexion plate (l'équation de Knizhnik–Zamolodchikov). Donc on peut regarder l'équation de Yang-Baxter classique comme l'équation de Maurer–Cartan.

Je voudrais essayer de présenter l'équation de Yang–Baxter quantique aussi sous la forme d'équation de connexion Maurer–Cartan. Après on pourrait essayer de construire un morphisme d'algèbre à homotopie près qui enverrait les solution de l'équation classique vers celles de l'équation quantique.

Une autre façon est liée aux invariants de nœuds (idée de Polyak [23]). On représente l'action d'une $r$-matrice comme un graphe. Alors les coefficients de sa quantification sont donnés par un calcul sur l'espace de configuration, qui provient de graphes sur des nœuds.

## References


[1] Akman, F. *On some generalizations of Batalin-Vilkovisky algebras.* J. Pure Appl. Alg., **120** (1997), 105–141.

[2] Audin, M. *An introduction to Frobenius manifolds, moduli spaces of stable maps and quantum cohomology,* Preprint (May 1997).

[3] Barannikov, S. - Kontsevich, M. *Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields,* alg-geom/9710072.

[4] Connes, A.*Noncommutative geometry*, Academic Press (1994).

[5] Drinfeld, V. G. *On some unsolved problems in quantum group theory.* Quantum groups (Leningrad, 1990), 1–8, Lecture Notes in Math., 1510, Springer, Berlin, 1992.

[6] Dubois-Violette, M.; Michor, P.W. *A common generalization of the Frölicher-Nijenhuis bracket and the Schouten bracket for symmetric multivector fields* Indag. Math., N.S., **6** (1) (1995), 51-66.

[7] Etingof, P; Kazhdan, D *Quantization of Lie bialgebras. I.* Selecta Math. (N.S.) 2 (1996), no. 1, 1–41.

[8] Gerstenhaber, M. - Schack, S.D. *Algebraic cohomology and deformation theory,* in Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications, M. Gerstenhaber and M. Hazewinkel, eds., ASI C247, Kluwer, 1988.

[9] Getzler, E. *Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories,* Comm. Math. Phys., **159** (1994), no. 2, 265–285.

[10] Ginzburg, V.; Kapranov, M. *Koszul duality for operads,* Duke Math. J., **76** (1994), no. 1, 203–272.

[11] Huebschmann, J. *Lie-Rinehart algebras, Gerstenhaber algebras and Batalin-Vilkovisky algebras,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 48 (1998), no. 2, 425–440.

[12] Kimura, T. - Voronov, A. - Zuckerman, G. *Homotopy Gerstenhaber algebras and topological field theory,* q-alg/9602009, in "Operads: Proceedings of Renaissance Conferences", J.-L. Loday, J. Stasheff, and A.A. Voronov, eds., Contemp. Math., AMS, Providence, RI (1996).

[13] Kontsevich, M. *Deformation quantization of Poisson manifolds,I,* q-alg/9709040

[14] Kosmann-Schwarzbach, Y. *From Poisson Algebras to Gerstenhaber Algebras,* Ann. Inst. Fourier **46** (1996) 1241–1272.

[15] Kosmann-Schwarzbach, Y. *Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids,* Acta Applic. Math. **41** (1995) 153–165

[16] Kosmann-Schwarzbach, Y. - Magri, F. *Poisson-Nijenhuis structures,* Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Thèor., 53 (1) (1990), 35-81.

[17] Koszul, J.-L. *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie,* in Elie Cartan et les mathématique d'aujourd'hui, Asterisque, hors série, (1985), 257–271.

[18] Kravchenko, O. *Deformations of Batalin–Vilkovisky algebras.* Publications of Banach Center, (1999), à paraître.
[19] Lian, B.H. - Zuckerman, G.J. *New perpectives on the BRST-algebraic structure of string theory,* Comm. Math. Phys., **154** (1993), 613–646.
[20] Loday, J.-L. *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz.* Ensegn. Math. (2), **39** (1993),no.3-4, 269–293.
[21] Loday, J.-L. *Renaissance des opérades.* , Séminaire Bourbaki, Vol.1994/95. Astérisque No. 237 (1996), Exp.No. **792**, 3, 47–74.
[22] Manin, Yu. *Three constructions of Frobenius manifolds: a comparative study,* math.QA/9801006
[23] Polyak, M. *On the algebra of arrow diagrams,* preprint 1998
[24] Penkava, M. - Schwarz, A.S. *On some algebraic structures arising in string theory,* in Perspectives in mathematical physics, 219–227, Conf. Proc. Lecture Notes Math. Phys., III, Internat. Press, Cambridge, MA, 1994.
[25] Roger, C. *Algèbre Lie graduées et quantification,* Symplectic Geometry and Mathematical Physics, in Progress in math. 98, Birkhäuser, 1991.
[26] Schwarz, A.S. *Superanalogs of symplectic and contact geometry and their applications to quantum field theory,* hep-th/9406120
[27] Stasheff, J. *Deformation theory and the Batalin-Vilkovisky master equation,* in Deformation Theory and Symplectic Geometry, pp. 271-284, Sternheimer et al., eds., Kluwer 1997. 22

IRMA, Université Louis Pasteur, 7 rue René Descartes, 67084, Strasbourg, France
*E-mail address*: ok@alum.mit.edu