Université Claude Bernard (Lyon 1)

Habilitation à diriger des recherches
(Numéro d'ordre : 48-2011)

ASPECTS MODÈLE-THÉORIQUES & GÉOMÉTRIQUES DES GROUPES

Abderezak OULD HOUCINE

Mémoire de synthèse présenté le 12 décembre 2011

à l'Institut Camille Jordan

Rapporteurs :

Gilbert LEVITT	Professeur, Université de Caen
Angus MACINTYRE	Professeur, Université de Queen Mary
Simon THOMAS	Professeur, Université de Rutgers

Jury :

Tuna ALTINEL	Maître de conférences, Université de Lyon 1
Angus MACINTYRE	Professeur, Université de Queen Mary
Frédéric PAULIN	Professeur, Université Paris-Sud 11
Françoise POINT	Directrice de Recherches FNRS, Université de Mons
Frank WAGNER	Professeur, Université de Lyon 1

À mes parents

Avant-propos

La notion de groupe est issue des travaux des mathématiciens de la fin du 17ème et du début du 18ème sciècle sur la résolution des équations algébriques. C'est une notion qui a envahi depuis tous les domaines des mathématiques. Elle est aussi présente dans d'autres branches de la science comme la chimie ou la biologie.

Un groupe peut être généralement identifié comme étant un ensemble de transformations d'un objet mathématique. Étant donné des liens étroits qu'il entretient avec les autres domaines, il peut être étudié de plusieurs points de vues. Ainsi, on peut le voir comme un objet géométrique ou comme un objet de théorie des modèles, et les liens entre ces deux aspects ne cessent de progresser.

Comme le titre l'indique, je m'intéresse dans ce mémoire principalement à des propriétés de théorie des modèles et de théorie géométrique des groupes. C'est une synthèse de certains résultats et problèmes qui m'ont occupés ces dernières années. Il s'agira de propriétés algébriques des groupes superstables, des groupes superstables qui agissent sur les arbres, de l'homogénéité et de la clôture algébrique dans les groupes libres, et des cônes asymptotiques des groupes de présentation finie. On trouvera à la fin de ce rapport la liste des travaux présentés et celle des travaux effectués.

Le style de la présente synthèse est très informel et le matériel présenté ne se substitue pas aux travaux publiés ou soumis. Il n'y aura pratiquement pas de démonstration, mais plutôt des schémas et des idées générales. Pour les détails et les preuves complètes, le lecteur pourra consulter les articles disponibles sur le web.

Je tiens à remercier vivement Gilbert Levitt, Angus Macintyre et Simon Thomas d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce présent mémoire. Je les remercie d'avoir accepté cette tâche et de l'avoir effectuée en un si bref délai. Je remercie Tuna Altinel, Angus Macintyre, Frédéric Paulin, Françoise Point et Frank Wagner d'avoir accepté de siéger dans le jury. Je les remercie également pour les nombreuses remarques et suggestions et plus particulièrement Frédéric Paulin pour sa relecture attentive.

Mes remerciements vont aussi à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail. Je remercie Christian Michaux et Françoise Point pour m'avoir offert l'opportunité de me consacrer entièrement à la recherche à l'Université de Mons. Je remercie Denis Osin pour la visite à l'Université de Vanderbilt durant laquelle une partie du travail présenté dans le chapitre 6 a été réalisée. Ces remerciements seraient incomplets si j'oubliais Gabriel Sabbagh, une personne exceptionnelle ; je le remercie pour son soutien infaillible durant toutes ces années. Je remercie également Frédérique Dansart, dont les encouragements ont permis à ce mémoire de voir le jour.

Table des matières

Introduction **1**

Introduction in English **7**

1 Groupes superstables **13**
1.1 Généralités . . . 14
1.2 Groupes CSA . . . 17
1.2.1 Groupes CSA existentiellement clos . . . 17
1.2.2 Groupes CSA superstables . . . 20
1.3 Groupes superstables avec des propriétés résiduelles . . . 21

2 Groupes superstables qui agissent sur les arbres **25**
2.1 Généralités . . . 26
2.2 Actions irréductibles . . . 28
2.3 Groupes "minimaux" et classes de Borel . . . 29

3 Groupes hyperboliques sans torsion à deux générateurs **33**
3.1 Généralités . . . 33
3.2 Homogénéité existentielle et primalité . . . 34

4 Homogénéité dans les groupes libres **37**
4.1 Généralités . . . 37
4.2 Homogénéité existentielle . . . 38
4.3 Homogénéité . . . 40

5 Clôture algébrique et définissable dans les groupes libres **43**
5.1 Généralités . . . 44
5.2 Constructibilité à partir de la clôture algébrique . . . 47
5.3 La clôture algébrique dans la décomposition JSJ, clôture définissable . . . 49
5.4 Le contre exemple . . . 50

6 Groupes de présentation finie ayant un nombre infini de cônes asymptotiques **51**
6.1 Généralités . . . 52
6.2 Plongements quadratiques préservant le centre . . . 53
6.3 Construction . . . 54

Liste des travaux présentés **57**

Travaux **59**

Bibliographie **61**

Introduction

Le thème central de la théorie géométrique des groupes est l'étude des groupes en tant qu'objets géométriques, à savoir des espaces métriques intrinsèques, par exemple en les munissant de la métrique des mots, ou d'actions sur des objets géométriques, comme les espaces métriques, généralement par isométries. C'est une théorie qui se situe dans la continuité de la théorie combinatoire des groupes. Celle-ci s'intéresse, entre autres, aux problèmes algorithmiques dans les groupes et ses origines remontent aux travaux de Dehn sur le problème des mots dans les groupes de surfaces.

Cette approche géométrique de la théorie des groupes est illustrée dans le travail fondamental de Gromov et la nilpotence virtuelle des groupes à croissance polynomiale est un remarquable exemple [Gro81]. Une des classes de groupes de type fini étudiée dans ce cadre est celle des groupes hyperboliques introduite par Gromov [Gro87]. Ces derniers sont les groupes de type fini dont le graphe de Cayley, par rapport à une partie génératrice finie, est un espace hyperbolique au sens de Gromov, à savoir un espace dont les triangles géodésiques sont très fins. Cette classe contient, par exemple, les groupes libres et les groupes fondamentaux de variétés compactes à courbure strictement négative. Un groupe hyperbolique est un objet géométrique vu à travers son graphe de Cayley qui satisfait une condition de courbure, mais dans la continuité de la théorie combinatoire, il possède aussi un problème des mots "fortement" résoluble, il est caractérisé par une présentation de Dehn.

Les graphes hyperboliques (au sens de Gromov) peuvent être considérés comme une généralisation des arbres simpliciaux. La théorie de Bass-Serre [Ser80] montre qu'un groupe agit (par isométries et de manière non triviale) sur un arbre simplicial si et seulement si c'est une itération de produits libres amalgamés et de HNN-extensions. Par la notion de graphe de groupes, cette théorie donne une description complète des groupes qui agissent sur les arbres simpliciaux. Il devient naturel ensuite de considérer le contexte plus général des actions sur les arbres réels. Cette étude a été entamée par Tits, Lyndon, Bass, Chiswell, entre autres, et ensuite par Morgan et Shalen qui ont conjecturé qu'un groupe de type fini qui agit librement sur un arbre réel est un produit libre de groupes abéliens libres et de groupes de surfaces. À travers la notion de "système d'isométries" et les arbres associés, Rips démontre la conjecture de Morgan-Shalen et décrit aussi la structure des groupes de type fini qui agissent sur les arbres réels, et qui satisfont des propriétés de *stabilité* (au sens de la théorie géométrique des groupes), analogues à celles satisfaites par les groupes qui agissent sur les arbres simpliciaux. Gaboriau, Levitt et Paulin [GLP94] généralisent et donnent une preuve plus courte du théorème de Rips sur la conjecture de Morgan-Shalen. Bestvina et Feighn [BF95] étudient les actions stables de groupes de présentation finie et donnent ainsi une preuve du théorème de Rips sur les actions satisfaisant des propriétés de stabilité. Rips et Sela [RS94] développent une description plus complète, et puis Sela [Sel97a] généralise ces résultats aux groupes de type fini. Plus récemment, Guirardel [Gui08] étend cette description à un cadre plus général.

En théorie géométrique des groupes, le problème général suivant est étudié : "Étant donné

un groupe G (de type fini) et une classe de sous-groupes $\mathcal{C}$, quel est le lien entre les différentes décompositions en graphe de groupes de G, où les groupes associés aux arêtes sont dans $\mathcal{C}$?" L'ancêtre de ce genre de problème est certainement le cas où la classe $\mathcal{C}$ est réduite au groupe trivial. Le théorème de Kurosh et Grushko fournit une décomposition en produits libres (i.e. $\mathcal{C}$ est réduite au groupe trivial), qui est dans un certain sens canonique. A partir de celle-ci, on peut obtenir toutes les autres décompositions en produits libres. Étudier l'existence de telles décompositions canoniques pour des classes de sous-groupes $\mathcal{C}$ plus générales, s'impose naturellement.

Schématiquement, une *décomposition JSJ* (ou scindement JSJ), relative à $\mathcal{C}$, correspond à une décomposition la plus canonique possible de G à partir de laquelle toutes les autres décompositions (relative à $\mathcal{C}$) peuvent être obtenues. L'origine de la théorie des décompositions JSJ remonte aux travaux de Johannson, Jaco et Shalen [Joh79, JS79]. Ceux-ci ont développé une théorie de découpage des variétés de dimension 3 en pièces plus petites le long de tores. Une version purement de théorie des groupes a été définie par la suite par Kropholler [Kro90] pour certaines classes de groupes. Sela [Sel97b] construit des décompositions JSJ des groupes hyperboliques sans torsion, relative à la classe des sous-groupes cycliques. Rips et Sela [RS97] les ont généralisés aux groupes de présentation finie. D'autres constructions des décompositions JSJ ont été réalisées par plusieurs auteurs [Bow98, DS99, FP06, DS00, SS03]. Plus récemment, un cadre général et une définition précise ont été développés par Levitt et Guirardel [GL09, GL10].

Les cônes asymptotiques ont été introduits par Gromov [Gro81] pour démontrer que les groupes à croissance polynomiale sont virtuellement nilpotents. Van den Dries et Wilkie [WvdD84] ont donné une définition qui s'applique à tout groupe de type fini. Celle-ci utilise l'analyse nonstandard, plus particulièrement les ultrafiltres. Gromov [Gro93] pose la question de savoir si un groupe de type fini (de présentation finie) peut avoir deux cônes asymptotiques non homéomorphes. Les premiers exemples de groupes de type fini ayant une telle propriété ont été fournis par Thomas et Velicovic [TV00]. Ensuite, Drutu et Sapir [DS05] ont construit un groupe de type fini ayant $2^{\aleph_0}$ cônes asymptotiques deux à deux non homéomorphes. Aucun de ces groupes n'est de présentation finie. Kramer, Shelah, Tent et Thomas [KSTT05] ont donné un exemple d'un groupe de présentation finie H, qui a, à homéomorphisme près, un unique cône asymptotique si l'hypothèse du continu est vraie, et (le nombre maximal possible) $2^{2^{\aleph_0}}$ cônes asymptotiques sinon. Ol'shanskii et Sapir [OS07] ont construit un groupe de présentation finie ayant deux cônes asymptotiques non homéomorphes. Le problème restait de savoir s'il existe un groupe de présentation finie ayant un nombre infini de cônes asymptotiques deux à deux non homéomorphes et cela indépendamment de l'hypothèse du continu.

Au chapitre 6, en collaboration avec Denis Osin, nous construisons des groupes de présentation finie ayant un nombre infini de cônes asymptotiques deux à deux non homéomorphes. Généralement, pour distinguer des espaces non homéomorphes, des invariants topologiques sont utilisés. Pour un espace métrique X, le *degré de connexité* de X, noté $c(X)$, est défini comme étant le nombre minimal de points enlevés qui rendent X non connexe. Bien évidement, le degré de connexité d'un espace métrique est un invariant topologique. Nous construisons des groupes de présentation finie Γ ayant pour tout nombre premier p un cône asymptotique C tel que $c(C) = p$.

La construction repose sur deux ingrédients principaux, qui peuvent être décrits comme suit. Dans [OOS09], une construction, par des extensions centrales de groupes, est utilisée pour produire des groupes de type fini ayant une présentation récursivement énumérable (mais infinie) et des cônes asymptotiques avec différents degrés de connexité. Le premier ingrédient consiste en un raffinement de cette méthode pour permettre d'obtenir un nombre infini de cônes asymptotiques ayant des degrés de connexité différents.

Le second ingrédient est le raffinement d'un résultat de ma thèse [OH03, OH07a] concernant les plongements dans les groupes de présentation finie. Le célèbre théorème de Higman affirme que

tout groupe de présentation récursivement énumérable se plonge dans un groupe de présentation finie. Dans ce contexte, les propriétés conservées par ce genre de plongement sont très étudiées. Remeslennikov avait posé en 1976 le problème de savoir si tout groupe abélien dénombrable se plonge dans le centre d'un groupe de présentation finie. Motivé par ce problème, il est démontré dans ma thèse [OH03, OH07a] que tout groupe de présentation récursivement énumérable G se plonge dans un groupe de présentation finie Γ de sorte que G et Γ aient le même centre, ce qui a comme conséquence une réponse positive au problème. Le raffinement consiste à démontrer que la construction utilisée dans [OH03, OH07a] préserve des propriétés de nature géométrique, à savoir que la distorsion du plongement est *quadratique* dans le sens où la longueur de tout élément de G, calculée par rapport à G, est bornée par le carré de sa longueur, calculée par rapport à Γ. En se basant sur d'autres propriétés, plus précisément les propriétés de rétrécissement, l'étape finale consiste à combiner les deux raffinements pour obtenir les groupes de présentation finie désirés.

La théorie des modèles a comme thème central l'étude des "objets algébriques" dans un cadre très général. C'est une branche de la logique mathématique qui étudie, en partie, les relations entre un langage formel et les modèles ou les structures mathématiques, et leurs propriétés du premier ordre. Par exemple, toutes les structures mathématiques fondamentales de l'algèbre, dont les groupes, les anneaux, les corps, les espaces vectoriels, entrent dans ce cadre unificateur. La théorie des modèles des groupes est la partie de la théorie des modèles qui se consacre à l'étude modèle-théorique des groupes.

Une propriété du premier ordre est une propriété que l'on peut exprimer par un ensemble de formules du premier ordre, où une formule n'est autre qu'une expression par des quantificateurs universels et existentiels portant sur les éléments du modèle. Dans le langage de la théorie des groupes, on peut exprimer qu'un groupe est abélien par la formule $\forall x \forall y (xy = yx)$, comme on peut exprimer que le centre d'un groupe est non trivial par la formule $\exists x \forall y (x \neq 1 \wedge xy = yx)$. La théorie élémentaire d'un groupe n'est autre que l'ensemble de toutes les formules (closes, i.e. sans variable libre) du premier ordre qu'il satisfait.

Le théorème de Löwenheim-Skolem [Mar02, Hod93], affirme qu'une théorie consistante, ayant des modèles infinis, possède des modèles de cardinal λ, pour tout λ assez grand. Dans le contexte de la théorie des groupes, cela se traduit par l'existence de groupes de toute cardinalité vérifiant la théorie élémentaire d'un groupe infini donné. Par conséquent, on peut voir la théorie élémentaire d'un groupe à travers tous les groupes qui la satisfont dans toutes les cardinalités. Par exemple, si une théorie élémentaire d'un groupe est $\aleph_0$-catégorique, c'est-à-dire si deux groupes dénombrables quelconques qui la satisfont sont isomorphes, alors G est localement (uniformément) fini et en particulier d'exposant borné. Si la théorie élémentaire de G est λ-catégorique pour un $\lambda \geq \aleph_1$ (ou d'une façon équivalente pour tout $\lambda \geq \aleph_1$, grâce au théorème fondamental de Morley), alors G possède une notion de dimension, connue sous le nom de *rang de Morley*, qui a des propriétés similaires à la dimension de Zariski dans les corps. Une théorie catégorique en un cardinal non dénombrable possède un rang de Morley fini. Les archétypes des groupes ayant cette propriété sont les groupes (simples) algébriques sur les corps algébriquement clos.

La Conjecture d'Algébricité, formulée par Cherlin et Zil'ber vers la fin des années 70, stipule la réciproque : un groupe simple infini de rang de Morley fini est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos. Berline [Ber86] propose une version plus forte de cette conjecture, à savoir que celle-ci doit être vraie pour les groupes (simples) superstables, et conjecture aussi que tout groupe simple superstable est de rang de Morley fini. Ces conjectures sont toujours ouvertes. La tendance générale actuelle est en la croyance à des contre-exemples à la conjecture d'Algébricité dont les prototypes extrêmes sont baptisés *les mauvais groupes*.

Un groupe *CSA* est un groupe dont tout sous-groupe abélien maximal est malnormal. C'est une classe de groupes largement étudiée et contient, par exemple, les groupes hyperboliques sans

torsion, en particulier les groupes libres, les groupes limites et plus généralement les groupes qui agissent librement sur les Λ-arbres. Il s'agit aussi d'une classe qui joue un rôle important dans la preuve de la conjecture de Tarski.

Il se trouve qu'un mauvais groupe de rang de Morley 3 (s'il existe) est un groupe dont les centralisateurs des éléments non triviaux sont abéliens et autonormalisants. Poizat avait posé la question de savoir si les groupes existentiellement clos de la classe vérifiant la propriété précédente, peuvent être des mauvais groupes. Il s'avère qu'un groupe est CSA si et seulement si le centralisateur de tout élément non trivial est abélien et autonormalisant. Par conséquent, la classe des groupes CSA devient une source potentielle de contre-exemples à la conjecture d'Algebricité. Dans le premier chapitre, les travaux présentés montrent que les groupes CSA existentiellement clos sont similaires aux mauvais groupes d'un point de vue algébrique, à savoir qu'ils sont simples et que leurs sous-groupes de Borels sont conjugués, mais qu'ils sont loin d'avoir les propriétés modèles-théoriques requises, à savoir qu'ils ne sont pas ω-stables. En outre, ils ne sont mêmes pas superstables, ce qui répond à une question de Wagner.

La démonstration de la non superstabilité des groupes CSA existentiellement clos repose sur le calcul du nombre des types au-dessus d'un ensemble donné de paramètres. La non ω-stabilité repose sur la preuve de l'existence de $2^{\aleph_0}$ groupes CSA de type fini dont les diagrammes sans-quantificateurs sont interprétés comme des types sur l'ensemble vide réalisés dans les groupes CSA existentiellement clos. Comme la théorie universelle d'un groupe libre possède au plus un nombre dénombrable de modèles de type fini (ou autrement dit de groupes limites) et comme ses modèles sont des groupes CSA, la superstabilité de ces derniers s'imposait naturellement. Mustafin et Poizat [MP06] ont montré qu'un groupe superstable qui est un modèle de la théorie universelle d'un groupe libre est abélien. Dans le premier chapitre est présenté une preuve plus courte de ce dernier résultat, dont le schéma se généralise aussi aux groupes hyperboliques sans torsion. Une conséquence est qu'un groupe hyperbolique sans torsion superstable est cyclique. D'autres propriétés des groupes superstables, incluant ceux qui sont CSA, sont aussi étudiées.

Un autre travail présenté dans le premier chapitre concerne les groupes superstables ayant des propriétés de finitude résiduelle dans une pseudovariété. Une classe de groupes $\mathcal{C}$ est une pseudovariété, si elle est close par sous-groupe, par quotient et par produit cartésien fini. Un groupe G est dit *résiduellement-$\mathcal{C}$*, si pour tout élément non trivial $g \in G$, il existe un homomorphisme $\phi : G \to C \in \mathcal{C}$, tel que $\phi(g) \neq 1$. La structure de tels groupes superstables est donnée, ils sont résolubles-par-poly-$\mathcal{C}$, autrement dit il existe une chaîne $G_0 \trianglerighteq G_1 \cdots \trianglerighteq G_n = G$ telle que G_0 est résoluble et G_{i+1}/G_i est dans $\mathcal{C}$ $(0 \leq i \leq n-1)$.

En théorie des modèles, on cherche aussi à distinguer les groupes entre eux par des formules du premier ordre ; i.e. étant donné deux groupes, qui ont des propriétés similaires, peut-on trouver une formule vraie dans l'un et fausse dans l'autre ? L'un des célèbres problèmes dans ce contexte est la conjecture de Tarski, énoncée vers 1945, qui déclare que deux groupes libres non abéliens ont la même théorie élémentaire, ou autrement dit on ne peut pas distinguer les groupes libres (non abéliens) par des formules du premier ordre. Cette conjecture a été résolue positivement par Miasnikov et Kharlampovich [KM06] et indépendamment par Sela [Sel06b]. Les méthodes utilisées par Sela sont de nature très géométrique, dont les outils principaux consistent en les limites des actions sur les arbres, la décomposition des groupes agissants sur des arbres réels et vérifiant des propriétés de stabilité (au sens de la géométrie, qui est connue sous le nom de la théorie de Rips), les décompositions JSJ et l'argument de racourcissement. Sela généralise ses méthodes aux groupes hyperboliques sans torsion [Sel09] et très récemment aux produits libres [Sel10].

Comme les groupes libres partagent beaucoup de propriétés algébriques avec les mauvais groupes (voir le chapitre 2), et vu le succès des méthodes de Sela dans l'étude de leur théorie élémentaire, il devient naturel de se demander si on peut construire des groupes qui approchent les mauvais groupes

dans le cadre des actions sur les espaces métriques, plus particulièrement les arbres simpliciaux et réels.

Dans le second chapitre est présenté le travail sur les groupes superstables qui agissent sur les arbres. La possibilité d'avoir des groupes de rang de Morley fini ou superstables dans le contexte des groupes qui agissent sur les arbres est étudié. En ce qui concerne les groupes de rang de Morley fini, la preuve, quoique simple, que toutes leurs actions sur les arbres simpliciaux sont triviales est obtenue. Ceci dit, le cas des actions sur les arbres réels reste mystérieux, et il n'est pas exclu de trouver des groupes intéressants d'un point de vue de la théorie des modèles.

En ce qui concerne les groupes superstables, des configurations qui permettent d'avoir des groupes superstables qui ne soient pas ω-stables sont exhibées. Ces configurations sont très complexes, et même en rajoutant des hypothèses drastiques, elles ne semblent pas être à portée de la main. Ces configurations ne paraissent pas absurdes. S'il s'avère qu'elles peuvent se produire, alors ça permettrait d'avoir des exemples de groupes simples superstables non ω-stables, et ainsi donneraient des contre-exemples à la conjecture de Berline, précédemment citée, généralisant celle de Cherlin-Zil'ber. Si dans le cas contraire, ces configurations ne sont pas réalisables, cela permettrait d'avoir une très bonne classification des groupes superstables qui agissent sur les arbres simpliciaux.

Nies [Nie03a] avait étudié en 2003 l'homogénéité du groupe libre de rang 2 et il a démontré qu'il est existentiellement homogène mais pas premier. Un modèle est *premier* s'il se plonge élémentairement dans tout modèle de sa théorie élémentaire. Quant à l'homogénéité, c'est une propriété qui peut être comparée à la saturation. Plus précisément, un modèle *dénombrable* est homogène, si pour n'importe quels deux uplets qui satisfont les mêmes formules, il existe un automorphisme qui envoie l'un sur l'autre. Un groupe dénombrable est *saturé* si et seulement s'il est homogène et réalise tous les types de sa théorie élémentaire sur l'ensemble vide.

Dans le chapitre 3 les résultats sur l'homogénéité existentielle des groupes hyperboliques sans torsion à deux générateurs sont présentés. En plus d'être existentiellement homogènes, les groupes hyperboliques sans torsion à deux générateurs non libres sont premiers, contrairement aux groupes libres. Cette dernière propriété permet de distinguer, d'un point de vue de théorie des modèles, le groupe libre de rang 2 parmi les groupes hyperboliques sans torsion à deux générateurs.

Un groupe de type fini G est dit *QFA*, pour *quasi-finiment axiomatisable*, s'il existe une formule (close), qu'il satisfait, telle que tout groupe de type fini qui la satisfait est isomorphe à G. Nies [Nie03b] a démontré que le groupe nilpotent libre de rang et de classe 2 est QFA et premier. Oger et Sabbagh [OS06] démontrent que ces dernières propriétés sont aussi vraies pour tout groupe nilpotent libre non abélien de rang fini. En outre, ils montrent que pour tout groupe nilpotent de type fini, être premier est équivalent à être QFA. Les caractérisations données par Oger et Sabbagh ont été généralisées par Oger [Oge06] aux groupes nilpotents-par-fini (de type fini) et plus récemment par Lasserre [Las11] aux groupes polycycliques-par-fini (de type fini). Lasserre [Las11] montre aussi que les groupes de Thompson (F et T) sont bi-interprétables avec l'arithmétique. De ce résultat combiné avec un résultat montrée par Khelif [Khe07], Lasserre déduit que les groupes de Thompson (F et T) sont QFA.

Une des questions qui était posée dans ce contexte, est de savoir si tout groupe premier est QFA. Dans [Nie07], Nies démontre l'existence de $2^{\aleph_0}$ groupes de type fini premiers deux à deux non isomorphes. Comme conséquence, Nies obtient des groupes premiers mais non QFA. Cependant, ces groupes G sont *quasi axiomatisables*, i.e. tout groupe de type fini élémentairement équivalent à G lui est isomorphe. Le problème restait de savoir s'il existe un groupe premier qui ne soit pas quasi axiomatisable. En utilisant les résultats de Sela sur la théorie élémentaire des groupes hyperboliques sans torsion, on démontre que ceux à deux générateurs ne sont pas quasi axiomatisables. Il s'ensuit que les groupes hyperboliques sans torsion à deux générateurs non libres sont des groupes premiers mais non quasi axiomatisables, ce qui répond à la question suggérée par Nies [Nie07]. Ces résultats

sont présentés dans le troisième chapitre.

L'homogénéité existentielle est une variante forte d'homogénéité. Suite au résultat de Nies, il devient naturel de l'étudier pour les groupes libres de rang supérieur. Il s'avère que l'homogénéité existentielle des groupes libres est liée au comportement des sous-groupes existentiellement clos. Les résultats qui vont dans cette direction seront exposés dans le chapitre 4. Dans le même chapitre, l'homogénéité des groupes libres est démontrée. Ce dernier résultat est aussi démontré indépendamment par C. Perin et R. Sklinos [PS10].

La notion de clôture algébrique en théorie des modèles est une généralisation de la notion similaire en théorie des corps. Dans un corps K, si L est un sous-corps, on dit d'un élément b de K qu'il est algébrique sur L, s'il existe un polynôme $P(x)$, à coefficients dans L, tel que b est une racine de P. La théorie des modèles généralise cette notion en déclarant qu'un élément b est algébrique sur un ensemble de paramètres A, dans un modèle $\mathcal{M}$, s'il existe une formule $\phi(x)$ telle que $\phi(b)$ est vraie dans $\mathcal{M}$ et telle que l'ensemble des éléments qui satisfont ϕ est fini. Bien sûr les deux notions précédentes coïncides dans le cadre de la théorie des corps algébriquement clos.

La clôture algébrique joue un rôle important dans l'étude des théories de dimension finie, plus particulièrement dans les théories fortement minimales. Plus généralement, elle est utilisée dans l'étude des théories stables. Sela [Sel06c] a démontré en 2006, que les groupes libres sont stables. Lors d'une conférence à Anogia en 2008, Sela pose la question de savoir si la clôture algébrique coïncide avec la clôture définissable dans un groupe libre.

Dans le chapitre 5 sont exposés les résultats de l'étude de la clôture algébrique et définissable dans les groupes libres, étude réalisée en commun avec D. Vallino. Parmi les résultats obtenus, nous montrons qu'un groupe hyperbolique sans torsion est constructible au-dessus de la clôture algébrique de n'importe quel sous-groupe non abélien, en utilisant des produits libres amalgamés et HNN-extension sur les groupes cycliques. Cela montre en particulier que la clôture algébrique de n'importe quel ensemble de paramètres A est un sous-groupe de type fini, quasi-convexe et hyperbolique. Si le groupe ambiant est libre, alors son rang est borné par celui dudit groupe ambiant. Le lien entre la clôture algébrique et celle définissable est étudié, et on obtient que la clôture définissable est un facteur libre de la clôture algébrique. Un contre-exemple à la question posée par Sela est donné. Dans le même chapitre, le lien entre la clôture algébrique et les décompositions JSJ est apporté. Étant donné un groupe libre F et un sous-groupe A non abélien, la clôture algébrique de A coïncide avec (le voisinage elliptique abélien) du groupe de sommet contenant A dans la décomposition JSJ cyclique de F relative à A. Ce résultat lie deux notions issues de deux branches différentes : la clôture algébrique, une notion purement modèle-théorique, et la décomposition JSJ, une notion issue de la théorie géométrique des groupes.

Le présent mémoire s'organise autour de plusieurs thèmes déclinés dans les six prochains chapitres. Le premier chapitre s'articule autour des groupes superstables et le matériel exposé est extrait de [OH04, OH08a, OH07b]. Il traite plus particulièrement de la propriété CSA et des propriétés résiduelles des groupes superstables. Dans le second chapitre, est présentée l'étude des actions des groupes superstables sur les arbres simpliciaux et réels venant de [OH08b]. Le troisième chapitre traite de l'homogénéité existentielle et la primalité des groupes hyperboliques sans torsion non libres à deux générateurs. Au quatrième chapitre, est étudié l'homogénéité et l'homogénéité existentielle des groupes libres. Ces deux chapitres sont tirés de [OH11a]. En ce qui concerne le cinquième chapitre, il traite de la clôture algébrique et définissable dans les groupes libres et est issu de [OH11c]. Pour le sixième chapitre, celui-ci contient le travail sur les cônes asymptotiques des groupes de présentation finie qu'on retrouve dans [OH11b].

Introduction in English

The central theme of geometric group theory is the study of groups as "geometric objects", i.e., metric spaces such as, for example by providing them with the word metric, or with their actions on geometric objects such as metric spaces, usually by isometries. This is a theory in the continuity of combinatorial group theory which focuses, among other things, on algorithmic problems in groups, whose origins date back to the work of Dehn on the word problem in surfaces groups.

This geometric approach to group theory is illustrated in the fundamental work of Gromov and virtual nilpotency of groups with polynomial growth is a remarkable example [Gro81]. A class of finitely generated groups studied in this context is that of hyperbolic groups introduced by Gromov [Gro87]. A finitely generated group is hyperbolic if its Cayley graph, with respect to a finite generating system, is a hyperbolic space (in the sense of Gromov), i.e., a space whose geodesic triangles are very slim. This class includes, for example, free groups as well as fundamental groups of compact manifolds with negative curvature. A hyperbolic group is a geometric object seen through the Cayley graph that satisfies a condition of curvature, but within the continuity of combinatorial theory ; it also has a "strongly" solvable word problem, it is characterized by a Dehn presentation.

Hyperbolic graphs (in the sense of Gromov) can be considered as a generalization of simplicial trees. Bass-Serre theory [Ser80] shows that a group acts (by isometries and nontrivially)) on a simplicial tree if and only if it is an iteration of amalgamated free products and of HNN-extensions. By the notion of graph of groups, this theory gives a complete description of groups acting on simplicial trees. Then it becomes natural to consider the broader context of actions on real trees. This study was initiated by Tits, Lyndon, Bass, Chiswell, among others, followed by Morgan and Shalen who have conjectured that a finitely generated group acting freely on a real tree is a free product of free abelian groups and of surfaces groups. Through the concept of "system of isometries" and the trees associated, Rips proves the conjecture of Morgan-Shalen and also describes the structure of finitely generated groups acting on real trees, and satisfying *stability* properties (in the sens of geometric group theory), similar to those met by groups acting on simplicial trees. Gaboriau, Levitt and Paulin [GLP94] generalize and give a shorter proof of the Rips theorem on the Morgan-Shalen conjecture. Bestvina and Feighn [BF95] study stables actions of finitely presented groups on real trees. Rips and Sela [RS94] develop a more complete description, and then Sela [Sel97a] generalizes these results to finitely generated groups. More recently, Guirardel [Gui08] extends this description to a general framework.

In geometric group theory, the following general problem is studied : "Given a finitely generated group G and a class of subgroups $\mathcal{C}$, what is the relationship between the various graphs of groups decompositions of G, where the associated edges groups are in $\mathcal{C}$? " The ancestor of this type of problem is certainly the case where the class $\mathcal{C}$ is reduced to the trivial group. The Kurosh and Grushko theorem supplies a decomposition in free products (i.e., $\mathcal{C}$ is reduced to the trivial group), which is in some sense canonical. From this, one can obtain all other free products decompositions. Studying the existence of such canonical decompositions for more general classes $\mathcal{C}$ of subgroups comes naturally.

Schematically, a *JSJ-decomposition* (or JSJ-splitting), relative to $\mathcal{C}$, corresponds to the most possible canonical decomposition of G from which all other decompositions (relative to $\mathcal{C}$) can be obtained. The origin of the JSJ-decompositions theory goes back to the work of Johannson, Jaco and Shalen [Joh79, JS79]. They have developed a theory of cutting irreducible three-dimensional manifolds into pieces along tori. A purely group-theoretical version was defined later by Kropholler [Kro90] for certain classes of groups. Sela [Sel97b] constructed JSJ-decompositions of torsion-free hyperbolic groups, relative to the class of cyclic subgroups. Rips and Sela [RS97] have generalized them to finitely presented groups. Other constructions of JSJ-decompositions were carried out by several authors [Bow98, DS99, FP06, DS00, SS03]. More recently, a general framework and a precise definition was developed by Levitt and Guirardel [GL09, GL10].

Asymptotic cones were introduced by Gromov [Gro81] to show that groups with polynomial growth are virtually nilpotent. Van den Dries and Wilkie [WvdD84] gave a definition which applies to any finitely generated group. It uses nonstandard analysis, especially ultrafilters. Gromov [Gro93] asks the question of whether a finitely generated (finitely presented) group may have two non-homeomorphic asymptotic cones. The first examples of finitely generated groups with such a property were provided by Thomas and Velicovic [TV00]. Then Drutu and Sapir [DS05] constructed a finitely generated group with $2^{\aleph_0}$ pairwise non-homeomorphic asymptotic cones. All these groups are not finitely presented. Kramer, Shelah, Tent and Thomas [KSTT05] gave an example of a finitely presented group H, which has, up to homeomorphisms, a unique asymptotic cone if the continuum hypothesis holds, and (the maximum number) $2^{2^{\aleph_0}}$ asymptotic cones otherwise. Ol'shanskii and Sapir [OS07] constructed a finitely presented group with two non-homeomorphic asymptotic cones. The problem was whether there is a finitely presented group with an infinite number of pairwise non-homeomorphic asymptotic cones, independently of the continuum hypothesis.

In Chapter 6, in collaboration with Denis Osin, we construct a finitely presented group with infinitely many pairwise non-homeomorphic asymptotic cones. Generally, to distinguish non-homeomorphic spaces, topological invariants are used. For a metric space X, the *connectivity degree* of X, denoted as $c(X)$ is defined as the minimum number of points whose removing make X disconnected. Obviously, the connectivity degree of a metric space is a topological invariant. We construct finitely presented groups Γ, having for every prime p an asymptotic cone C such that $c(C) = p$.

The construction is based on two main ingredients, which can be described as follows. In [OOS09], a construction with central extensions of groups, is used to produce finitely generated recursively presented groups with asymptotic cones with different degrees of connectivity. The first ingredient is a refinement of this method to obtain an infinite number of asymptotic cones with different degrees of connectivity.

The second ingredient is the refinement of a result of my thesis [OH03, OH07a] corresponding to embeddings in finitely presented groups. The famous Higman theorem argues that any finitely generated recursively presented group embeds in a finitely presented group. In this context, properties held by this kind of embeddings are investigated. Remeslennikov had asked in 1976 the problem of whether any countable abelian group embeds in the center of a finitely presented group. Motivated by this problem, it is shown in my thesis [OH03, OH07a] that any recursively presented group G embeds in a finitely presented group Γ such that the center of G coincide with that of Γ, which give a positive answer to the problem. The refinement consists of proving that the construction used in [OH03, OH07a] preserves properties of geometric nature, namely the distortion of the embedding is *quadratic* in the sense that the length of any element of G, computed with respect to G is bounded by the square of its length, computed in Γ. By leaning on other properties, in particular on constricted properties, the final step is to combine the two refinements to obtain the desired finitely presented groups.

As its central theme, model theory has the study of "algebraic objects" in a very general

framework. It is a branch of mathematical logic that studies, in part, the relations between formal language and models or mathematical structures and their first order properties. For instance, all fundamental mathematical structures of algebra, among which groups, rings, fields, vector spaces, are included in this unified framework. Model theory of groups is the part of model theory devoted to the study of model-theoretics properties of groups.

A first order property is a property that can be expressed by a set of first order sentences, where a sentence is simply an expression by universal and existential quantifiers on the elements of the model. In the language of group theory, one can express that a group is abelian by the formula, $\forall x \forall y(xy = yx)$, as one can express that the center of a group is nontrivial by the formula $\exists x \forall y(x \neq 1 \wedge xy = yx)$. The elementary theory of a group is the set of all first order sentences that it satisfies.

The Löwenheim-Skolem theorem [Mar02, Hod93], states that a consistent theory, having infinite models, has models of cardinality λ for all large enough λ. In the context of group theory, this means the existence of groups of any cardinality satisfying the elementary theory of a given infinite group. Therefore, one can see the elementary theory of a group across all groups that satisfy it in all cardinalities. For example, if an elementary theory of a group is $\aleph_0$-categorical, i.e., any two countable groups which satisfy it are isomorphic, then G is (uniformly) locally finite and in particular of bounded exponent. If the elementary theory of G is λ-categorical for a $\lambda \geq \aleph_1$ (or equivalently for all $\lambda \geq \aleph_1$, thanks to the fundamental Morley theorem), then G has a notion of dimension, known as the *Morley rank*, which has properties similar to the Zariski dimension in fields. A categorical theory in a uncountable cardinal has a finite Morley rank. The archetypes of groups with this property are (simple) algebraic groups over algebraically closed fields.

The Conjecture of Algebraicity, made by Cherlin and Zil'ber on the late 70's, states the converse : a simple infinite group of finite Morley rank is an algebraic group over an algebraically closed field. Berline [Ber86] offers a stronger version of this conjecture, namely that it must be true for superstable (simple) groups, and also conjectures that every superstable simple group is of finite Morley rank. These conjectures are still open. The general current trend is the belief in counter-examples on the conjecture of algebraicity, whose extreme prototypes are called *bad groups*.

A *CSA* group is a group whose every maximal abelian subgroup is malnormal. It is a widely studied class of groups and includes, for example, torsion-free hyperbolic groups, in particular free groups, limit groups and more generally groups that act freely on Λ-trees. It is also a class that plays an important role in the proof of the Tarski conjecture.

It turns out that a bad group of Morley rank 3 (if it exists) is a group whose centralizers of nontrivial elements are abelian and self-normalizing. Poizat asked the question whether the existentially closed groups in the class of groups satisfying the previous property, can be bad groups. It turns out that a group is CSA if and only if the centralizer of any non-trivial element is abelian and self-normalizing. Therefore, the class of CSA groups is a potential source of counter-examples to the conjecture of algebraicity. In the first chapter, the work presented shows that these groups are similar to bad groups from an algebraic point of view, namely that they are simple and their Borel subgroups are comjugates, but they are far from having the required model-theoretical properties, namely that they are not ω-stable. In addition, they are not even superstable, which answers a question by Wagner.

The proof of the non-superstability of existentially closed CSA-groups is based on the computation of the number of types over a given set of parameters. The non-ω-stability is based on the evidence of the existence of $2^{\aleph_0}$ finitely generated CSA-groups whose quantifier-free types are interpreted as types on the empty set realized in existentially closed CSA-groups. Since the universal theory of a free group has at most countably many finitely generated models (i.e., limit groups) and as its models are CSA-groups, the superstability of these is imposed naturally. Mustafin and Poizat

[MP06] have shown that a superstable model of the universal theory of a free group is abelian. In the first chapter, a shorter proof of this result is presented, whose scheme is generalized also to torsion-free hyperbolic groups. One consequence is that a superstable torsion-free hyperbolic group is cyclic. Other properties of superstable groups, including those that are CSA, are also studied.

Another work presented in the first chapter addresses superstable groups having residual finiteness properties in a pseudo-variety. A class of groups $\mathcal{C}$ is a pseudo-variety if it is closed by subgroup, by quotient and by finite cartesian product. A group G is called *residually-$\mathcal{C}$* if for every non-trivial element $g \in G$, there exists a homomorphism $\phi : G \to C \in \mathcal{C}$ such that $\phi(g) \neq 1$. The structure of such superstable groups is given ; they are solvable-by-poly-$\mathcal{C}$.

In model theory, one also seeks to distinguish groups from each other by first order sentences, i.e., given two groups, which have similar properties, can one find a sentence true in one and false in the other one ? One of the famous problems in this context is the Tarski conjecture, set around 1945, which states that two nonabelian free groups have the same elementary theory, in other words one cannot distinguish between nonabelian free groups by first order sentences. This conjecture was solved positively by Myasnikov and Kharlampovich [KM06] and independently by Sela [Sel06b]. The methods used by Sela are very geometric in nature, whose main tools consist of limits of actions on trees, decomposition of groups acting on real trees and satisfying stability properties (in the sense of geometry, which is known as the Rips theory), JSJ-decompositions and the shortening argument. Sela generalized his methods to torsion-free hyperbolic groups [Sel09] and very recently, to free products [Sel10].

Since free groups share many algebraic properties with bad groups, and given the success of Sela's methods in the study of their elementary theory, it becomes natural to ask whether one can construct groups approaching bad groups in the framework of actions on metric spaces, especially simplicial and real trees.

The second chapter presents the work on superstable groups acting on trees. The possibility of having groups of finite Morley rank or superstable in the context of groups acting on trees is studied. As for groups of finite Morley rank, the proof, though simple, that all their actions on simplicial trees are trivial is obtained. That said, the case of actions on real trees remains a mystery, and is not excluded to find significant groups from a model-theoretical perspective.

As for superstable groups, configurations that allow to have superstable groups that are not ω-stables are shown. These configurations are very complex, and even by adding drastic assumptions, they do not seem easily obtainable. These configurations do not seem absurd. If it turns out that they may occur, than that would provide examples of superstable simple groups non ω-stables, and so would give counter-examples to the above cited Berline conjecture, generalizing that of Cherlin-Zil'ber. If otherwise, these configurations are not feasible, it would provide a classification of superstable groups acting on simplicial trees.

Nies [Nie03a] studied in 2003, the homogeneity of the free group of rank 2 and showed that it is existentially homogeneous but not prime. A model is *prime* if it is elementary embeddable in any model of its elementary theory. Homogeneity is a property that can be compared at saturation. Specifically, a *countable* model is homogeneous, if for any two tuples that satisfy the same formulas, there is an automorphism that sends one to the other. A countable group is saturated if and only if it is homogeneous and realizes all types of its complete theory over the empty set.

In chapter 3, the results on the existential homogeneity of two-generated torsion-free hyperbolic groups are presented. In addition to being existentially homogeneous, two-generated torsion-free hyperbolic groups are prime, unlike the free groups. This property allows to distinguish, from a model-theoretical perspective, the free group of rank 2 among the torsion-free hyperbolic groups with two generators.

A finitely generated group G is called *QFA*, for *quasi-finitely axiomatizable*, if there is a sentence

ϕ, satisfied by G, such that any finitely generated group which satisfies ϕ is isomorphic to G. Nies [Nie03b] showed that the free nilpotent group of rank and class 2 is QFA and prime. Oger and Sabbagh [OS06] show that these properties are also true for any non-abelian free nilpotent group of finite rank. Moreover, they show that for any finitely generated nilpotent group, being QFA is equivalent to being prime. Charcterizations given by Oger and Sabbagh was generalized by Oger [Oge06] to finitely generated finite-by-nilpotent groups and more recently by Lasserre [Las11] to finitely generated polycyclic-by-finite groups. Lasserre [Las11] shows also that Thompson groups (T and F) are bi-interpretable with the arithmetic. From this result combined with a result given by Khelif [Khe07], Lasserre deduce that Thompson groups (T and F) are QFA.

One question that was asked in this context is whether any (finitely generated) prime group is QFA. In [Nie07], Nies constrcuts continuously many pairwise non-isomorphic finitely generated prime groups. As a consequence, Nies deduce the existence of a prime group which is not QFA. These groups are *quasi axiomatizable*. A finitely generated group G is quasi axiomatizable, if any finitely generated group elementarily equivalent to G is isomorphic to G. The issue was whether there is a prime group which is not quasi axiomatizable. Using Sela's results on the elementary theory of hyperbolic groups, we deduce that two-generated torsion-free hyperbolic groups are not quasi axiomatizable. It follows that those which are non-free are not quasi axiomatizable but prime, which answers the question proposed by Nies [Nie07]. These results are presented in the third chapter.

Existential homogeneity is a strong variant of homogeneity. Following Nies's result, it becomes natural to study the homogeneity of free groups of higher rank. It turns out that the existential homogeneity of free groups is related to the behavior of existentially closed subgroups. The results in this direction will be discussed in chapter 4. In the same chapter, the homogeneity of free groups is obtained. This last result is also proved independently by C. Perin and R. Skilons [PS10].

The notion of algebraic closure in model theory is a generalization of the similar notion of fields theory. Given a field K and subfield L, an element b from K is algebraic over L, if b is a root of a polynomial with coeficients from L. Model theory generalizes this notion by declaring that an element b is algebraic over a set of parameters A, in a given model $\mathfrak{M}$, if there exists a formula $\phi(x)$, such that $\phi(b)$ holds in $\mathfrak{M}$ and such that the set of elements that satisfy ϕ is finite. Of course, the two preceding notions coincide in the algebraically closed fields theory.

The algebraic closure plays an important role in finite-dimensional theories, most particularly in strongly minimal theories. More generally, it is used in stable theories. In 2006, Sela [Sel06c] proved that free groups are stable. At a conference in Anogia in 2008, Sela asked whether the algebraic closure coincides with the definable closure in a free group.

In chapter 5, the results of the study of algebraic and definable closures in free groups is discussed, a study carried out with D. Vallino. Among the obtained results, we show that a torsion-free hyperbolic group can be built over the algebraic closure of any nonabelian subgroup, by using amalgamated free products and HNN-extension along cyclic subgroups. This shows, in particular, that the algebraic closure of any set of parameters A is finitely generated, quasi-convex, and hyperbolic. If the ambient group Γ is free, then its rank is bounded by that of Γ. The relationship between the algebraic and definable closures is studied and it is showed that the definable closure is a free factor of the algebraic closure. A counter example to the question asked by Sela is given. In the same chapter, the relationship between the algebraic closure and the JSJ-decompositions is given. Given a free group F and nonabelian subgroup A, the algebraic closure of A coincides with the (abelian neighborhood) vertex group containing A in the cyclic JSJ-decomposition of F relative to A. This result relates two concepts from two different branches : the algebraic closure, a purely model-theoretic notion, and the JSJ-decomposition, a concept of geometric group theory.

This report is organized around several themes defined in the next six chapters. The first chapter focuses on superstable groups and the material discussed is extracted from [OH04, OH08a,

OH07b]. It particularly deals with the CSA property and residual properties of superstable groups. In the second chapter, the presented study of superstable group actions on simplicial or real trees come from [OH08b]. The third chapter deals with the existential homogeneity and the primality of two-generated torsion-free, non-free, hyperbolic groups. In the fourth chapter, homogeneity and existential homogeneity of free groups is studied. These two chapters are taken from [OH11a]. With regard to the fifth chapter, it deals with algebraic and definable closure in free groups which come from [OH11c]. The sixth chapter contains work on asymptotic cones of finitely presented groups which can be found in [OH11b].

Chapitre 1

Groupes superstables

Étant donné un corps algébriquement clos de caractéristique p et de cardinal $\lambda \geq \aleph_1$, tout corps satisfaisant les mêmes propriétés lui est isomorphe. Cela suggère de définir un analogue en théorie des modèles, en déclarant qu'une théorie T dans un langage du premier ordre est *λ-catégorique* si tous ses modèles de cardinal λ sont isomorphes. Cette notion a été introduite par J. Łoś [Łoś54] et R. Vaught [Vau54] en 1954, et J. Łoś pose le problème de savoir si une théorie qui est catégorique en un cardinal non dénombrable donné, est catégorique en tout cardinal non dénombrable. On voit bien qu'il faut exclure les modèles dénombrables, car il est bien connu que la théorie des corps algébriquement clos en une caractéristique fixée n'est pas $\aleph_0$-catégorique, et que cette dernière propriété n'entraîne pas la catégoricité en des cardinaux non dénombrables, comme en témoigne l'exemple des ordres denses sans extrémités.

Dans un travail fondateur, qui marque le début de la théorie des modèles moderne, M. Morley [Mor65] prouve la conjecture de Łoś[1]. Parmi les ingrédients de la preuve, figure une notion de rang de Cantor-Bendixson associée à une théorie, qui est connue par la suite sous le nom de *rang de Morley*.

Définition 1.0.1. *Soit $\mathfrak{M}$ un modèle et ${}^*\mathfrak{M}$ une extension $\aleph_0$-saturée de $\mathfrak{M}$. Soit $\mathfrak{B}_n$ l'ensemble des sous-ensembles définissables de $\mathfrak{M}^n$. Le rang de Morley de $X \in \mathfrak{B}_n$ est définie par $RM(X) = RC(X)$, où RC désigne le rang de Cantor de X calculé dans ${}^*\mathfrak{M}$ relativement à $\mathfrak{B}_n$.* □

Une théorie T est dite *totalement transcendante* si, pour tout modèle $\mathfrak{M} \models T$, tout ensemble $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$-définissable a un rang de Morley ordinal. Il est bien connu qu'une théorie ω-stable est totalement transcendante et que l'inverse est vrai si le langage considéré est dénombrable. C'est un théorème de J.T. Baldwin [Bal73] qu'une théorie dénombrable $\aleph_1$-catégorique a un rang de Morley fini. Sous l'hypothèse de la superstabilité, G. Cherlin, L. Harrington et A.H. Lachlan [CHL85] montrent qu'une théorie (superstable) $\aleph_0$-catégorique a un rang de Morley fini. J.T. Baldwin et A.H. Lachlan [BL71] démontrent une caractérisation des théories λ-catégoriques ; à savoir qu'une théorie est λ-catégorique si et seulement si elle est ω-stable et n'a pas de paire de Vaught. Ce qui permet d'avoir une nouvelle preuve du théorème de M. Morley.

Rappelons qu'une théorie T est dite *λ-stable*, si pour tout ensemble de paramètres A de cardinal λ, le cardinal de l'espace des types sur A ne dépasse pas λ. D'après la classification de S. Shelah [She71, She91], une théorie T est dans une des trois configurations suivantes :

- T est *instable*, autrement dit il n'existe aucun cardinal λ telle que T est λ-stable ;
- T est *superstable*, autrement dit T est λ-stable pour tout cardinal $\lambda \geq 2^{\aleph_0}$;

[1] Pour une preuve dans un langage légèrement plus moderne et qui est dans l'esprit de la preuve originale, le lecteur intéressé pourra consulter [CK73].

• T est λ-stable si et seulement si $\lambda^{\aleph_0} = \lambda$.

A l'instart des théories ω-stables, qui sont caractérisées par le rang de Morley, les théories superstables peuvent être caractérisées par deux types de rangs, le *rang de Shelah* et le *rang de Lascar*. Bien que le rang de Shelah est très puissant, nous utiliserons dans la suite, comme cela est souvent le cas, le rang de Lascar qui possède des propriétés d'additivité plus souples.

Définition 1.0.2. *Soit T une théorie et $\mathfrak{C}$ un modèle monstre de T. Le rang de Lascar est la plus petite fonction U de la classe des types de T (à paramètres dans $\mathfrak{C}$) dans la classe des ordinaux qui satisfait : $U(p) \geq \alpha + 1$ si et seulement si p a une extension déviante q avec $U(q) \geq \alpha$.* □

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux groupes superstables, c'est-à-dire les groupes dont la théorie élémentaire est superstable, soumis à des contraintes de nature algébrique. Dans la première section, nous présenterons une courte introduction au sujet et des résultats généraux. La seconde section sera consacrée aux groupes superstables CSA. Ce sujet est lié à l'existence des *mauvais groupes* qui peuvent être vus comme les contre-exemples extrêmes à la Conjecture d'Algebricité. Dans la dernière section, nous présenterons les résultats sur les groupes superstables avec des propriétés résiduelles, où nous donnerons la structure de tels groupes.

1.1 Généralités

Un des problèmes naturels dans le contexte de la théorie des modèles des groupes, est de voir ce qu'on peut dire sur les groupes $\aleph_0$-catégoriques et les groupes catégoriques en un cardinal non dénombrable. Il découle immédiatement, des résultats bien connus, qu'un groupe $\aleph_0$-catégorique est *localement uniformement fini*, en particulier d'exposant borné. Par conséquent le problème a des liens importants avec les groupes finis et leurs classification. U. Felgner [Fel78] et indépendamment W. Baur, G. Cherlin et A. Macintyre [BM79] démontrent qu'un groupe stable $\aleph_0$-catégorique est virtuellement nilpotent et ces derniers conjecturent qu'il doit être abélien-par-fini [2]. B. Poizat [Poi01] en donne une preuve différente. Il convient de signaler, qu'un groupe stable est un $\mathfrak{M}_c$-groupe, et qu'en utilisant le théorème d'O.H. Kegel [Keg89] démontré ultérieurement, un $\mathfrak{M}_c$-groupe $\aleph_0$-catégorique est virtuellement nilpotent.

Comme cela a été signalé plus haut, une théorie catégorique en un cardinal non dénombrable a un rang de Morley fini, ce qui est vrai en particulier pour les groupes. Par conséquent, l'étude des groupes catégoriques en un cardinal non dénombrable se ramène à celle des groupes de rang de Morley fini. B. Zil'ber [Zil77] montre la réciproque pour les groupes simples ; i.e. un groupe simple de rang de Morley fini est catégorique en un cardinal non dénombrable. En l'état actuel des connaissances, il n'est pas connu si un groupe simple superstable est catégorique en un cardinal non dénombrable ou d'une façon équivalente s'il est de rang de Morley fini. Signalons à ce propos, qu'il est démontré par J. Gagelman [Gag05], que tout goupe de rang de Lascar fini, qui satisfait la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables est de rang de Morley fini. En particulier, cela a comme conséquence que tout groupe stable définissable dans une théorie o-minimale est totalement transcendant. Rappelons qu'un groupe satisfait *la condition de chaîne descendante* sur les sous-groupes définissables, si toute suite descendante de sous-groues définissables est stationnaire.

Dans les théories stables, on peut développer une notion "d'indépendance" qui a des propriétés comparables à celles existantes en géométrie algébrique. Sous l'hypothèse de la suprstabilité, une théorie générale de *"dimension"* peut être développée, et cela inclus, bien évidement, les théories

[2] Pour les résultats les plus récents sur cette conjecture, le lecteur intéréssé peut consulter [Bag09]

ayant un rang de Morley fini où dans ce contexte on utilise le rang de Morley plutôt que celui de Lascar.

G. Cherlin et B. Zil'ber ont étudié indépendamment les groupes ω-stables et ont établi des liens avec les groupes algébriques. Pour les groupes stables, B. Poizat définit les *types génériques* qui ont des propriétés comparables aux points génériques en géométrie algébrique. La *Conjecture d'Algebricité*, énoncée pour les groupes ω-stables par B. Zil'ber et pour les groupes de rang de Morley fini par G. Cherlin, stipule qu'*un groupe simple infini de rang de Morley fini (ou ω-stable) est algébrique sur un corps algébriquement clos.* La philosophie sous-jacente est que d'une part, il n'existe pas d'autres groupes simples de rang de Morley fini, à part ceux qu'on connaît déjà, et d'autres part qu'on peut *reconstruire* toute la géométrie algébrique à partir seulement de la notion de dimension.

Dans son travail sur les groupes de rang de Morley fini, B. Zil'ber démontre le fameux "Théorème des Indécomposables". Celui-ci peut être vu comme une généralisation du théorème en géométrie algébrique qui affirme que le sous-groupe engendré par l'union de sous-ensembles irréductibles constructibles contenant l'élément neutre, dans un groupe algébrique, est fermé et irréductible.

Dans un travail fondamental, Ch. Berline et D. Lascar [BL86] développent des techniques et des notions qui permettent d'étudier efficacement les groupes superstables et donnent ainsi des fondations à ce domaine. Ils exploitent les propriétés d'additivité de rang de Lascar, pour étudier les sous-groupes $\bigwedge$-définissables et les types génériques dans les quotients. En particulier, ils généralisent des résultats sur les groupes de rang de Morley fini. Ch. Berline [Ber86], conjecture qu'un groupe simple superstable est ω-stable de rang de Morley fini et qu'un groupe simple superstable est algébrique sur un corps algébriquement clos ; ce qui est une version forte de la Conjecture d'Algébricité.

Ch. Berline et D. Lascar [BL86], généralisent aussi le théorème des indécomposables de Zil'ber aux groupes superstables, qui devient par la suite un outil indispensable pour l'étude de ces derniers. Pour l'énoncer, nous aurons besoin de quelques définitions. Rappelons que tout ordinal α peut s'écrire sous sa *forme de Cantor*

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_m} n_m,$$

où $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ est un suite d'ordinals qui satisfait $\gamma_1 > \cdots > \gamma_m$ et où $(n_1, \ldots, n_m)$ est une suite d'entiers naturels strictement positifs.

Soit G un groupe supserstable[3]. On désigne par U le rang de Lascar. Soit α un ordinal et X un sous-ensemble $\bigwedge$-definissable G. On dit que X est *α-indécomposable* si, pour tout sous-groupe définissable H de G,

$$U(X/H) \geq \omega^\alpha \text{ ou } |X/H| = 1,$$

où X/H désigne le quotient de X par H.

Soit β un ordinal et $F(\beta)$ la famille des sous-groupes H définissables de G tels que $U(G/H) < \omega^\beta$. La *composante β-connexe* de G, notée $G^{(\beta)}$, est définie par $\bigcap\{H; H \in F(\beta)\}$. On dit que G est *β-connexe* si $G = G^{(\beta)}$. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème des indécomposables.

Théorème 1.1.1. [BL86, V.3, Theorem 3.1] *Soit G un groupe superstable et écrivons $U(G)$ sous sa forme de Cantor, $U(G) = \omega^\alpha n + \omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_m} n_m$. Soit $\{X_i; i \in I\}$ une famille de sous-ensembles de G, $\bigwedge$-définissables, α-indécomposables et tel que chaque X_i contient l'élément neutre. Alors le sous-groupe H engendré par $\bigcup_{i\in I} X_i$ est $\bigwedge$-définissable et α-connexe. Si chaque X_i est définissable (ou si G est ω-stable) alors H est définissable.* □

[3]Les définitions données et le Théorème 1.1.1 sont valables dans un contexte plus général, mais par soucis de simplicité nous avons choisi de ne considérer que les groupes superstables. Le lecteur intéressé peut consulter [BL86] pour plus de détails. Il convient aussi de signaler qu'une version du théorème des indécomposables existe dans la cadre des groupes supersimples [Wag00].

Il est bien connu que pour tout groupe fini G, il existe une suite de sous-groupes $G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$ telle que G_{i+1}/G_i est ou bien simple ou résoluble. A. Baudisch [Bau90] montre la même propriété pour les groupes superstables.

Théorème 1.1.2. [Bau90] *Soit G un groupe superstable infini. Alors il existe une suite de sous-groupes $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$ telle que G_{i+1}/G_i est infini et est ou bien abélien ou simple modulo un centre fini.* □

Soit G un groupe superstable et écrivons $U(G)$ sous sa forme de Cantor, $U(G) = \omega^{\alpha}n + \omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_m}n_m$. La composante α-connexe $G^{(\alpha)}$ de G n'est pas forcément définissable et cela rend l'étude de G plus complexe. Dans le travail sur les groupes superstables ayant des propriétés résiduelles, exposé dans la dernière section de ce chapitre, nous avons cherché à trouver des sous-groupes définissables qui soient α-connexe et normaux et qui soient, dans un certain sens, prochent de la composante α-connexe. Nous avons établi le résultat suivant, extrait de [OH07b] et qui donne une alternative ; à savoir qu'un groupe superstable a ou bien un "gros" groupe normal α-connexe, ou bien un "gros" groupe normal nilpotent.

Théorème 1.1.3. [OH07b, Proposition 2.4] *Soit G un groupe superstable et écrivons $U(G)$ sous sa forme de Cantor, $U(G) = \omega^{\alpha}n + \omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_m}n_m$. Alors ou bien la composante α-connexe $G^{(\alpha)}$ de G contient un sous-groupe définissable α-connexe et normal H tel que $U(H) \geq \omega^{\alpha}$ ou bien $G^{(\alpha)}$ est incluse dans un sous-groupe définissable et nilpotent H tel que $U(H) \geq \omega^{\alpha}n$.* □

La preuve du théorème précédent repose essentiellement sur le Théorème des Indécomposables. En procédant par induction sur le rang, ce qui est souvent la cas dans ce cadre, le Théorème 1.1.3 permet de donner une preuve plus simple du Théoreme 1.1.2. Signalons aussi qu'A. Tsuboi [Tsu92] donne une autre preuve du Théoreme 1.1.2.

Un groupe de rang de Morley fini satisfait la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables. On déduit l'existence d'un plus petit sous-groupe définissable d'indice fini, appellé la *composante connexe* de G et noté G°. La situation est légèrement différente dans le contexte des groupes superstables. Ces derniers satisfont seulement *la condition de chaîne descendante avec indice infini* ; c'est-à-dire, toute suite descendante de sous-groupes définissables, chacun est d'indice infini dans son prédécesseur, est *finie*. Cela n'empêche pas de définir la composante connexe comme l'intersection de tous les sous-groupes définissables d'indice fini.

Dans un groupe G de rang de Morley fini, G/G° est fini. Il est légitime de se demander ce qui se produit dans le cas des groupes superstables. Nous avons le résultat suivant extrait de [OH08b], qui donne des informations sur G/G°.

Théorème 1.1.4. [OH08b] *Si G est superstable alors G/G° est virtuellement résolube. Si en plus G est de rang de Lascar fini, alors G/G° est virtuellement nilpotent.* □

La preuve du Théorème 1.1.4 repose sur le Théorème 1.1.2, sur la remarque que G/G° est résiduellement fini et sur le lemme suivant. Dans le cas où G est de rang de Lascar fini, la preuve repose sur le Théorème 1.1.3.

Lemme 1.1.5. [OH08b] *Soit G un groupe résiduellement fini et H un sous-groupe normal et résoluble de G. Alors il existe un sous-groupe normal et résoluble K, tel que H est normal dans K et G/K est résiduellement fini.* □

1.2 Groupes CSA

Comme cela a été signalé plus haut, la Conjecture d'Algebricité stipule qu'un groupe simple de rang de Morley fini est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos. A. Borovik avait définis des groupes qui possèdent une dimension généralisant celle des groupes finis, et B. Poizat [Poi01] a démontré par la suite que ces groupes coïncident avec les groupes de rang de Morley fini. Dans l'étude des groupes de rang de Morley fini, les involutions jouent un rôle important, comme c'est déjà le cas dans l'étude des groupes finis et plus généralement de celle des groupes localement fini [KW73].

Rappelons qu'un sous-groupe d'un groupe G est un 2-*sous-groupe de Sylow* s'il est maximal parmi les 2-sous-groupes de G. Il est bien connu qu'un 2-sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini est virtuellement nilpotent. A. Borovik et B. Poizat [BP90b] ont montré que dans un groupe de rang de Morley fini, les 2-sous-groupes de Sylow sont conjugués. Il s'ensuit qu'on peut associer un *invariant* à un groupe de rang de Morley fini.

Généralisant un théorème de A. Macintyre, A. Nesin [Nes91] a montré qu'un groupe nilpotent de rang de Morley fini est un produit central $U * T$, où U est un sous-groupe définissable d'exposant borné et T est un sous-groupe définissable divisible. Si S est un 2-sous-groupe de Sylow d'un groupe de rang de Morley fini, alors S est nilpotent-par-fini et en allant dans la composante connexe de sa clôture définissable $d(S)$, qui est nilpotente, on en déduit que S°, qui est définie comme étant $S \cap d(S)^\circ$, est le produit central $U * T$ d'un sous-groupe U d'exposant borné et d'un sous-groupe divisible T.

Cela conduit à étudier les cas suivants :

- $U \neq 1$ et $T \neq 1$; dans ce cas, le groupe est dit de *type mixte* ;
- $U \neq 1$ et $T = 1$; dans ce cas, le groupe est dit de type *paire* ;
- $U = 1$ et $T \neq 1$; dans ce cas, le groupe est dit de type *impair* ;
- $U = 1$ et $T = 1$; dans ce cas, le groupe est dit de type *dégénéré*.

Si la Conjecture d'Algébricité est vraie, il ne devrait pas y avoir de groupe de type dégénéré. Selon la définition donnée dans [BN94], un *mauvais groupe* est un groupe de rang de Morley fini connexe non résoluble dont tout sous-groupe définissable et propre est nilpotent. Il est montré par L.-J. Corredor [Cor89] et indépendamment par A. Borovik et B. Poizat [BP90a] qu'un mauvais groupe simple n'a pas d'involution. On voit en particulier qu'un mauvais groupe simple est de type dégénéré, et on peut dire qu'il est dans un certain sens un contre-exemple *minimal* et au même temps *extrême* de la Conjecture d'Algebricité. On ne sait toujours pas si ce genre de monstres (d'un point de vue de la théorie des modèles) existe[4].

1.2.1 Groupes CSA existentiellement clos

G. Cherlin [Che79] a montré qu'un groupe simple de rang de Morley 3 est ou bien algébrique sur un corps algébriquement clos ou bien mauvais. Il n'est pas très difficile de voir que dans un mauvais groupe de rang 3, le centralisateur de tout élément non trivial est abélien et autonormalisant, et une preuve de ce fait est donnée dans [OH08a].

En considérant le cas d'un mauvais groupe de rang 3, B. Poizat a suggéré d'étudier les groupes existentiellement clos de la classe des groupes dont le centralisateur de tout élément non trivial est abélien et autonormalisant. Il a posé le problème de savoir si ces groupes possèdent des propriétés algébriques analogues à celles des mauvais groupes et s'ils peuvent même être mauvais. Nous avons relevé que cette classe coïncide avec la classe des *groupes CSA*, une classe précédemment étudiée

[4]Pour l'état actuel de la Conjecture d'Algébricité, on peut consulter [ABC08].

par D. Gildenhuys, O. Kharlampovich, A. Myasnikov et V.N. Remeslennikov [GKM95, MR96], et qui est une classe importante dans le cadre de la solution de la conjecture de Tarski.

Rappelons qu'un sous-groupe H d'un groupe G est dit *malnormal* si pour tout $g \in G \setminus H$, $H^g \cap H = 1$. On voit que cette notion est à l'extrême opposé de celle de groupe normal. On dit d'un groupe G qu'il est *CSA* (pour *Conjugately Seperated abelian*) si tout sous-groupe abélien maximal de G est malnormal.

On commence par exposer le contenu de l'article [OH04] en commun avec E. Jaligot ; où nous denons une réponse positive à la question de B. Poizat en ce qui concerne les propriétés algébriques, et une réponse négative en ce qui concerne leur "mauvaiseté" ; à savoir que les groupes CSA existentiellement clos ne sont même pas ω-stables.

Pour étudier les groupes CSA existentiellement clos, on commence par étudier la préservation de la propriété CSA par HNN-extensions et produits libres amalgamés. Cela permet de voir que certaines propriétés exprimables par des formules existentielles, qui sont vraies dans une HNN-extension ou un produit amalgamé d'un groupe CSA existentiellement clos G, restent vraies dans G. On remarque, par un résultat de [MR96], qu'un groupe CSA ayant une involution est abélien. Par conséquent, on ne considère que des groupes CSA sans involution, qui vont être notés CSA*. On désigne par $G^\sharp$ l'ensemble des éléments nontriviaux de G. D'abord, une condition nécessaire et suffisante [5].

Théorème 1.2.1. [OH04] *Soit $G^* = \langle G, t | A^t = B\rangle$ une HNN-extension d'un groupe CSA*. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *G^* est un groupe CSA*.*

(2) *Pour tout $a \in A^\sharp$, $C_{G^*}(a)$ est abélien et malnormal dans G^*.*

Dans ce cas, pour tout élément nontrivial $g^* \in G$, $C_{G^*}(g^*)$ est cyclique infini ou est conjugué à $C_{G^*}(g)$ pour un élément $g \in G$. □

De même pour les produits libres amalgamés.

Théorème 1.2.2. [OH04] *Soit $P = G *_A H$ un produit libre amalgamant A de deux groupes CSA* G et H. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *P est un groupe CSA*.*

(2) *Pour tout $a \in A^\sharp$, $C_P(a)$ est abélien et malnormal dans P.*

Dans ce cas, pour tout élément nontrivial $g^* \in P$, $C_P(g^*)$ est cyclique infini ou est conjugué à $C_P(g)$ pour un élément $g \in G \cup H$. □

Les preuves des théorèmes précédents se basent essentiellement sur une caractérisation de [KS77], des sous-groupes ayant un centre nontrivial dans une HNN-extension ou un produit libre amalgamé. D. Gildenhuys, O. Kharlampovich et A. Myasnikov [GKM95] donnent des conditions nécessaires pour qu'une HNN-extension ou un produit libre amalgamé de groupes CSA* reste un groupe CSA*. Les théorèmes qui suit généralisent les résultats de [GKM95] et donnent des informations plus précises sur le liens entre les centralisateurs dans les groupes de départ et ceux de la HNN-extension ou du produit libre amalgamé. Cette propriété est nécessaire dans la preuve du Théorème 1.2.6 ci-dessous. Cela dit, le contenu de [GKM95] nous aura suffit pour démontrer certains résultats, plus précisément le Théorème 1.2.5 ci-dessous. Une HNN-extension $G^* = \langle G, t | A^t = B\rangle$ est dite *séparée* si $A \cap B^g = 1$ pour tout élément $g \in G$.

[5] On se restreint ici à la classe des groupes CSA*, mais les résultats obtenus sont valables dans un cadre général où il y a un contrôle sur les éléments d'ordre fini.

Théorème 1.2.3. [OH04] *Soit $G^* = \langle G, t | A^t = B \rangle$ une HNN-extension séparée d'un groupe CSA* G, où A et B sont malnormaux dans G. Alors G^* est CSA* et G^* et G ont, à conjuguaison près, les mêmes sous-groupes abéliens maximaux, à part peut être ceux qui sont infinis cycliques.* □

De même, on a un résultat analogue dans le cadre des produits libres amalgamés.

Théorème 1.2.4. [OH04] *Soit $P = G *_A H$ un produit libre amalgamant A de deux groupes CSA* G et H, où A est malnormal dans G. Alors P est un groupe CSA* et tout sous-groupe abélien maximal de P, à part peut être les sous-groupes cycliques infinis, est conjugué à un sous-groupe de G ou H.* □

Un résultat bien connu en géométrie algébrique affirme que les sous-groupes de *Borel* d'un groupe algébrique sont conjugués. Dans ce cadre, un sous-groupe de Borel est un sous-groupe *fermé* connexe et résoluble et maximal par rapport à ces propriétés. Dans le cadre des groupes de rang de Morley, les sous-groupes de Borel sont définis de façon analogue : ce sont les sous-groupes *définissables* connexes et résolubles et maximaux par rapport à ces propriétés.

Parmi les propriétés satisfaites par un mauvais groupe simple, démontrés par L.-J. Corredor [Cor89] et indépendamment par A. Borovik et B. Poizat [BP90a], est la conjuguaison des sous-groupes de Borel. Autrement dit, les mauvais groupes simples possèdent une des propriétés importantes des groupes algébriques, sans être algébriques.

En utilisant les théorèmes précédents, nous avons démontré le théorème suivant qui donne des propriétés algébriques des groupes CSA existentiellement clos. Ainsi, cela répond à la question de B. Poizat en ce qui concerne les propriétés algébriques.

Théorème 1.2.5. [OH04] *Si G est un groupe CSA* existentiellement clos alors G est simple et divisible et si B est un sous-groupe abélien maximal, alors $G = \bigcup_{g \in G} B^g$. En particulier les sous-groupes abéliens maximaux sont conjugués.* □

Remarque. *En fait, on démontre une propriété forte de simplicité des groupes CSA* existentiellement clos. Ils satisfont l'énoncé*

$$\forall a \forall b \exists x \exists y ((a \neq 1 \wedge b \neq 1 \wedge a \neq b) \implies t^{-1}xb^{-1}axt = ax^{-1}ax),$$

et en découle que tout groupe élémentairement équivalent à un groupe CSA existentiellement clos est simple.*

G. Higman, B.H. Neumann et H. Neumann [HNN49] montrent que tout groupe dénombrable se plonge dans un groupe de type fini ayant, à conjuguaison près, les mêmes éléments d'ordre fini. On démontre un théorème analogue pour les groupes CSA, où on remplace les éléments d'ordre fini par les sous-groupes abéliens maximaux.

Théorème 1.2.6. [OH04] *Tout groupe dénombrable CSA* se plonge dans un groupe de type fini CSA*, ayant, à conjuguaison près, les mêmes sous-groupes abéliens maximaux, sauf peut être ceux qui sont infinis cycliques.* □

La preuve du Théorème 1.2.6 est téchnique et l'étape principale consiste à trouver des bons groupes malnormaux dans les produits libres ; ensuite on applique le Théorème 1.2.4.

B. H. Neumann [Neu73] montre qu'il existe $2^{\aleph_0}$ de groupes engendrés par 2 éléments. La preuve est basée sur le théorème précédemment cité de Higman, Neumann et Neumann en jouant sur les éléments d'ordre fini. Dans le même ordre d'idée, en considérant les produits libres de type $*_{n \in X} \mathbb{Z}^n$ et en variant X, on déduit du Théorème 1.2.6 le résultat suivant.

Corollaire 1.2.7. [OH04] *Il existe $2^{\aleph_0}$ CSA* groupes de type fini. En particulier, il existe $2^{\aleph_0}$ groupes CSA* existentiellement clos.* □

Il s'ensuit que les groupes CSA* existentiellement clos ont beaucoup de types.

Corollaire 1.2.8. [OH04] *La théorie élémentaire d'un groupe CSA* existentiellement clos a $2^{\aleph_0}$ types sur l'ensemble vide.* □

Cela montre que les groupes CSA* existentiellement clos ne sont pas ω-stables et par conséquent ils ne sont pas mauvais, ce qui répond à la question de B. Poizat.

1.2.2 Groupes CSA superstables

Nous l'avons vu, Ch. Berline a conjecturé qu'un groupe superstable simple est algébrique sur un corps algébriquement clos. Vu cette conjecture et les résultats de la section précédente, l'étape naturelle suivante est de voir si les groupes CSA* existentiellement clos peuvent être superstables ; une question posée aussi par F. Wagner. En fait la réponse est aussi négative dans ce cas. Le résultat suivant a été démontré en 2004 et publié dans [OH08a].

Théorème 1.2.9. [OH08a] *Un modèle ayant la même théorie universelle qu'un groupe CSA* existentiellement clos n'est pas superstable.* □

Pour démontrer le Théorème 1.2.9, nous démontrons qu'un modèle de la théorie universelle d'un groupe CSA* existentiellement clos a beaucoup de types sur des ensembles ayant un cardinal très grand. Plus précisément, on montre que pour tout cardinal infini λ, tout groupe CSA* H, contenant un ensemble A de cardinal λ, se plonge dans un modèle G élémentairement équivalent à un groupe CSA* existentiellement clos, tel que l'espace des 4-types sur A dans G, est de cardinal supérieur à $\lambda^{\aleph_0}$. Il s'ensuit qu'un groupe CSA* existentiellement clos n'est pas λ-stable pour les cardinaux qui satisfont $\lambda^{\aleph_0} > \lambda$ et donc n'est pas superstable.

Pour ce faire, on montre le théorème suivant qui est une généralisation de la propriété principale utilisée dans la preuve du Théorème 1.2.6.

Théorème 1.2.10. *Soit G un groupe CSA* contenant un ensemble infini d'éléments $\{g_i | i \in 2\mathbb{N}+1\}$ tel que $g_i^{-1} \neq g_j$ pour tout $i, j \in 2\mathbb{N}+1$. Soit F le produit libre de G est du group libre $\langle a, b, c|\rangle$. Soit :*

$$D = \langle c^i b^{-1} a^i b^i | i \in 2\mathbb{N}+1\rangle \text{ et } E = \langle g_i a^{-i} b^i a^i | i \in 2\mathbb{N}+1\rangle.$$

Soit φ l'isomorphisme, définie à partir de la fonction $\varphi : c^i b^{-1} a^i b^i \to g_i a^{-i} b^i a^i$ de D à E. Conidérons la HNN-extension

$$F^* = \langle F, t | t^{-1} dt = \varphi(d), d \in D\rangle.$$

Alors :
(1) *F^* est un groupe CSA*.*
(2) *$\{g_i | i \in 2\mathbb{N}+1\} = \{t^{-1} c^i b^{-1} a^i b^i t a^{-1} b^{-i} a^i\}$ dans F^*.* □

En déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.11. *Soit G un groupe CSA* et $X \subseteq G$ un sous-ensemble dénombrable vérifiant $x \neq y^{-1}$ pour tout $x, y \in X$. Alors G se plonge dans groupe CSA* H contenant 4 éléments a, b, c, t tels que $X = \{t^{-1} c^i b^{-1} a^i b^i t a^{-1} b^{-i} a^i\}$.* □

L'idée ensuite est d'utiliser le corollaire précédent pour calculer des types et on obtient la proposition suivante, à partir de laquelle on déduit la non superstabilité des groupes CSA* existentiellement clos.

Proposition 1.2.12. *Soit G un groupe CSA* contenant un sous-ensemble A de cardinal infini λ. Alors G se plonge dans un groupe CSA* H contenant une suite $(\bar{a}_i | i \in \lambda^{\aleph_0})$ où $|\bar{a}_i| = 4$, telle que $tp^H(\bar{a}_i/A) \neq tp^H(\bar{a}_j/A)$ pour $i \neq j$.* □

Rappelons qu'un mauvais groupe simple de rang de Morley 3 est un groupe CSA. Tout ceci pousse à réfléchir sur la possibilité d'avoir au moins un groupe CSA de rang de Morley fini ou superstable. En fait le problème est toujours lié aux mauvais groupes comme le montre les deux propositions suivantes.

Proposition 1.2.13. [OH08a] *Un groupe superstable CSA non abélien a un sous-groupe définissable simple dont tout sous-groupe propre et définissable est abélien.* □

En d'autres termes, l'existence d'un groupe superstable CSA non abélien implique l'existence d'un mauvais groupe dans le contexte de la superstabilité. En fait, on obtient une équivalence, qui est énoncée ci-dessous pour les groupes de rang de Morley fini mais qui est en réalité valable aussi dans le contexte des groupes superstables. □

Proposition 1.2.14. [OH08a] *L'existence d'un groupe CSA non abélien de rang de Morley fini est équivalente à l'existence d'un mauvais groupe simple dont tout sous-groupe propre et définissable est abélien.* □

Comme nous l'avons vu, la non ω-stabilité des groupes CSA* existentiellement clos provient de l'existence de beaucoup de groupes de type fini CSA*. Comme un groupe libre est CSA, et comme la théorie universelle d'un groupe libre a seulement $\aleph_0$ groupes de type fini, on se pose le problème de savoir si elle a des modèles superstables. Cela est aussi motivé par la remarque suivante. Supposons qu'un groupe G superstable contient un groupe libre non abélien F et soit G^* un groupe CSA existentiellement clos contenant G. On voit que $Th_\forall(G^*) \subseteq Th_\forall(G) \subseteq Th_\forall(F)$. Le cas *minimal* $Th_\forall(G^*) = Th_\forall(G)$ est exclu par le Théorème 1.2.9, et il devient naturel de voir le cas *maximal* $Th_\forall(G) = Th_\forall(F)$. E. Mustafin et B. Poizat [MP06] ont montré qu'un groupe superstable qui est modèle de la théorie universelle d'un groupe libre est abélien. La Proposition 1.2.13 permet d'avoir une preuve plus simple et on a le corollaire suivant démontré en 2004 et publié dans [OH08a].

Corollaire 1.2.15. [OH08a] *Un groupe superstable qui est modèle de la théorie universelle d'un groupe libre est abélien.* □

Comme un groupe hyperbolique sans torsion est un groupe CSA, on peut se demander s'il peut être superstable. La Proposition 1.2.13 permet aussi d'avoir une réponse négative à la question.

Corollaire 1.2.16. [OH08a] *Un groupe superstable hyperbolique sans torsion est abélien.* □

En utilisant les groupes à petites simplifications, A. Muranov, E. Jaligot et A. Neman [JMN08] démontrent qu'un groupe CSA* existentiellement clos a la propriété d'indépendance et en particulier qu'il est instable.

1.3 Groupes superstables avec des propriétés résiduelles

Ce travail concerne les groupes superstables ayant des propriétés de finitude résiduelle dans une pseudovariété. Rappelons qu'une classe de groupes $\mathcal{C}$ est une *pseudovariété* si elle est close par sous-groupe, par quotient et par produit cartésien fini. On dit d'un groupe G qu'il est *résiduellement-$\mathcal{C}$*,

si pour tout élément non trivial $g \in G$, il existe un homomorphisme $\varphi : G \to C \in \mathcal{C}$ tel que $\varphi(g) \neq 1$. Parmi les exemples de pseudovariétés, on a la classe des groupes finis, la classe des groupes résolubles, la classe des groupes nilpotents.

A priori le fait d'être résiduellement-$\mathcal{C}$ n'est pas une propriété conservée par équivalence élémentaire. Par exemple, le groupe libre de rang 2 est résiduellement fini, alors que toute ultrapuissance de F_2 ne l'est pas car elle contient $\mathbb{Q}$ qui n'est pas résiduellement fini.

Il y a eu beaucoup de travaux sur les groupes résiduellement finis et plus généralement les groupes résiduellement-$\mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est une pseudovariété, mais il ne semble pas y avoir beaucoup de litérature sur les groupes résiduellement-$\mathcal{C}$ soumis à des contraintes modèle-théoriques, mis à part qu'il est montré dans [BN94], qu'un groupe résiduellement fini de rang de Morley fini est abélien-par-fini.

Définition 1.3.1. [OH07b] *On dit d'un sous-groupe H d'un groupe G qu'il est équationnellement définissable, s'il existe des mots $w_1(x), \ldots, w_n(x)$, éventuellement à paramètres dans G, tels que $H = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{g \in G | w_i(g) = 1\}$.* □

On voit, par exemple, que pour tout élément $g \in G$, le centralisateur $C_G(g)$ est équationnellement définissable. Le résultat principal de ce travail est le théorème suivant qui donne une structure des groupes superstables résiduellement-$\mathcal{C}$; où $\mathcal{C}$ est une pseudovariété.

Théorème 1.3.2. [OH07b] *Soit $\mathcal{C}$ une pseudvariété et G un groupe superstable résiduellement-$\mathcal{C}$. Alors il existe une suite normale $G_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$ telle que chaque G_i est équationnellement définissable, G_0 est résoluble et pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $G_{i+1}/G_i \in \mathcal{C}$. Si G est ω-stable alors on peut prendre G_0 nilpotent et si tout groupe abélien ω-stable résiduellement-$\mathcal{C}$ est d'exposant borné alors G_0 est d'exposant borné.* □

Avant d'exposer l'idée de la preuve du théorème précédent, signalons quelques corollaires.

Corollaire 1.3.3. [OH07b] *Un groupe superstable résiduellement fini est virtuellement résoluble et s'il est ω-stable alors il est virtuellement nilpotent et d'exposant borné.* □

Corollaire 1.3.4. [OH07b] *Un groupe de type fini résiduellement fini est superstable si et seulement si il est virtuellement abélien.* □

Du Théorème 1.3.2, on déduit qu'un groupe de type fini résiduellement fini et ω-stable est fini. De même pour les groupes linéaires de type fini grâce au théorème de Malcev [Weh73] qui affirme que ces derniers sont résiduellement finis.

La preuve du Théorème 1.3.2 procède par induction sur la rang de Lascar, et repose sur des notions de composantes connexes liées à $\mathcal{C}$, définies ci-dessous, sur les sous-groupes équationnellement définissables et sur le Théorème 1.1.3.

Définition 1.3.5. [OH07b] *Soit G un groupe et $\mathcal{C}$ une classe de groupes.*

(1) *La* $\mathcal{C}$-composante connexe *de G, notée $G^{\mathcal{C}}$, est définie comme l'intersection des sous-groupes équationnellement définissables H tel que $G/H \in \mathcal{C}$. On dit que G est* $\mathcal{C}$-connexe *si $G = G^{\mathcal{C}}$.*

(2) *La* $\mathcal{C}$-centralisateur composante *de G, notée $G_{\mathcal{C}}$, est définie comme l'intersection des centralisateurs H tel que $G/H \in \mathcal{C}$.* □

On remarque que si G satisfait la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes équationnellement définissables, alors $G^{\mathcal{C}}$ est définissable. C'est en particulier vrai pour les groupes ω-stables, et la $\mathcal{C}$-composante connexe est essentiellement utilisée dans ce cas. Pour l'étude des groupes superstables, c'est la $\mathcal{C}$-centralisateur composante qui est utilisée.

Remarquons qu'il est peut être plus naturel d'utiliser dans la définition de la $\mathcal{C}$-composante connexe les sous-groupes définissables plutôt que les sous-groupes équationnellement définissables. Un des problèmes, et que si G est résiduellement-$\mathcal{C}$ et si H est un sous-groupe normal définissable, G/H n'est pas nécessairement résiduellement-$\mathcal{C}$. Comme la preuve procède par induction sur le rang, il est nécessaire d'avoir des sous-groupes pour lesquels le quotient reste résiduellement-$\mathcal{C}$; ce qui est le cas pour les sous-groupes équationnellement définissables grâce au lemme suivant.

Lemme 1.3.6. [OH07b] *Soit $\mathcal{C}$ une pseudovariété et G un groupe résiduellement-$\mathcal{C}$. Si H est un sous-groupe équationnellement définissable, alors G/H est résiduellement-$\mathcal{C}$.* □

La preuve se base aussi et d'une façon cruciale sur la proposition suivante.

Proposition 1.3.7. [OH07b] *Soit $\mathcal{C}$ une pseudovariété et G un groupe superstable résiduellement-$\mathcal{C}$ de rang de Lascar, sous la forme de Cantor, $U(G) = \omega^{\alpha}n + \omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_m}n_m$. Si K est un sous-groupe définissable α-connexe et normal de G, alors $G/C_G(K) \in \mathcal{C}$.* □

F. Wagner [Wag11] a par la suite généralisé le Théorème 1.3.2 aux groupes supersimples en démontrant en plus que G_0 peut être pris nilpotent.

Nous concluons cette section par quelques remarques sur les groupes de type fini ω-stables et superstables, extraites de [OH07b]. On introduit d'abord les définitions suivantes.

Définition 1.3.8. [OH07b] *Soit $\mathcal{C}$ une classe de groupes.*

(1) *On dit que G est une* CD-classe *(pour close par définissabilité) si chaque fois que $G \in \mathcal{C}$, si H est définissable et normal, alors $H, G/H \in \mathcal{C}$.*

(2) *On dit que G est une* CDI-classe *(pour close par définissabilité inversement) si chaque fois que G a un sous-groupe normal H tels que $H, G/H \in \mathcal{C}$ alors $G \in \mathcal{C}$.* □

Par exemple, les classes suivantes sont des CD-classes : toute pseudovariété de groupes, les groupes pseudofinis, les groupes superstables, groupes ω-stables, groupes de rang de Morley fini, groupes algébriques affines. Et comme exemple de CDI-classes, on a la classe des groupes finis et la classe des groupes résolubles (ou nilpotents).

Définition 1.3.9. [OH07b] *Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux classes de groupes. On dit que $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ est une* bonne paire *si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(1) *$\mathcal{C}_2$ est à la fois une CD-classe et une CDI-classe,*
(2) *si $G \in \mathcal{C}_1$ et K est un sous-groupe normal définissable de G, alors $G/K \in \mathcal{C}_1$,*
(3) *si $G \in \mathcal{C}_1$ et K est un sous-groupe normal définissable de G d'indice fini, alors $K \in \mathcal{C}_1$,*
(4) *si $G \in \mathcal{C}_1$ et K est un sous-groupe normal définissable de G tel que $G/K \in \mathcal{C}_2$, alors $K \in \mathcal{C}_1$,*
(5) *si $G \in \mathcal{C}_1$ et $G/Z(G) \in \mathcal{C}_2$, où $Z(G)$ est fini, alors $G \in \mathcal{C}_2$.* □

Alors on a le théorème suivant dont la preuve se base sur le Théorème 1.1.3.

Théorème 1.3.10. [OH07b] *Soit $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ une bonne paire de classes de groupes. Si $\mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{C}_2$ contient un groupe infini superstable (resp. ω-stable, de rang de Morley fini), alors $\mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{C}_2$ contient un groupe infini superstable (resp. ω-stable, de rang de Morley fini) qui est ou bien $\mathcal{C}_2$-par-fini ou simple ou nilpotent-par-fini (resp. abélien-par-fini).* □

En utilisant le théorème ci-dessus, on déduit les propriétés suivantes :

(1) s'il existe un groupe infini de type fini ω-stable, alors il en existe un qui soit simple,
(2) un groupe de type fini résiduellement résoluble et ω-stable est fini,
(3) un groupe pseudofini superstable est résoluble-par-fini.

Le résultat exprimé par (3) est un cas particulier d'un résultat de D. Macpherson et K. Tent [MT07], qui affirme qu'un groupe stable pseudofini est virtuellement résoluble. Le Théorème 1.3.10 fournie une preuve relativement simple dans le cas où le groupe considéré est superstable.

La propriété (1) permet de voir que l'existence d'un groupe de type fini infini et ω-stable implique l'existence d'un contre exemple à la Conjecture d'Algebricité, car un groupe de type fini simple ne peut être algébrique sur un corps algébriquement clos. Cela suggère la question suivante qui est toujours ouverte :

Question 1. Existe-il un groupe de type fini infini et ω-stable ?

Pour conclure ce chapitre, on voit que la classe des groupes superstables est une classe qui ne "cohabite" pas, dans un certain sens, avec des propriétés algébriques comme la finitude résiduelle ou le fait d'être hyperbolique sans torsion, car être superstable impose, d'un point de vue modèle-théorique, des contraintes assez fortes. Quant à la classe des groupes CSA, c'est une classe très riche, et il serait certainement très intéressant de pousser plus loin l'étude des groupes superstables dans ce cadre.

Chapitre 2

Groupes superstables qui agissent sur les arbres

Autour de 1945, A. Tarski pose le problème de savoir si deux groupes libres non abéliens sont élémentairement équivalents[1]. Il est naturel de commencer par étudier les "briques atomiques" de la théorie élémentaire dans ce cadre ; c'est-à-dire l'ensemble des solutions des équations. Cette étude a engendré beaucoup de travaux sur le sujet, et récemment le problème de Tarski a été résolu positivement, par Z. Sela [Sel01, Sel03, Sel05a, Sel04, Sel05b, Sel06a, Sel06b] et indépendamment par O. Kharlampovich et A. Miasnikov [KM05c, KM05b, KM05a, KM06]. La solution de Z. Sela utilise des techniques de la théorie géométrique des groupes, plus précisément les actions sur les arbres simpliciaux et réels.

De plusieurs points de vues, les groupes libres non abéliens possèdent des propriétés algébriques semblables à celles des mauvais groupes *minimaux*. Un résultat annoncé par Bestvina et Feighn affirme que tout sous-groupe définissable et propre d'un groupe libre est abélien ; une propriété, comme on l'a vu dans le chapitre précédent, satisfaite par les mauvais groupes CSA.

En outre, Z. Sela [Sel06c] démontre qu'un groupe libre est stable. Ce résultat peut être reformulé de la façon suivante : tout groupe qui agit librement sur un arbre simplicial est stable. Tout ceci pousse à étudier la théorie élémentaire des groupes qui agissent sur les arbres simpliciaux, et plus généralement sur les arbres réels, et de se demander si on peut trouver dans ce cadre des groupes ayant des propriétés algébriques et modèle-théoriques proches de celles des mauvais groupes.

Une des propriétés modèle-théoriques les plus importantes satisfaites par les mauvais groupes est le fait qu'ils soient de rang de Morley fini. D'où la question de savoir s'il existe des groupes superstables, ou de rang de Morley fini qui agissent sur les arbres ; à part ceux qui sont déjà connus ou évidents à construire [2]. Il n'est pas du tout exclu, qu'on puisse trouver dans ce cadre une myriade de groupes au moins stables. Cela a été confirmé dans le cas des produits libres, récemment par Z. Sela [Sel10].

Ce chapitre est consacré à l'étude des propriétés des groupes superstables qui agissent sur les arbres et tout ce qui est y exposé se trouve dans [OH08b]. Nous commençons, dans la première section, par une introduction générale, dont l'objectif est de fixer la terminologie et d'exposer des résultats généraux et où nous faisons remarquer, en particulier, qu'un groupe qui agit nontrivialement sur un arbre simplicial ne peut être ω-stable.

Dans la deuxième section, sont étudiés principalement les groupes superstables ayant une action irréductible sur un arbre simplicial ou réel. En particulier, des configurations où il est possible de

[1] A. Tarski pose aussi le problème de la décidabilité de la théorie élémentaire d'un groupe libre.

[2] Voir les exemples donnés dans la première section.

trouver des groupes simples superstables non ω-stables sont dégagées. Ces configurations semblent être extrêmes et une étude poussée permettrait de trancher la question. Dans la dernière section, nous introduisons la notion de *classe de Borel* et nous nous intéressons aux groupes ayant un rang de Lascar fini. On y montre l'existence des classes de Borel dans les groupes "minimaux".

2.1 Généralités

La théorie de Bass-Serre [Ser80] montre qu'un groupe agit sur un arbre simplicial si et seulement si il admet une structure de graphe de groupes. Nous considérons dans ce qui suit le cadre plus général des actions (toujours par isométries) sur les Λ-*arbres* où Λ est un groupe abélien ordonné. A ce sujet, le lecteur peut consulter le livre [Chi01].

Un Λ-*arbre* est un espace Λ-métrique (X, d) qui satisfait les propriétés suivantes :

(i) (X, d) est géodésique ;

(ii) si deux segments s'intersectent en un seul point qui est une extrémité de chacun deux alors leur réunion est aussi un segment ;

(iii) l'intersection de deux segments ayant une extrémité en commun est aussi un segment.

Soit (X, d) un espace Λ-métrique et σ une isométrie de X. On dit que σ est *elliptique* si σ a un point fixe. Si σ^2 a un point fixe et σ n'en a pas, on dit que σ est une *inversion*. Si σ n'est ni elliptique, ni une inversion, alors elle est dite *hyperbolique*. Une autre définition peut être obtenue, en considérant la longueur de translation. Si σ n'est pas une inversion, la *longueur de translation* de σ est définie par

$$\ell(\sigma) = \min\{d(x, gx) | x \in X\},$$

qui existe toujours. On voit que σ est elliptique si et seulement si $\ell(\sigma) = 0$ et σ est hyperbolique si et seulement si $\ell(\sigma) > 0$.

Nous ne considérons dans la suite, que des actions sans inversion. En suivant la définition donnée dans [Chi01], une action d'un groupe G est *nontriviale* si G a des éléments hyperboliques. Les actions peuvent être classifiées selon trois catégories :

• l'action est dite *abélienne* si pour tout $g, h \in G$, $\ell(gh) \leq \ell(g) + \ell(h)$;

• l'action est dite *diéderal* si elle n'est pas abélienne et l'inégalité $\ell(gh) \leq \ell(g)+\ell(h)$ est satisfaite par tout $g, h \in G$ hyperboliques ;

• sinon, l'action est dite *irréductible*.

Le théoréme suivant donne des caractérisations équivalentes des actions abéliennes, diédrals ou irréductibles. Les caractérisations données justifient la terminologie ci-dessus. Ici $Isom(\Lambda)$ est le groupe des automorphismes métriques de Λ qui consiste en les réflexions et les translations. Rappelons qu'un groupe G agit *proprement discontinuement* si pour tout $x \in T$, il existe un voisinage N de x tel que si $gN \cap N \neq \emptyset$, alors $gx = x$. La valeur absolue d'un élément $\lambda \in \Lambda$ est notée par $|\lambda|$.

Théorème 2.1.1. [Chi01] *Soit Λ un groupe abélien ordonné et G un groupe qui agit sans inversion sur un Λ-arbre T.*

(1) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) l'action est abélienne,

(ii) il existe un homomorphisme $\rho : G \to \Lambda$ tel que $\ell(g) = |\rho(g)|$ pour tout $g \in G$,

(iii) pour tout $g, h \in G$, $\ell([g, h]) = 0$.

(2) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) l'action est diédral,

(ii) il existe un homomorphisme $\rho : G \to Isom(\Lambda)$ tel que $\ell(g) = |\rho(g)|$ pour tout $g \in G$, où l'image $\rho(G)$ contient une réflexion et une translation et où la valeur absolue désigne la longueur de translation de l'action de $Isom(\Lambda)$ sur Λ.

(iii) pour tout $g, h \in G$ hyperboliques, $\ell([g,h]) = 0$, et il existe $g, h \in G$ tels que $\ell([g,h]) \neq 0$.

(3) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) l'action est irréductible,

(ii) il existe deux éléments hyperboliques g et h tels que $\ell([g,h]) \neq 0$,

(iii) G contient un sous-groupe libre de rang 2 qui agit, par restriction, librement et sans inversion et proprement discontinuement sur T.

Ci-dessous quelques exemples de groupes superstables qui agissent sur les arbres.

Exemples 2.1.2.

(1) *Un des exemples simples est $\mathbb{Z}$, qui agit librement sur un arbre simplicial. Il est de rang de Lascar fini. Le groupe $\mathbb{Q}$ est de rang de Morley fini, agit librement sur un arbre réel et il n'a aucune action nontriviale sur un arbre simplicial. Dans les deux cas, l'action est clairement abélienne.*

(2) *Si G est superstable, alors $G \times \mathbb{Z}$ est superstable. On voit que $G \times \mathbb{Z}$ est la HNN-extension $\langle G, t | g^t = g \rangle$ et par conséquent elle agit sur l'arbre de Bass-Serre qui lui est associé. En plus si G est de rang de Lascar fini, alors $G \times \mathbb{Z}$ est aussi de rang de Lascar fini. Dans ce cas aussi, l'action est abélienne.*

(3) *Si G est superstable, alors le groupe $K = G \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est superstable et même de rang de Lascar fini si G l'est. On peut réécrire $K = (G \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) *_G (G \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui agit nontrivialement sur l'arbre de Bass-Serre qui lui est associé. Dans ce cas l'action est diédral.*

On ne dispose pas d'exemple de groupe superstable qui a une action irréductible sur un arbre simplicial. On verra dans la section suivante, que l'existence de telles actions conduit à des configurations où il est possible d'avoir des groupes simples superstables non ω-stables.

On peut se demander si un groupe de rang de Morley fini peut avoir une action nontriviale sur un arbre simplicial. La réponse est négative et nous avons le résultat suivant, dont la preuve est simple, mais nous pensons vu son importance, qu'il mérite le nom de théorème.

Théorème 2.1.3. *Toute action sans inversion d'un groupe ω-stable sur un arbre simplicial est triviale.* □

L'idée de la preuve est la suivante. Soit G un groupe ω-stable qui agit nontrivialement sur un arbre simplicial T. Comme l'action est non triviale, il existe des éléments hyperboliques. Soit $g \in G$ un élément hyperbolique et considérons le groupe $A = Z(C_G(g))$ qui est abélien et qui agit nontrivialement par restriction sur T. On déduit ensuite une contradiction entre la structure de A issue des propriétés géométriques qu'il satisfait, et sa structure qui provient des propriétés modèle-théoriques. En effet, d'un côté un théorème de A. Macintyre [Mac71, Ber81], nous permet d'écrire $A = B \oplus D$ où B est d'exposant borné et D est divisible et d'un autre côté le lemme suivant permet d'avoir la structure géométrique.

Lemme 2.1.4. *Soit G un groupe localement nilpotent qui agit nontrivialement et sans inversion sur un arbre simplicial T. Alors G peut s'écrire comme une HNN-extension $G = \langle C, s | C^s = C \rangle$ où s est hyperbolique et C est le stabilisateur d'un point de T.* □

On voit que les deux structures sont incompatibles : un groupe de la forme $B \oplus D$, où B est d'exposant borné et D est divisible, ne peut avoir un quotient cyclique infini.

Un groupe G est dit *se scinde au-dessus de* A, où A est un sous-groupe de G, s'il admet une décomposition nontriviale comme un produit libre amalgamé $G = G_1 *_A G_2$ ou comme une HNN-extension $G = \langle K, t | A^t = B \rangle$. La théorie de Bass-Serre montre qu'un groupe agit nontrivialement sur un arbre simplicial si et seulement si G se scinde au-dessus d'un de ses sous-groupes. Dans ce cadre, on a la reformulation suivante du Théoréme 2.1.3.

Corollaire 2.1.5. *Si G se scinde au-dessus d'un de ses sous-groupes, alors G n'est pas ω-stable.* □

Comme on l'a vu, $\mathbb{Q}$ est de rang de Morley fini et a une action libre sur un arbre réel. Par conséquent, le Théorème 2.1.3 ne peut être généralisé aux actions sur les arbres réels.

Les preuves de certains des résultats de cette partie procèdent par induction sur le rang de Lascar, en passant aux quotients. D'où l'intérêt de voir la préservation de la nontrivialité d'une cation par passage au quotient. Nous avons étudié ce problème et nous avons établi le résultat suivant d'intérêt indépendant.

Théorème 2.1.6. *Soit $\Lambda = \mathbb{Z}$ ou $\Lambda = \mathbb{R}$ et soit G un groupe ayant une action sans inversion et nontriviale sur un Λ-arbre. Soit H un sous-groupe normal de G dont tout élément est elliptique. Alors G/H agit sans inversion sur un Λ-arbre tel que pour tout $g \in G$, g est hyperbolique si et seulement si gH est hyperbolique. En particulier, si l'action de G est abélienne (resp. diédral, resp. irréductible) alors l'action de G/H est abélienne (resp. diédral, resp. irréductible).* □

Dans le but de montrer la conjuguaison de certaines classes de sous-groupes, celle-ci sera exposé dans la dernière section de ce chapitre, on est confronté au problème de savoir quand un nombre fini de cosets de l'ensemble des éléments elliptiques couvrent un groupe, et en particulier si cela peut se produire quand l'action est irréductible. On obtient le théorème suivant qui répond à la question. Nous l'avons démontré au départ, sous l'hypothése plus forte que Λ est archimédien, et I. Chiswell, que nous remercions, nous a indiqué que cette hypothèse est en fait superflue.

Théorème 2.1.7. *Soit Λ un groupe abélien ordonné et soit G un groupe qui agit sans inversion sur un Λ-arbre. S'il existe un ensemble fini S tel que $G = SE$, où E est l'ensemble des éléments elliptiques, alors l'action est diédral.* □

On remarque que le cas exprimé dans le théorème précédent peut se produire. En effet, si on considère $G = G_1 *_A G_2$, avec A d'indice 2 dans G_1 et G_2, et en étudiant l'action de G sur l'arbre de Bass-serre associé, on obtient un ensemble fini S tel que $G = SE$. Cela peut se démontrer facilement en utilisant des calculs sur les formes normales.

2.2 Actions irréductibles

Comme nous l'avons signalé plus haut, nous ne disposons pas d'exemple de groupe superstable ayant une action irréductible sur un arbre simplicial. Dans cette section, nous analysons ce genre d'actions et nous considérons le cas général des actions sur les arbres réels.

Pour simplifier, nous dirons d'un groupe superstable G qu'il est α-connexe si la forme de Cantor de son rang de Lascar est $U(G) = \omega^\alpha n + \omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_m} n_m$ et G est α-connexe. Le résultat principal que nous obtenons est le suivant.

Théorème 2.2.1. *Soit $\Lambda = \mathbb{Z}$ ou $\Lambda = \mathbb{R}$ et soit G un groupe ayant une action sans inversion et nontriviale sur un Λ-arbre. Si G est α-connexe et $\Lambda = \mathbb{Z}$, ou si l'action est irréductible, alors G interprète un groupe simple ayant une action nontriviale sur un Λ-arbre.* □

En fait, la α-connexité du groupe implique l'irréductibilité de l'action, pour les actions sur les arbres simpliciaux.

Proposition 2.2.2. *Une action nontriviale d'un groupe superstable α-connexe sur un arbre simplicial est irréductible.* □

La proposition précédente n'est pas valable dans le cadre plus général des actions sur les arbres réels. Comme nous l'avons vu, $\mathbb{Q}$ est de rang de Morley fini, il est connexe et il admet une action nontriviale et abélienne sur un arbre réel. Néanmoins, nous pouvons dire quelques choses de plus.

Proposition 2.2.3. *Une action réductible d'un groupe superstable α-connexe G sur un arbre réel est abélienne. En plus, si l'action est nontriviale, alors G a un sous-groupe normal $K \leq E$, où E est l'ensemble des éléments elliptiques, tel que G/K est métabélien. Plus précisement, $E/K \leq Z(G/K)$ et $(G/K)/(E/K)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.* □

En combinant le Théorème 2.1.3 et le Théorème 2.2.1, nous obtenons les deux corollaires ci-dessous, où le premier est sous l'hypothèse de la α-connexité et le second sous l'hypothèse de l'irrédutibilité de l'action.

Corollaire 2.2.4. *Un groupe superstable et α-connexe, ayant une action nontriviale sur un arbre simplicial, interprète un groupe simple superstable et non ω-stable.* □

Corollaire 2.2.5. *Si G est superstable et se scinde comme produit libre amalgamé $G = G_1 *_A G_2$, où A a un indice ou moins 3 dans G_1, alors G interprète un groupe simple superstable et non ω-stable.* □

La condition donnée dans le corollaire précédent exprime l'irrédutibilité de l'action grâce au lemme suivant, où on considère l'action sur l'arbre de Bass-Serre associé. Remarquons que l'action d'un produit libre amalgamé ne peut être abélienne.

Lemme 2.2.6. *Soit G un groupe qui se scinde comme produit libre amalgamé $G = G_1 *_A G_2$. Alors l'action de G sur l'arbre de Bass-Serre associé est diédral si et seulement si A est d'indice 2 dans G_1 et G_2.* □

B. Poizat [Poi83] a démontré que si un produit libre $G_1 * G_2$ est superstable alors $G_1 \simeq G_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Une autre preuve peut être donnée en utilisant le Théorème 1.1.2, où on élimine essentiellement les groupes simples. Dans ce cadre, l'idée principale est qu'un produit libre ne peut être simple. La même stratégie ne fonctionne malheureusement pas pour les produits libres amalgamés à cause de l'existence des groupes simples qui peuvent s'écrire comme produits libres amalgamés. Ce genre de groupes ont été construit pour la premiére fois par Burger et Mozes [BM00], en réponse à une question posée par P. Neumann concernant leur existence. Cela prouve, en particulier, que les produits libres amalgamés peuvent avoir une structure algébrique complexe.

A l'heure actuelle, nous ne savons pas si la configuration donnée dans le Corollaire 2.2.5 est plausible. Même avec des configurations beaucoup plus restrictives, comme nous le verrons dans la section suivante, la situation est complexe. Il ne semble pas y avoir de contradiction apparente entre les propriétés modèle-théoriques et les propriétés algébriques de tels groupes.

2.3 Groupes "minimaux" et classes de Borel

Dans cette section, nous nous intéressons aux groupes superstables qui sont, dans un certain sens, *minimaux*. Cette étude est motivée par les mauvais groupes et la situation suivante. Soit G

un groupe superstable, qui n'est pas virtuellement nilpotent et qui agit nontrivialement sur un Λ-arbre. Supposons que G est de rang de Lascar minimal. Alors tout sous-groupe H définissable de G satisfaisant $U(H) < U(G)$ et ayant une action nontriviale sur un Λ-arbre est virtuellement nilpotent. Cette situation est l'analogue de celles des mauvais groupes, dans notre contexte des actions sur les Λ-arbres.

L'une des propriétés satisfaites par les mauvais groupes est la conjuguaison des sous-groupes de Borel. Pour pouvoir définir des groupes qui soient semblables aux sous-groupes de Borel, nous supposons que notre groupe est de rang de Lascar fini. Cela permet de borner la classe de nilpotence des sous-groupes nilpotents. Nous introduisons la définition suivante qui englobe les propriétés satisfaites par les sous-groupes de Borel.

Définition 2.3.1. *Soit G un groupe et $\mathcal{B}$ une classe de sous-groupes définissables de G. On dit que $\mathcal{B}$ est une classe de Borel s'il existe $B \in \mathcal{B}$ généreux tel que $N_G(B)/B$ est fini et $\mathcal{B} = \{B^g | g \in G\}$.* □

Un sous-groupe $B \leq G$ est dit *généreux* si l'ensemble $\bigcup_{g \in G} B^g$ est générique. Rappelons que le *biindex* d'un sous-groupe $A \leq G$ est le cardinal de l'espace des doubles cosets $A/G\backslash A$. Le résultat principal que nous obtenons est le suivant.

Théorème 2.3.2. *Soit $\Lambda = \mathbb{Z}$ ou $\Lambda = \mathbb{R}$ et soit G un groupe superstable de rang de Lascar fini ayant une action nontriviale sur un Λ-arbre. Supposons que si H est un sous-groupe définissable ayant une action nontriviale sur un Λ-arbre et vérifiant $U(H) < U(G)$, alors H est virtuellement nilpotent. Alors il existe des sous-groupes définissables $H_1 \trianglelefteq H_2 \trianglelefteq G$ tels que H_2 est d'indice fini dans G et une des propriétés suivantes est satisfaite :*

(1) H_1 est connexe, toute action de H_1 sur un Λ-arbre est triviale, H_2/H_1 est résoluble et a une action nontriviale sur un Λ-arbre.

(2) H_2/H_1 satisfait les propriétés suivantes :

(2)(i) H_2/H_1 est simple et agit nontrvialement sur un Λ-arbre.

(2)(ii) Il existe $m \in \mathbb{N}$ et une classe de Borel $\mathcal{B}$ de sous-groupes équationnellement définissables et nilpotents de H_2/H_1, tels que pour tout élément hyperbolique $g \in H_2/H_1$, $g^n \in B$ pour un certain $B \in \mathcal{B}$ et $1 \leq n \leq m$.

(2)(iii) Si $\Lambda = \mathbb{Z}$, alors $H_2/H_1 = G_1 *_A G_2$ avec A est de biindex 2 dans G_1 et dans G_2. □

La preuve du théorème précédent procède comme suit. Soit G° la composante connexe de G. On considère les cas suivants :

1. G° est d'indice infini dans G.
2. G° est d'indice fini et l'action de G est réductible.
3. G° est d'indice fini et l'action de G est irréductible.

Tout d'abord, en utilisant l'alternative donnée dans le Théorème 1.1.3, on obtient le lemme suivant d'intérêt indépendant.

Lemme 2.3.3. *Soit G un groupe superstable de rang de Lascar fini. Alors G a un sous-groupe normal connexe H tel que $H \leq G^\circ$ et tel que G/H est nilpotent-par-fini.* □

Dans le cas (1), on suppose d'abord que H a une action nontriviale sur un Λ-arbre. Par hypothèse, H est nilpotent-par-fini. Il s'ensuit que G est résoluble-par-fini et on démontre, dans ce cas, qu'on obtient le cas (1) du théorème. Si on suppose que toute action de H sur un Λ-arbre est triviale, le Théorème 2.1.6 nous dit que G/H a une action nontriviale sur un Λ-arbre et par conséquent on obtient aussi dans ce cas la configuration (1) du théorème.

En ce qui concerne le cas (2), on déduit que G° est définissable et a une action nontriviale réductible sur un Λ-arbre. En utilisant le Théorème 2.1.6, on déduit, dans ce cas, qu'on obtient aussi le cas (1) du théorème.

La cas le plus intéressant est le cas (3). On déduit que G° est définissable et possède une action irréductible sur un Λ-arbre. Dans ce cas, on utilise la proposition suivante pour obtenir des groupes simples.

Proposition 2.3.4. *Soit $\Lambda = \mathbb{Z}$ ou $\Lambda = \mathbb{R}$. Soit G un groupe superstable ayant une action irréductible sur un Λ-arbre. Soit E l'ensemble des éléments élliptiques de G. Supposons que si H est un sous-groupe sous-normal définissable de G tel que $U(H) < U(G)$, alors l'action de H est réductible. Alors G a une série $H_1 \leq H_2 \leq G$ telle que $H_1 \subseteq E$, H_2 a indice fini et H_2/H_1 est simple et a une action nontriviale (et irréductible) sur un Λ-arbre.* □

En appliquant la proposition précédente à la composante connexe G°, on obtient les sous-groupes désirés H_1 et H_2 et la propriété (2)(i) du théorème. Il reste à démontrer la propriété (2)(ii).

Définition 2.3.5. *Soit G un groupe et $\mathcal{B}$ une classe de sous-groupes de G. On dit que la classe $\mathcal{B}$ est fermée si tout $B \in \mathcal{B}$ est définissable, $N_G(B)/B$ est fini et pour tout $g \in G$, $B^g \in \mathcal{B}$.* □

Proposition 2.3.6. *Soit Λ un groupe abélien ordonné. Soit G un groupe α-connexe superstable qui agit nontrivialement sur un Λ-arbre. Soit $\mathcal{B}$ une classe fermée de sous-groupes de G qui vérifie les propriétés suivantes :*

(1) *l'action de tout $B \in \mathcal{B}$, par restriction est abélienne et nontriviale ;*

(2) *pour tout $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, si $B_1 \neq B_2$, $B_1 \cap B_2$ agit trivialement par restriction.*

Alors $\mathcal{B}$ est une classe de Borel. □

Pour trouver les bons éléments qui vont constituer la classe $\mathcal{B}$, on définit une notion de connexité notée $*$-*connexité*. Ensuite, on prend pour éléments de $\mathcal{B}$, les sous-groupes nilpotent $*$-connexe et contenant un élément hyperbolique, et maximaux pour les propriétés précédentes. Le reste de la preuve consiste à démontrer que cette classe est fermée et vérifie les propriétés (1) et (2) de la proposition précédente.

Pour conclure ce chapitre, l'étude des configurations semblables à celles présentées dans la section précédente et à celles du Théorème 2.3.2(2), est nécessaire. Si de telles configurations n'existent pas, alors cela donnerait, une fois pour toutes, une classification des groupes superstables qui agissent sur les arbres simpliciaux. Si de telles configurations existent, alors cela permettrait d'avoir des contre-exemples aux conjectures de Ch. Berline vues au chapitre précédent, et en particulier à la Conjecture d'Algebricité dans le cadre superstable. Par ailleurs, cela permetrait d'avoir d'autres exemples de groupes simples qui se scindent en produits libres amalgamés.

Chapitre 3

Groupes hyperboliques sans torsion à deux générateurs

A. Nies [Nie03a] avait étudié en 2003, l'homogénéité du groupe libre de rang 2 et il a démontré qu'il est homogène mais pas premier. L'homogénéité, d'un point de vue modèle-théorique, peut être comparée à la saturation. Par exemple, un groupe dénombrable est saturé si et seulement s'il est homogène et réalise tous les types sur l'ensemble vide.

La preuve de Nies semble utiliser de façon fondamentale le fait que les groupes qu'il a considérés sont engendrés par deux éléments. Les groupes libres de rang fini sont l'archétype des groupes hyperboliques sans torsion et d'où l'idée naturelle d'étudier l'homogénéité des groupes hyperboliques sans torsion engendrés par deux éléments. Cette étude permet de comprendre le problème de l'homogénéité des groupes libres d'une façon plus générale et les résultats obtenus dans ce contexte sont exposés dans le chapitre suivant.

Dans ce chapitre, nous exposons les résultats obtenus pour les groupes hyperboliques sans torsion à deux générateurs. Nous introduisons une nouvelle classe de groupes que nous appellons les groupes *fortement co-hopfiens*, qui est une sous-classe de celle des groupes co-hopfiens. Nous démontrons que les groupes non-libres hyperboliques sans torsion à deux générateurs sont fortement co-hopfiens. Cette propriété permet de démontrer que ces groupes sont existentiellement homogène et qui sont des modèles premiers, contrairement aux groupes libres. En particulier, nous obtenons une réponse positive à une question posée par A. Nies sur l'existence des groupes premiers qui ne soient pas quasi-axiomatisables. Les résultats exposés dans cette section sont extraits de [OH11a].

3.1 Généralités

Soit $\mathfrak{M}$ un modèle *dénombrable* et soit $\bar{a}$ un uplet fini d'éléments de $\mathfrak{M}$. Soit P un sous-ensemble de $\mathfrak{M}$, considéré comme un ensemble de paramètres. Le type de $\bar{a}$, au-dessus de P, noté $tp^{\mathfrak{M}}(\bar{a}|P)$ est défini comme étant l'ensemble de toutes les formules $\psi(\bar{x})$, à paramètres dans P, telles que $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{a})$. On dit que $\mathfrak{M}$ est *homogène* si pour tous uplets $\bar{a}, \bar{b}$ de $\mathfrak{M}$ ayant la même longueur, on a $tp^{\mathfrak{M}}(\bar{a}|\emptyset) = tp^{\mathfrak{M}}(\bar{b}|\emptyset)$, si et seulement si, il existe un automorphisme de $\mathfrak{M}$ qui envoi $\bar{a}$ sur $\bar{b}$[1].

D'une façon similaire, on définit les types existentielles (on ne considère que les formules existentielles) et l'homogénéité existentielle. Bien évidemment, l'homogénéité existentielle implique l'homogénéité. Rappelons qu'un modèle $\mathfrak{M}$ est dit *premier* s'il se plonge élémentairement dans tout

[1] Il convient de signaler que cette définition de l'homogénéité coïncide avec la définition générale dans le cas des modèles dénombrables. Pour la notion plus générale, nous renvoyons le lecteur à la première section du chapitre suivant et aux livres [Mar02, Hod93]

modèle de sa théorie élémentaire. A. Nies avait étudié l'homogénéité et la primalité des groupes libres de rang 2 et a démontré le théorème suivant.

Théorème 3.1.1. [Nie03a] *Un groupe libre de rang* 2 *est existentiellement homogène mais pas premier. En particulier la théorie élémentaire d'un groupe libre non abélien n'a pas de modèle premier.* □

La preuve du théorème précédent utilise d'une façon fondamentale le fait que le groupe considéré a deux générateurs. En fait, elle utilise la propriété suivante. Soit F un groupe libre de base $\{a, b\}$. Alors il existe une formule $\psi(x, y)$ qui vérifie : pour tout endomorphisme f de F si $F \models \psi(f(a), f(b))$ alors f est injective. On peut prendre pour $\psi(x, y)$ la formule simple : $[x, y] \neq 1$.

L'idée est de voir si on peut trouver ce genre de formules pour les groupes hyperboliques sans torsion à deux générateurs. Cette propriété peut être vue comme une version modèle-théorique de la propriété bien connue en théorie des groupes : la propriété d'être co-hopfien.

Définition 3.1.2. *Un groupe G est co-hopfien si tout endomorphisme injective de G est un automorphisme.* □

Exemples 3.1.3.

(1) *Parmi les exemples les plus simples, on trouve les groupes finis et le groupe des rationnels.*

(2) *$SL_n(\mathbb{Z})$ pour $n \geq 3$ (G. Prasad [Pra76], 1976).*

(3) *Les groupes hyperboliques sans torsion librement indécomposables (Z. Sela [Sel97b], 1997).*

(4) *Mapping class groups des surfaces fermées (N. V. Ivanov, J.D. McCarthy [IM99], 1999).*

(5) *$B_n/Z(B_n)$ où B_n est le groupe de tresses à n brins (R.W. Bell, D. Margalit [BM06], 2006).*

(6) *Le groupe des automorphismes extérieurs $Out(F_n)$ où F_n est le groupe libre de rang* 2 *(B. Farb, M. Handel [FH07], 2007).*

On introduit une notion plus forte de la propriété co-hopfe.

Définition 3.1.4. *Un groupe G est dit fortement co-hopfien s'il existe un ensemble fini S d'éléments non triviaux de G tel que pour tout endomorphisme f de G, si $1 \notin f(S)$ alors f est un automorphisme.* □

Exemples 3.1.5.

(1) *Les groupes finis, le groupe des rationnels.*

(2) *Les monstres de Tarski. Rappelons qu'un groupe G est un monstre de Tarski, s'il existe p, où p est un nombre premier ou $p = +\infty$, tel que tout sous-groupe propre non trivial de G est cyclique d'ordre p. Un tel groupe est nécessairement simple et à deux générateurs. Si f est un endormorphisme non trivial de G, alors f est injective, car G est simple, et $f(G)$ est un sous-groupe non trivial de G et est isomorphe à G. Par conséquent $f(G) = G$ et f est un automorphisme.*

Associée à la finitude de la présentation, la notion précédente est intéressante du point de vue de la théorie des modèles, car elle permet d'obtenir des propriétés d'homogénéité et de primalité.

Lemme 3.1.6. *Un groupe de présentation finite et fortement co-hopfien est existentiellement homogène et premier.* □

3.2 Homogénéité existentielle et primalité

Il est bien connu que les groupes hyperboliques sont de présentation finie. Pour démontrer que les groupes hyperboliques sans torsion à deux générateurs sont existentiellement homogènes et premiers, nous utilisons le Lemme 3.1.6. Nous démontrons qu'ils sont fortement co-hopfiens.

Théorème 3.2.1. *Un groupe hyperbolique sans torsion non libre à deux générateurs est fortement co-hopfien.* □

En combinant avec le Lemme 3.1.6, on déduit.

Théorème 3.2.2. *Un groupe hyperbolique sans torsion non libre à deux générateurs est existentiellement homogène et premier.* □

Avant de donner l'idée générale de la preuve du Théorème 3.2.1, nous déduisons un corollaire. Rappelons qu'un groupe de type fini G est dit *Quasi-finiment axiomatisable* (en abrégé QFA) s'il existe un énoncé ψ, vrai dans G, tel que tout groupe de type fini qui satisfait ψ est isomorphe à G.

A. Nies [Nie03b] a démontré que le groupe nilpotent libre de classe 2 et à deux générateurs est QFA et premier. F. Oger et G. Sabbagh [OS06] généralisent ce résultat à tous les groupes libres nilpotents non abéliens de type fini. Ils ont montré aussi qu'un groupe nilpotent de type fini est QFA, si et seulement si, il est premier. Tous les groupes QFA connus, à cette période, étaient des groupes premiers et F. Oger pose la question de la réciproque.

A. Nies [Nie07] construit un nombre non dénombrable de groupes premiers. Etant donné qu'un groupe QFA est caractérisé par un seul énoncé, il déduit l'existence de groupes premiers non QFA.

D'un côté, A. Nies ne donne pas d'exemple explicite d'un groupe premier qui n'est pas QFA. D'un autre côté, les groupes qu'il construit sont tous quasi axiomatisables (en abrégé QA). Un groupe de type fini G est *quasi axiomatisable*, si tout groupe de type fini élémentairement équivalent à G est isomorphe à G. Il restait le problème de l'existence des groupes premiers non QA, un problème suggéré par A. Nies [Nie07].

Le Théorème 3.2.2 permet d'avoir des exemples bien explicites de groupes premiers qui ne sont pas QA. En effet, soit F le groupe libre de base $\{a, b\}$. Soit $r \in F$ un élément cycliquement réduit, qui n'est pas une puissance propre et dont l'ensemble symétrisé engendré satisfait la condition des petites simplifications $C'(1/6)$[2]. Alors le groupe

$$L = \langle a, b | r = 1 \rangle$$

est hyperbolique sans torsion, à deux générateurs et qui n'est pas libre. Par le Théorème 3.2.2, L est premier. En utilisant les résultats de Z. Sela [Sel09] sur la théorie élémentaire des groupes hyperboliques sans torsion, en déduit que L est élémentairement équivalent à $L * \mathbb{Z}$. Par conséquent, grâce au théorème de Grushko, L ne peut être QA.

La preuve du Théorème 3.2.1 procède comme suit. Soit Γ un groupe non libre, hyperbolique sans torsion à deux générateurs. On décompose d'abord Γ au dessus d'un groupe plus simple à étudier.

Théorème 3.2.3. *Soit Γ un groupe non libre, hyperbolique sans torsion à deux générateurs. Alors il existe une suite de sous-groupes $\Gamma = \Gamma_n \geq \Gamma_{n-1} \geq \cdots \geq \Gamma_1$, vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) *Chaque Γ_i est non libre, hperbolique à deux générateurs et quasi convexe.*
(2) *$\Gamma_i = \langle \Gamma_{i-1}, t | A^t = B \rangle$, où A et B sont des sous-groupes cycliques malnormaux de Γ_{i-1}.*
(3) *Γ_1 est rigide.* □

Rappelons, que dans ce contexte, un groupe G est dit *rigide*, s'il ne peut se décomposer d'une façon essentielle sur un sous-groupe cyclique, autrement dit, G ne peut s'écrire sous la forme $G = G_1 *_C G_2$ ou $G = \langle H, t | C^t = \phi(C) \rangle$ où C est cyclique et d'indice infini dans G_1 et G_2 ou H.

La preuve du Théorème 3.2.3 se base sur les résultats de I. Kapovich et R. Weidmann [KW99] qui ont étudié les groupes hyperboliques sans torsion à deux générateurs.

Une fois que la décomposition précédente est obtenue, on étudie les groupes rigides.

[2] On peut prendre, par exemple, $r = abab^2 \cdots ab^7$.

Lemme 3.2.4. *Soit Γ un groupe hyperbolique sans torsion et L un sous-groupe rigide de Γ. Alors il existe un sous-ensemble fini S de L, d'éléments nontriviaux, tel que pour tout homomorphisme f de L dans Γ, si $1 \notin f(S)$ alors f est un plongement.* □

En appliquant le lemme précédent à Γ_1, on obtient un sous ensemble fini S vérifiant les conclusions dudit lemme. La dernière étape consiste à montrer que si f est un endormorphisme de Γ tel que $1 \notin f(S)$, alors f est un automorphisme (de Γ). La preuve utilise d'une façon essentielle le fait que Γ a deux générateurs. En fait, on démontre par récurrence sur i, que la restriction de f à Γ_i est un automorphisme de Γ_i.

Pour conclure ce chapitre, il serait certainement très intéressant d'étudier d'autres classes de groupes qui peuvent être fortement co-hopfiens. Parmi les exemples de groupes co-hopfiens qui sont donnés précédement, quels sont ceux qui sont fortement co-hopfiens ?

Chapitre 4

Homogénéité dans les groupes libres

Dans le chapitre précédent, nous avons exposé les résultats sur les groupes non libres hyperboliques sans torsion à deux générateurs où nous avons vu qu'ils sont existentiellement homogènes et premiers. Il est naturel de se poser la question de savoir si un groupe libre est existentiellement homogène ou homogène, et plus généralement ce que l'on peut dire sur les groupes hyperboliques sans torsion.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'homogénéité existentielle et à l'homogénéité des groupes libres. La première section est consacrée à des définitions et à des résultats généraux. Dans la seconde section, nous présentons les résultats obtenus sur l'homogénéité existentielle. Dans la dernière section, nous montrons l'homogénéité des groupes libres. Ce dernier résultat est aussi démontré par C. Perin et R. Sklinos [PS10]. Les résultats de cette partie sont extraits de [OH11a].

4.1 Généralités

Nous complétons dans cette section les définitions données dans la première section du chapitre 3 et nous expliquons, en particulier, le lien avec la saturation. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [Mar02, Hod93].

Soit $\mathfrak{L}$ un langage du premier ordre. Soit A un ensemble, vu comme un ensemble de paramètres. On note par $\mathfrak{L}_A$ le langage obtenu, à partir de $\mathfrak{L}$, en rajoutant à celui-ci un symbole de constante c_a pour tout élément $a \in A$.

Soit $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un uplet de variables. Un *n-type* au-dessus de A est un ensemble $p(\bar{x})$ de $\mathfrak{L}_A$-formules à variables libres dans $\bar{x}$. Autrement dit, $p(\bar{x})$ est une théorie dans le langage $\mathfrak{L}_{A,x_1,\ldots,x_n}$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont considérés comme de nouveaux symboles de constantes. Le type $p(\bar{x})$ est dit *complet*, si pour toute $\mathfrak{L}_A$-formule $\varphi(\bar{x})$, $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ ou $\neg\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$.

Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathfrak{L}$-structure. Si $i : A \to \mathfrak{M}$ est une injection, la $\mathfrak{L}$-structure $\mathfrak{M}$ devient d'une façon naturelle une $\mathfrak{L}_A$-structure en interprétant chaque symbole de constante c_a par l'élément correspondant $i(a)$. Dans la suite, nous ne ferons pas de distinction entre A et son image dans $\mathfrak{M}$.

Si $\mathfrak{M}$ une $\mathfrak{L}_A$-structure, et p un n-type au-dessus de A, on dit p est *finiment réalisé* dans $\mathfrak{M}$, si pour tout sous-enesmble fini $q(\bar{x}) \subseteq p(\bar{x})$, il existe $\bar{b}$ dans $\mathfrak{M}$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{b})$ pour tout $\varphi(\bar{x}) \in q(\bar{x})$.

D'une façon similaire, un uplet $\bar{b}$, d'une $\mathfrak{L}_A$-structure $\mathfrak{N}$, dit *réalise* p, si pour toute formule $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$, on a $\mathfrak{N} \models \varphi(\bar{b})$. Les exemples de types complets sont les types des uplets dans un modèle donné. Si $\bar{b}$ est un uplet de $\mathfrak{M}$, le type de $\bar{b}$, (au-dessus de A), noté $tp_{\mathfrak{M}}(\bar{b}|A)$ est l'ensemble des $\mathfrak{L}_A$-formules $\varphi(\bar{x})$ telle que $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{b})$. Inversement, tout type complet au-dessus de A et finiment réalisé dans $\mathfrak{M}$, est réalisé dans une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$.

Soit λ un cardinal. Une $\mathfrak{L}$-structure $\mathfrak{M}$ est dite λ-*saturée* si pour tout sous-ensemble A d'éléments de $\mathfrak{M}$, de cardinal strictement plus petit que λ, tous les types complets au-dessus de A finiment réalisés dans $\mathfrak{M}$, sont réalisés dans $\mathfrak{M}$. La $\mathfrak{L}$-structure $\mathfrak{M}$ est dite *saturée* si elle est $|\mathfrak{M}|$-*saturée*, où $|\mathfrak{M}|$ est le cardinal de $\mathfrak{M}$.

Rappelons qu'une théorie T est λ-catégorique si tous les modèles de T de cardinal λ sont isomorphes. Comme exemple de modèles saturés, on a les modèles $\mathfrak{M}$, de cardinal λ, dont la théorie élémentaire est λ-catégorique. Par exemple, un corps algébriquement clos de carinal $\lambda \geq \aleph_1$ est saturé. Signalons aussi que pour tout cardinal λ, toute $\mathfrak{L}$-structure $\mathfrak{M}$ a une extension élémentaire λ-saturée. Les ultrapuissances constituent des exemples de telles extensions, qui sont dans un certain sens plus concrètes.

Soit α un cardinal et $(a_i)_{i\in\alpha}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{M}$. Pour simplifier, une telle suite sera notée $\bar{a}$ et nous dirons qu'elle est de longueur α. Nous notons $(\mathfrak{M}, \bar{a})$ la $\mathfrak{L}_\alpha$-structure où chaque c_i est interprété par a_i. Nous écrivons $(\mathfrak{M}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{N}, \bar{b})$ pour exprimer que les deux $\mathfrak{L}_\alpha$-structures, $(\mathfrak{M}, \bar{a}), (\mathfrak{N}, \bar{b})$ sont élémentairement équivalentes.

Soit λ un cardinal. Une $\mathfrak{L}$-structure $\mathfrak{M}$ est dite λ-*homogène* si pour toutes suites $\bar{a}, \bar{b}$ de longueur $\alpha < \lambda$, si $(\mathfrak{M}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{M}, \bar{b})$ alors pour tout élément c de $\mathfrak{M}$, il existe un élément d de $\mathfrak{M}$ tel que $(\mathfrak{M}, \bar{a}, c) \equiv (\mathfrak{M}, \bar{b}, d)$. La $\mathfrak{L}$-structure $\mathfrak{M}$ est dite *homogène* si elle est $|\mathfrak{M}|$-*homogène*, où $|\mathfrak{M}|$ est le cardinal de $\mathfrak{M}$.

La $\mathfrak{L}$-structure $\mathfrak{M}$ est dite *fortement* λ-*homogène* si pour toutes suites $\bar{a}, \bar{b}$ de longueur $\alpha < \lambda$, si $(\mathfrak{M}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{M}, \bar{b})$ alors il existe un automorphisme f de $\mathfrak{M}$ tel que $f(\bar{a}) = \bar{b}$. De même, $\mathfrak{M}$ est dite *fortement homogène* si elle est *fortement* $|\mathfrak{M}|$-*homogène*, où $|\mathfrak{M}|$ est le cardinal de $\mathfrak{M}$.

Une $\mathfrak{L}$-structure $\mathfrak{M}$ est homogène si et seulement si elle est fortement homogène. Signalons aussi que toute $\mathfrak{L}$-structure λ-saturée est λ-homogène. Les deux propositions suivantes, qu'on peut trouver dans [Mar02, Hod93], mettent en lumière le fait que l'homogénéité est une forme de saturation.

Proposition 4.1.1. *Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathfrak{L}$-structure et λ un cardinal. Alors $\mathfrak{M}$ est λ-saturée si et seulement si pour toute $\mathfrak{L}$-structure $\mathfrak{N}$, pour toutes suites $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ respectivement, de longueur $\alpha < \lambda$, si $(\mathfrak{M}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{N}, \bar{b})$, alors pour pour tout élément c de $\mathfrak{N}$, il existe un élément d de $\mathfrak{M}$ tel que $(\mathfrak{M}, \bar{a}, c) \equiv (\mathfrak{N}, \bar{b}, d)$.* □

Proposition 4.1.2. *Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathfrak{L}$-structure dénombrable. Alors $\mathfrak{M}$ est saturée si et seulement si $\mathfrak{M}$ est homogène et réalise tous les types finiment réalisés dans $\mathfrak{M}$ au-dessus de l'ensemble vide.* □

Remarquons qu'un groupe libre Γ ne peut être saturé, car tout modèle saturé de la théorie élémentaire de Γ doit contenir une copie de tout groupe limite de Γ, en particulier une copie de $\mathbb{Z}^2$. De même pour les groupes hyperboliques sans torsion, une propriété qui découle aussi de la propriété plus générale qu'un groupe infini de type fini ne peut être saturé.

4.2 Homogénéité existentielle

Rappelons qu'un sous-groupe L d'un groupe G est *existentiellement clos* (dans G), en abrégé e.c., si toute formule existentielle, à paramètres dans L, qui est vraie dans G est vraie dans L. Les groupes existentiellement clos sont ceux qui sont existentiellement clos dans toutes leurs extensions. Il s'avère que l'existentielle homogénéité des groupes libres est liée au comportement des sous-groupes e.c.

Pour éviter une lourdeur de notation, on introduit la définition suivante. Soit F un groupe libre et $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un uplet fini d'éléments de F. On dit que $\bar{a}$ est une puissance d'un élément primitif, s'il existe un élément primitif b, et des entiers naturels, $m_1, \ldots, m_n$ tels que $a_i = b^{m_i}$ pour tout i. Autrement dit, le sous-groupe engendré par $\bar{a}$ est inclus dans un facteur libre cyclique de

F. Rappelons qu'un élément est *primitif* s'il est un élément d'une base. On note par $tp^F_\exists(\bar{a}|P)$ le type existentiel de $\bar{a}$ au-dessus de P, i.e. l'ensemble des formules existentielles à paramètres dans P satisfaites par $\bar{a}$. Le résultat prinicipal est le suivant.

Théorème 4.2.1. *Soit F un groupe libre de rang fini. Soit $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uplets finis d'éléments de F et soit P un sous-ensemble de F. Si $tp^F_\exists(\bar{a}|P) = tp^F_\exists(\bar{b}|P)$, alors un des deux cas suivants se produit :*

(1) *$\bar{a}$ a le même type existentiel au-dessus de P qu'une puissance d'un élément primitif,*

(2) *il existe un sous-groupe e.c. de F, $E(\bar{a})$ contenant $\bar{a}$ (resp. $E(\bar{b})$ contenant $\bar{b}$) et P et un isomorphisme $\tau : E(\bar{a}) \to E(\bar{b})$ qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$ et qui fixe P point par point.* □

Une des conséquences du théorème précédent, on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.2.2. *Soit F un groupe libre de rang fini. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *F est existentiellement homogène.*

(2) *Les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) Si $\bar{a}$ est un uplet ayant le même type existentiel qu'une puissance d'un élément primitif, alors $\bar{a}$ est lui même une puissance d'un élément primitif.

(ii) Tout sous-groupe e.c. de F est un facteur libre de F. □

On voit en particulier le lien entre l'existentielle homogénéité et la place des sous-groupes e.c. d'un groupe libre. L'investigation de ces sous-groupes fera l'objet d'une recherche ultérieure. Le reste de cette section est dédié à donner l'idée générale de la preuve du Théorème 4.2.1.

Comme nous l'avons vu, une des clès de la preuve de l'existentielle homogénéité du groupe libre de rang 2 et plus généralement, celle des groupes hyperboliques sans torsion à deux générateurs, est la propriété suivante. Si G est engendré par $\bar{a}$, il existe un formule existentielle $\psi(\bar{x})$ telle que pour tout endomorphisme f de G, si G satisfait $\psi(f(\bar{a}))$ alors f est injective (et un automorphisme dans le cas où le groupe n'est pas libre). Malheureusement, la propriété précédente n'est pas satisfaite dans les groupes libres de rang supérieur. On peut considère une variante plus faible, qui peut être interprétée comme une propriété locale. Comme on s'intéresse aux uplets fixés et non à tous les uplets, cela conduit au problème suivant. Soit F un groupe libre, de rang fini et soit $\bar{a}$ et $\bar{b}$ des uplets finis de F. Soit $\bar{s}$ une base de F. Sous quelles conditions, existe-il une formule existentielle $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ telle que F satisfait $\psi(\bar{a}, \bar{s})$, et telle que pour tout endomorphisme f qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$, si F satisfait $\psi(\bar{b}, f(\bar{s}))$, alors f est injective ?

Pour répondre à la question précédente, une analyse préliminaire nous conduit à la définition suivante, qui va donner par la suite une condition nécessaire et suffisante pour avoir les formules ayant les bonnes propriétés.

Définition 4.2.3. *Soit F_1 et F_2 deux groupes libres de rang fini. Soit $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}$) un uplet fini de F_1 (resp. F_2). On dit que $(\bar{a}, \bar{b})$ est existentiellement rigide, s'il n'existe pas de décomposition en produits libres, $F_1 = A * B$ et un uplet $\bar{c}$ dans A tels que $tp^{F_1}_\exists(\bar{a}) \subseteq tp^A_\exists(\bar{c}) \subseteq tp^{F_2}_\exists(\bar{b})$.* □

Remarque 4.2.4.

(1) *Comme A est un sous-groupe e.c. de F_1, on a $tp^A_\exists(\bar{c}) = tp^{F_1}_\exists(\bar{c})$.*

(2) *On note que $(\bar{a}, \bar{a})$ est existentiellement rigide si et seulement si $tp^{F_1}_\exists(\bar{a}) \cup tp^{F_1}_\exists(\bar{a})$ n'est pas réalisé dans aucun groupe libre de rang plus petit que celui de F_1.*

(3) *Si F est un groupe libre de rang 2, alors pour tout $\bar{a}, \bar{b}$ dans F, $(\bar{a}, \bar{b})$ est existentiellement rigide.*

On désigne par $Hom(F_1|\bar{a}, F_2|\bar{b})$ l'ensemble des homomorphismes de F_1 dans F_2 qui envoient $\bar{a}$ sur $\bar{b}$. Pour achever la preuve du Théorème 4.2.1 nous démontrons la proposition suivante.

Proposition 4.2.5. *Soit F_1 et F_2 deux groupes libres de rang fini. Soit $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}$) un uplet fini de F_1 (resp. F_2). Soit $\bar{s}$ une base de F_1. Supposons que $(\bar{a}, \bar{b})$ est existentiellement rigide. Alors il existe une formule sans-quantificateur $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ telle que F_1 satisfait $\varphi(\bar{a}, \bar{s})$ et telle que pour tout $f \in Hom(F_1|\bar{a}, F_2|\bar{b})$, si F_2 satisfait $\varphi(\bar{b}, f(\bar{s}))$ alors f est un plongement.* □

La proposition précédente constitue une étape cruciale dans la preuve du Théorème 4.2.1. Informellement, elle exprime le fait que si le type existentiel n'est pas réalisé dans un sous-groupe de rang plus petit, alors on dispose d'une formule existentielle ayant les bonnes propriétés énoncées dans ladite proposition. Le proposition qui suit constitue une autre étape importante, dont la preuve se base sur la Proposition 4.2.5, où nous établissons le lien avec les sous-groupes e.c.

Proposition 4.2.6. *Soit F_1 et F_2 deux groupes libres de rang fini. Soit $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}$) un uplet fini de F_1 (resp. F_2) tels que $tp_\exists^{F_1}(\bar{a}) = tp_\exists^{F_2}(\bar{b})$. Supposons que $(\bar{a}, \bar{b})$ est existentiellement rigide. Alors ou F_1 est de rang 2 et $\bar{a}$ est une puissance d'un élément primitif, ou il existe un plongement $h \in Hom(F_1|\bar{a}, F_2|\bar{b})$ tel que $h(F_1)$ est un sous-groupe e.c. de F_2.* □

Nous disposons de la proposition clé pour esquisser la preuve du Théorème 4.2.1, dans le cas plus simple où $P = \emptyset$. Soit F un groupe libre de rang fini. Soit $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uplets finis d'éléments de F tels que $tp_\exists^F(\bar{a}) = tp_\exists^F(\bar{b})$. Soit C un facteur libre de F, de rang minimal, qui contient un uplet $\bar{c}$ tel que $tp_\exists^C(\bar{c}) = tp_\exists^F(\bar{a})$. Alors $(\bar{c}, \bar{a})$ et $(\bar{c}, \bar{b})$ sont existentiellement rigides.

Par la Proposition 4.3.4, ou bien le rang de C est 2 et $\bar{c}$ est une puissance d'un élément primitif, ou bien il existe un plongement $h_1 \in Hom(C|\bar{c}, F|\bar{a})$ (resp. $h_2 \in Hom(C|\bar{c}, F|\bar{b})$) tel que $h_1(C)$ (resp. $h_2(C)$) est un sous-groupe e.c. de F.

Si le premier cas se produit, alors $\bar{a}$ a le même type qu'une puissance d'un élément primitif et on obtient la conclusion (1) du Théorème 4.2.1. Sinon, on pose $E(\bar{a}) = h_1(C)$ et $E(\bar{b}) = h_2(C)$ et dans ce cas $h_2 \circ h_1^{-1} : E(\bar{a}) \to E(\bar{b})$ est un isomorphisme qui vérifie $h_2 \circ h_1^{-1}(\bar{a}) = \bar{b}$; on obtient la conclusion (2) du Théorème 4.2.1.

Nous concluons cette section, par la proposition qui suit, exprimant l'homogénéité existentielle pour les uplets rigides.

Proposition 4.2.7. *Soit F un groupe libre de rang fini et soit $\bar{a}$ et $\bar{b}$ des uplets finis de F tels que $tp_\exists^F(\bar{a}) = tp_\exists^F(\bar{b})$. Si $(\bar{a}, \bar{b})$ est existentiellement rigide, alors il existe un automorphisme f de F tel que $f(\bar{a}) = \bar{b}$.* □

4.3 Homogénéité

La stratégie de la preuve de l'homogénéité des groupes libres est analogue à celle de la section précédente. Le résultat principal est le suivant.

Théorème 4.3.1. *Soit F un groupe libre de rang fini. Soit $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uplets finis d'éléments de F et soit P un sous-ensemble de F. Si $tp^F(\bar{a}|P) = tp^F(\bar{b}|P)$ alors il existe un automorphisme f de F qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$ et qui fixe P point par point.* □

Dans ce contexte, grâce à l'élimination des quantificateurs démontrée par Sela, on utilise les formules $\forall\exists$ au lieu de considérer toutes les formules. On replace les formules sans-quantificateur qui apparaissent dans la section précédente par des formules universelles. De même dans ce contexte, on abouti au problème suivant. Soit F un groupe libre, de rang fini et soit $\bar{a}$ et $\bar{b}$ des uplets finis

de F. Soit $\bar{s}$ une base de F. Sous quelles conditions, existe-il une formule universelle $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ telle que F satisfait $\psi(\bar{a}, \bar{s})$, et telle que pour tout endomorphisme f qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$, si F satisfait $\psi(\bar{b}, f(\bar{s}))$, alors f est injective ?

Pour répondre à la question précédente, on introduit aussi dans ce contexte, la définition suivante, qui va donner par la suite une condition nécessaire et suffisante.

Définition 4.3.2. *Soit F un groupe libre et $\bar{a}$ un uplet fini de F. On dit que $\bar{a}$ est rigide, s'il n'existe pas de décomposition en produits libres, $F = A*B$ et un uplet $\bar{c}$ dans A tel que $tp^F_{\forall\exists}(\bar{a}) = tp^A_{\forall\exists}(\bar{c})$.* □

Alors, on a la proposition suivante qui est l'analogue de la Proposition 4.2.5, où on désigne par $Hom(F_1|\bar{a}, F_2|\bar{b})$ l'ensemble des homomorphismes de F_1 dans F_2 qui envoient $\bar{a}$ sur $\bar{b}$, comme dans la section précédente.

Proposition 4.3.3. *Soit F_1 et F_2 deux groupes libres de rang fini. Soit $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}$) un uplet fini de F_1 (resp. F_2). Soit $\bar{s}$ une base de F_1. Supposons que $tp^{F_1}_{\forall\exists}(\bar{a}) = tp^{F_2}_{\forall\exists}(\bar{b})$ et que $\bar{a}$ est rigide. Alors il existe une formule universelle $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ telle que F_1 satisfait $\varphi(\bar{a}, \bar{s})$ et telle que pour tout $f \in Hom(F_1|\bar{a}, F_2|\bar{b})$, si F_2 satisfait $\varphi(\bar{b}, f(\bar{s}))$ alors f est un plongement.* □

La preuve de la proposition précédente est plus complexe que son analogue de la section précédente. Elle constitue aussi une étape cruciale dans la preuve du Théorème 4.3.1. Comme dans le cas de l'existentielle homogénéité, elle exprime aussi le fait que si le type $\forall\exists$ n'est pas réalisé dans un sous-groupe de rang plus petit, alors on dispose d'une formule universelle ayant les bonnes propriétés énoncées dans ladite proposition. La proposition qui suit constitue une autre étape importante, dont la preuve se base sur la proposition précédente, où on établit le lien avec des sous-groupes analogues aux groupes e.c.

Proposition 4.3.4. *Soit F_1 et F_2 deux groupes libres de rang fini. Soit $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}$) un uplet fini de F_1 (resp. F_2) tel que $tp^{F_1}_{\forall\exists}(\bar{a}) = tp^{F_2}_{\forall\exists}(\bar{b})$. Supposons que $\bar{a}$ est rigide. Alors ou bien F_1 est de rang 2 et $\bar{a}$ est une puissance d'un élément primitif, ou bien il existe un plongement $h \in Hom(F_1|\bar{a}, F_2|\bar{b})$ tel que $h(F_1) \preceq_{\exists\forall} F_2$.* □

Nous disposons de la proposition nécessaire pour esquisser la preuve du Théorème 4.3.1, dans le cas plus simple où $P = \emptyset$. Soit F un groupe libre de rang fini. Soit $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux uplets finis d'éléments de F tel que $tp^F_{\forall\exists}(\bar{a}) = tp^F_{\forall\exists}(\bar{b})$. Soit C un facteur libre de F, de rang minimal, qui contient un uplet $\bar{c}$ tel que $tp^C_{\forall\exists}(\bar{c}) = tp^F_{\forall\exists}(\bar{a})$. Alors $\bar{c}$ est rigide.

Par la Proposition 4.3.4, ou bien le rang de C est 2 et $\bar{c}$ est une puissance d'un élément primitif, ou bien il existe un plongement $h_1 \in Hom(C|\bar{c}, F|\bar{a})$ (resp. $h_2 \in Hom(C|\bar{c}, F|\bar{b})$) tel que $h_1(C) \preceq_{\exists\forall} F$ (resp. $h_2(C) \preceq_{\exists\forall} F$).

Si le premier cas se produit, alors $\bar{a}$ a le même type qu'une puissance d'un élément primitif. Dans ce cas un théorème d'A. Pillay [Pil09], nous permet de conclure, car on déduit que $\bar{a}$ lui-même est une puissance d'un élément primitif. De même pour $\bar{b}$, et par conséquent, on obtient un automorphisme qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$.

Supposons maintenant que $\bar{c}$ n'est pas une puissance d'un élément primitif. On pose $E(\bar{a}) = h_1(C)$ et $E(\bar{b}) = h_2(C)$ et dans ce cas $h_2 \circ h_1^{-1} : E(\bar{a}) \to E(\bar{b})$ est un isomorphisme qui vérifie $h_2 \circ h_1^{-1}(\bar{a}) = \bar{b}$. Comme $E(\bar{a}) \preceq_{\exists\forall} F$ et $E(\bar{b}) \preceq_{\exists\forall} F$, on conclu que $E(\bar{a})$ et $E(\bar{b})$ sont des sous-groupes élémentaires de F. Un théorème de C. Perin [Per09], permet de conclure qu'ils sont en fait des facteurs libres. Par conséquent, on peut prolonger $h_2 \circ h_1^{-1}$ à un automorphisme de F.

Le reste de cette section est consacrée à esquisser la preuve de la Proposition 4.3.3 qui est dans ce cas plus complexe. La preuve de la Proposition 4.2.5 procède par contradiction et la

stratégie de la preuve de la Proposition 4.3.3 est semblable. On suppose qu'il n'existe pas de formule existentielle vérifiant les propriétés désirées. Sous cette hypothèse, on construit une suite de sous-groupes $(L_n|n \in \mathbb{N})$ de F_2 vérifiant :

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un homomorphisme non-injectif $f_n : F_1 \to L_n$ tel que $f(\bar{a}) = \bar{b}$.

(2) Il existe un uplet $\bar{c}$ dans L_n tel que $tp_{\exists}^{F_2}(\bar{b}) = tp_{\exists}^{L_n}(\bar{c})$.

Les deux propriétés précédentes permettent d'avoir une décomposition nontriviale de $F_1 = A*B$ et un uplet $\bar{d}$ de A tel que $tp_{\exists}^{F_1}(\bar{a}) \subseteq tp_{\exists}^{A}(\bar{d}) \subseteq tp_{\exists}^{F_2}(\bar{b})$, ce qui est une contradiction avec le fait que $(\bar{a}, \bar{b})$ est existentiellement rigide.

Dans la preuve de la Proposition 4.3.3 une étude plus détaillée des suites précédentes était nécessaire. Il fallait avoir dans la propriété (2), pas seulement des formules existentielles, mais plutôt des formules $\forall\exists$. Cela nous a mené à introduire la notion suivante.

Définition 4.3.5. *Soit F un groupe libre de rang fini et $\bar{b}$ un uplet de F. Une suite $(L_n|n \in \mathbb{N})$ de F est dite une bonne suite si les propriétés suivantes sont satisfaites.*

(1) *Il existe un sous-groupe D tel que :*

(i) D contient $\bar{b}$,

(ii) D est librement indécomposable relativement au sous-groupe engendré par $\bar{b}$,

(iii) D est un facteur libre de L_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) *Il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que le rang de L_n est r pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(3) *Pour toute formule universelle $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ telle que $\exists\bar{y}\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in tp_{\exists\forall}^{F}(\bar{b})$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\bar{\alpha}_n \in L_n$ tel que $F \models \varphi(\bar{b}, \bar{\alpha}_n)$.*

Pour une telle suite, r est appelé le rang et D le facteur libre. □

Ensuite, il s'agit de démontrer la proposition suivante.

Proposition 4.3.6. *Soit F un groupe libre de rang fini et $\bar{b}$ un uplet de F. Si $(L_n|n \in \mathbb{N})$ est une bonne suite de F alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et un uplet $\bar{c}$ de L_n tels que $tp_{\exists\forall}^{F}(\bar{b}) = tp_{\exists\forall}^{L_n}(\bar{c})$.* □

La preuve de la proposition précédente procède par induction sur le rang r de la bonne suite $(L_n|n \in \mathbb{N})$. Par la suite, elle permet d'avoir une décomposition nontriviale de $F_1 = A * B$ et un uplet $\bar{c}$ de A tel que $tp_{\exists\forall}^{F_1}(\bar{c}) = tp_{\exists\forall}^{F_1}(\bar{a})$, ce qui est une contradiction avec le fait que $\bar{a}$ est rigide.

Chapitre 5

Clôture algébrique et définissable dans les groupes libres

La notion de clôture algébrique en théorie des modèles est une généralisation de la notion similaire en théorie des corps. Dans un corps K, si L est un sous-corps, on dit d'un élément b de K qu'il est algébrique sur L, s'il existe un polynôme $P(x)$, à coefficients dans L, tel que b est une racine de P.

D'une façon générale, si $\mathfrak{M}$ est un modèle et A st un sous-ensemble de $\mathfrak{M}$, on dit que b est *algébrique* sur A, s'il existe une formule $\psi(x)$ à paramètres dans A, telle que $\mathfrak{M}$ est modèle de $\psi(b)$ et $\psi(x)$ n'a qu'un nombre fini de réalisations dans $\mathfrak{M}$. On dit que b est *définissable* sur A, s'il existe une formule $\psi(x)$ à paramètres dans A, telle que b est l'unique élément vérifiant ψ.

On note par $acl(A)$ (resp. $dcl(A)$) l'ensemble des éléments algébriques sur A (resp. définissables sur A). Il s'ensuit que $acl(A)$ et $dcl(A)$ sont des sous-structures de $\mathfrak{M}$. En particulier, si on considère le langage de la théorie des groupes, $acl(A)$ est un sous-groupe. On voit aussi que $dcl(A)$ est un sous-groupe de $acl(A)$.

La clôture algébrique joue un rôle important dans l'étude des théories finidimensionnelles, plus particulièrement dans les théories fortement minimales. Plus généralement, elle est utilisée dans les théories stables. Z. Sela a démontré en 2006, que les groupes libres sont stables. Lors d'une conférence à Anogia en 2008, Z. Sela pose la question de savoir si la clôture algébrique d'un ensemble A coïncide avec sa clôture définissable dans un groupe libre.

Dans ce chapitre, nous exposons le travail en commun avec D. Vallino, sur l'étude de la clôture algébrique et définissable dans les groupes libres. La première section est consacrée à des propriétés générales concernant les groupes limites et les décompositions JSJ. Dans la seconde section, le traitement est dans le cadre plus général des groupes hyperboliques sans torsion, où nous exposons le schéma de la preuve que tout groupe hyperbolique sans torsion est constructible à partir de la clôture algébrique de tout sous-groupe nonabélian A, en particulier $acl(A)$ est de type fini, quasi-convexe et hyperbolique. Dans la seconde section, nous exposons les résultats qui concernent plus la clôture définissable et la place de la clôture algébrique dans les décompositions JSJ cycliques. Nous avons aussi étudié la clôture algébrique et définissable existentielle, mais par soucis de simplicité, nous nous bornerons à exposer les résultats sur la clôture algébrique ordinaire. En particulier, nous apporterons une réponse négative à la question de Z. Sela. Le travail présenté est extrait de [OH11c].

5.1 Généralités

Les briques de base dans l'étude de la théorie élémentaire des groupes libres et plus généralement celle des groupes hyperboliques sans torsion sont les *groupes limites*. Ils coïncident avec les groupes de type fini qui vérifient la théorie universelle du groupe étudié. On considère dans la suite un groupe Γ dont on désire étudier la théorie élémentaire.

Définition 5.1.1. *Soit G une groupe de type fini et soit $\hat{f} = (f_n : G \to \Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'homomorphismes. On dit que la suite est convergente, si pour tout $g \in G$, ou bien $f_n(g) = 1$ pour presque tout $n \in \mathbb{N}$, ou bien $f_n(g) \neq 1$ pour presque tout $n \in \mathbb{N}$. Pour une suite convergente $\hat{f}$, le noyau stable, noté $Ker(\hat{f})$, est définit comme l'ensemble des éléments g tel que $f_n(g) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand. Le groupe $G/Ker(\hat{f})$ est appelé un groupe Γ-limite.* □

Une façon plus simple de décrire les choses, serait d'utiliser les ultrafiltres. Soit ω un ultrafiltre nonprincipal sur $\mathbb{N}$. On désigne par ${}^{\omega}\Gamma$ l'ultrapuissance de Γ relativement à ω. Soit G un groupe de type fini et soit $(f_n : G \to \Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'homomorphismes. Alors il existe un homomorphisme $f : G \to {}^{\omega}\Gamma$ définit par $f(g) = (f_n(g)|n \in \mathbb{N})$. L'image de G par f est appelée un groupe Γ-*limite*.

Bien sûr, il y a équivalence entre les deux définitions, mais peut être pas pour la même suite d'homomorphismes. Ce qui est intéressant d'un point de vue de la théorie des modèles, est l'identité suivante.

Lemme 5.1.2. *Un groupe H de type fini est un groupe Γ-limite, si et seulement si, il vérifie la théorie universelle de Γ.* □

Fixons une partie génératrice finie S de Γ. Alors le graphe de Cayley $Cay(\Gamma, S)$, relativement à S, est un espace métrique géodésique. On considère bien sûr ici, la réalisation métrique pour obtenir un espace géodésique. Rappelons la définition d'un cône asymptotique.

Définition 5.1.3. *Soit (X, d) un espace métrique. Soit ω un ultrafiltre nonprincipal sur $\mathbb{N}$. Soit $\hat{\lambda} = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs dont la limite est infinie, appelée suite des scalaires. Soit $\hat{e} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X, appelée suite des points d'observations.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note par d_n la distance sur X définie par $d_n(x, y) = d(x, y)/\lambda_n$.

Soit $\hat{X}$ l'ensemble des suites $\hat{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles il existe c, dépendant de $\hat{x}$, tel $d_n(x_n, e_n) \leq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On définit une relation d'équivalence sur $\hat{X}$ par $\hat{x} \approx \hat{y}$, si et seulement si, $\lim_\omega d_n(x_n, y_n) = 0$.

Le cône asymptotique de X, relativement à $\hat{e}$, à $\hat{\lambda}$ et ω, noté $Con^{\omega}(X, \hat{e}, \hat{\lambda})$, est l'espace quotient $\hat{X}/\approx$ muni de la distance définie par $d_\omega(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_\omega d_n(x_n, y_n)$. □

Les cônes asymptotiques de Γ sont les cônes asymptotiques de ses graphes de Cayley. Soit G une groupe de type fini et soit $\hat{f} = (f_n : G \to \Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'homomorphismes. On définit, $N = Ker_\omega(\hat{f}) = \{g \in G|\omega(\{n \in \mathbb{N}|f_n(g) = 1\}) = 1\}$. Comme, on l'a remarqué plus haut, G/N se plonge dans ${}^{\omega}\Gamma$ par l'homomorphisme $f : G \to {}^{\omega}\Gamma$ définit par $f(g) = (f_n(g)|n \in \mathbb{N})$. L'une des propriétés de base des groupes limites, est exprimée dans le lemme suivant.

Lemme 5.1.4. *Posons $L = G/N$. Un des cas suivants se produit.*

(1) *Pour presque tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : L \to \Gamma$ est un plongement.*

(2) *L agit nontrivialement sur un cône asymptotique de Γ.*

Supposons que Γ est hyperblolique sans torsion. Alors $Cay(\Gamma, S)$ est δ-hyperbolique pour un $\delta \geq 0$. Il n'est pas très difficile de voir que les cônes aysmptotiques des espaces hyperboliques sont des arbres réels. Par conséquent, tout cône asymptotique de $Cay(\Gamma, S)$ est un arbre réel. Une étude

détaillée de l'action obtenue dans le cas (2), dont les origines remontent aux travaux de Paulin [Pau88], montre que les stabilisateurs des segments nontriviaux sont abéliens et les stabilisateurs des tripodes sont triviaux. En particulier, l'action est superstable (du point de vue de la théorie géométrique des groupes) dans le sens de [Gui08]. Cela permet d'utiliser la théorie de Rips sur les actions des groupes sur les arbres réels, pour déduire que L admet une décomposition abélienne, dont la définition est rapidement rappelée ci-après.

Soit $\mathcal{C}$ une classe de sous-groupes de G et H un sous-groupe de G. Une $(\mathcal{C}, H)$-*décomposition* de G au-dessus de $\mathcal{C}$ relative à H, est la donnée d'un uplet $\Lambda = (\mathcal{G}(V,E), T, \varphi)$, où $\mathcal{G}(V,E)$ est un graphe de groupes dont les groupes associés aux arêtes sont dans $\mathcal{C}$, H est elliptique, T est un sous-arbre maximal de $\mathcal{G}(V,E)$ et $\varphi : G \to \pi(\mathcal{G}(V,E), T)$ est un isomorphisme ; où $\pi(\mathcal{G}(V,E), T)$ désigne le groupe fondamental de $\mathcal{G}(V,E)$ relativement à T. Rappelons, que dans ce contexte, un sous-groupe est elliptique s'il est inclus dans un conjugué d'un des groupes associés aux sommets.

Si $\mathcal{C}$ est la classe des groupes abéliens ou cycliques, la décomposition est dite *abélienne*, respectivement *cyclique*. Rappelons aussi qu'un groupe est dit *librement indécomposable relativement à* H si G n'a pas de décomposition nontriviale $G = G_1 * G_2$ avec H est contenu dans un des facteurs.

Théorème 5.1.5. *Soit Γ un groupe hyperbolique sans torsion. Soit G un groupe de type fini et H un sous-groupe non abélien de G tel que G est librement indécomposable relativement à H. Soit $e : H \to \Gamma$ un plongement. Soit $(f_n : G \to \Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'homomorphismes, deux-à-deux distincts, dont la restriction à H est e. Supposons que la suite est convergente et que son noyau stable est trivial. Alors G admet un décomposition abélienne nontriviale relative à H.* □

L'un des outils utilisés par Sela dans l'étude des groupes limites des groupes hyperboliques sans torsion est *l'argument de raccourcissement*. D'une façon informelle, cet argument peut s'expliquer comme suit. Etant donné une suite d'actions d'un groupe de type fini G sur la graphe de Cayley de Γ (obtenues, par exemple, à partir d'une suite d'homomorphismes), on obtient une action de G sur un cône asymptotique de Γ. En analysant cette action, on peut trouver des automorphismes d'un type particulier, appelés *automorphismes modulaires*, qui permettent, après précomposition, de raccourcir la longueur de l'action. On désigne par $Mod_H(G)$ le groupe des automorphismes modulaires fixant H point par point. On fixe un système générateur fini B de G. On désigne par $|.|$ la longueur des éléments de Γ par rapport au système générateur S.

Définition 5.1.6. *Soit $f : G \to \Gamma$ un homomorphisme. On dit que f est court, relativement à H, si pour tout automorphisme modulaire $\sigma \in Mod_H(G)$, on ait $\max_{b\in B} |f(b)| \leq \max_{b\in B} |f \circ \sigma(b)|$.* □

Théorème 5.1.7. *Soit Γ un groupe hyperbolique sans torsion. Soit G un groupe de type fini et H un sous-groupe non abélien de G tel que G est librement indécomposable relativement à H. Soit $e : H \to \Gamma$ un plongement. Soit $(f_n : G \to \Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'homomorphismes, deux-à-deux distincts, telle que la restriction de chaque f_n à H est e. Supposons que la suite est convergente et que son noyau stable est trivial. Alors pour tout ultrafiltre nonprincipal ω, $\omega(\{n \in \mathbb{N} | f_n$ n'est pas court$\}) = 1$.* □

Sont associés à l'argument de raccourcissement, des quotients propres des groupes limites, appelés par Sela les *quotients raccourcissant*.

Définition 5.1.8. *Soit Γ un groupe hyperbolique sans torsion. Soit G un groupe de type fini et H un sous-groupe non abélien de G tel que G est librement indécomposable relativement à H. Soit $e : H \to \Gamma$ un plongement. Soit $\hat{f} = (f_n : G \to \Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'homomorphismes, deux-à-deux distincts, dont la restriction à H est e, et tels que chaque f_n est court. Le quotient $SG = G/Ker(\hat{f})$ est appelé un quotient raccourcissant de G.* □

Comme conséquence immédiate du Théorème 5.1.7, on obtient le théorème suivant.

Théorème 5.1.9. *Sous les hypothèses précédentes, SG est un quotient propre de G.* □

Pour la notion des décompositions JSJ, nous utilisons la définition donnée par Guirardel et Levitt [GL09, GL10] et quelques variantes. Leur définition est donnée dans le cadre des actions sur les arbres simpliciaux, que nous traduisons ici en termes de décompositions en graphe de groupes.

Soit $\mathcal{C}$ une classe de sous-groupes de G et H un sous-groupe de G. Soit Λ_1 et Λ_2 deux $(\mathcal{C}, H)$-décompositions de G (au-dessus de $\mathcal{C}$ relative à H). On dit que Λ_1 *domine* Λ_2 si tout sous-groupe de G qui est elliptique par rapport à Λ_1 est aussi elliptique par rapport à Λ_2.

Une $(\mathcal{C}, H)$-décomposition Λ est dite *universellement elliptique* si tout groupe associé à une arête de Λ est elliptique dans toute autre $(\mathcal{C}, H)$-décomposition de G.

Définition 5.1.10. *Une décomposition JSJ de G, au-dessus de $\mathcal{C}$ relative à H, est une $(\mathcal{C}, H)$-décomposition de G, qui est universellement elliptique et qui domine toutes les autres $(\mathcal{C}, H)$-décompositions universellement elliptiques de G.* □

Si $\mathcal{C}$ est la classe des groupes abéliens ou cycliques, la décomposition est dite *abélienne*, respectivement *cyclique*. Guirardel et Levitt [GL09, GL10] démontrent l'existence des décompositions JSJ des groupes de présentation finie, modulo certaines hypothèses sur la classe $\mathcal{C}$. Ils démontrent aussi leur existence pour les groupes de type fini CSA au-dessus de la classe des groupes abéliens. Etant donné que tout groupe Γ-limite, où Γ est hyperbolique sans torsion, est CSA, nous utiliserons ces résultats.

Dans une $(\mathcal{C}, H)$-décomposition Λ de G, un groupe associé à un sommet est dit *rigide*, s'il est elliptique dans toute autre $(\mathcal{C}, H)$-décomposition de G, sinon, il est dit *flexible*. Un groupe associé G_v à un sommet v de Λ est dit de type *QH-surface* s'il est isomorphe au groupe fondamental d'une surface Σ tel que les images des groupes associés aux arêtes adjacentes à v sont des sous-groupes des sous-groupes de frontière de Σ et tel que tout conjugué de H intersecte G_v dans un sous-groupe de frontière de Σ.

On a le théorème suivant extrait de [GL10] qui montre l'existence et décrit la structure des décompositions JSJ abéliennes des groupes CSA.

Théorème 5.1.11. *Soit G un groupe de type fini sans torsion et CSA. Soit H un sous-groupe non abélien de G tel que G est librement indécomposable relativement à H. Alors les décompositions JSJ abéliennes de G relativement à H existent et leurs sommets flexibles non abéliens sont de type QH-surface.* □

Il découle des propriétés des décompositions JSJ que si H est non abélien alors H est contenu dans un conjugué d'un groupe associé à un sommet rigide des décompositions JSJ. Quitte à conjuguer par un élément, nous supposons que les décompositions JSJ que nous utilisons vérifient la propriété que H est inclus dans un groupe associé à un sommet rigide. On a aussi les propriétés suivantes.

Lemme 5.1.12. *Soit G un groupe de type fini sans torsion et CSA. Soit H un sous-groupe non abélien de G tel que G est librement indécomposable relativement à H. Soit Λ une décomposition JSJ abélienne de G relativement à H. Soit $e : H \to \Gamma$ un plongement.*

(1) *Tout automorphisme modulaire de $Mod_H(G)$ fixe point par point le groupe associé au sommet contenant H.*

(2) *Soit $\hat{f} = (f_n : G \to \Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'homomorphismes, deux-à-deux distincts, telle que la restriction de chaque f_n à H est e, et ayant un noyau stable trivial. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\sigma_n \in Mod_H(G)$ tel que $f_n \circ \sigma_n$ est court. Soit SG le quotient raccourcissant correspondant et $\pi : G \to SG$ l'homomorphisme quotient. Alors la restriction de π au groupe associé au sommet contenant H est injectif.* □

Les propriétés précédentes sont suffisantes dans le cadre des groupes Γ-limites. Mais pour les groupes hyperboliques Γ sans torsions, on peut avoir des propriétés plus fortes. Nous utiliserons ici une définition considérée dans [CG05]. Soit Λ une décomposition abélienne de G relativement à H et soit A elliptique dans Λ. Le *voisinage elliptique abélien* de A est le sous-groupe de G engendré par les éléments elliptiques qui commutent avec les éléments de A. Il est démontré dans [CG05] que toute décomposition abélienne Λ de G, avec G supposé commutatif transitif, peut être transformée en une décomposition abélienne Λ' de G, tel que le graphe sous-jacent de Λ' est le même que celui de Λ, et tel que tout groupe G_v associé à un sommet v dans Λ' est le voisinage elliptique abélien du groupe sommet correspondant à v dans Λ (de même pour les groupes associés aux arêtes). Il s'ensuit, en particulier, que les groupes associés aux arêtes sont maximaux dans les groupes associés aux sommets adjacents.

En appliquant à une décomposition JSJ abélienne de G au-dessus de H, où G supposé de type fini, sans torsion et CSA, la transformation décrite ci-dessus, on abouti à une décomposition abélienne de G où chaque groupe associé à une arête est maximal dans les groupes associés aux sommets adjacents. Malheureusement la décomposition obtenue n'est pas une décomposition JSJ au sens de la Définition 5.1.10. Néanmoins, elle possède des propriétés semblables. Nous appellerons de telles décompositions des *décompositions JSJ généralisées*.

Lemme 5.1.13. *Soit G un groupe de type fini sans torsion et CSA. Soit H un sous-groupe non abélien de G tel que G est librement indécomposable relativement à H. Soit Λ une décomposition JSJ généralisée abélienne de G relativement à H. Soit $e : H \to \Gamma$ un plongement. Alors les propriétés exprimées dans le Lemme 5.1.12 restent vraies.* □

5.2 Constructibilité à partir de la clôture algébrique

Soit Γ un groupe hyperbolique sans torsion et A un sous-sensemble de Γ. Il n'est pas très difficile de voir que A et le sous-groupe engendré par A ont la même clôture algébrique. De même, pour la clôture définissable. Donc on peut supposer sans perte de généralité que A est un sous-groupe. Le lemme suivant réduit le problème à des configurations plus confortables.

Lemme 5.2.1. *Soit Γ un groupe hyperbolique sans torsion et A un sous-groupe de Γ. Soit $C_\Gamma(A)$ le centralisateur de A dans Γ.*

(1) *Si A est abélien et nontrivial, alors $acl(A) = dcl(A) = C_\Gamma(A)$.*

(2) *Si $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ et $A \leq \Gamma_1$, alors $acl(A) \leq \Gamma_1$.* □

Par conséquent, on peut supposer que A est non abélien et que Γ est librement indécomposable relativement à A.

Z. Sela, dans son étude des groupes Γ-limites, démontre que tout groupe Γ-limite peut être obtenu à partir des sous-groupes de Γ par une séquence finie de produits libres amalgamés ou HNN-extensions au-dessus des groupes cycliques. La preuve utilise les actions sur les arbres réels et les quotients raccourcissent. En appliquant ce résultat à Γ lui même, cela ne fourni malheureusement pas d'information sur Γ. En utilisant des méthodes de preuves similaires et en analysant de plus près la place occupée par la clôture algébrique, on a le théorème suivant. Nous précisons d'abord la notion de constructibilité utilisée.

Définition 5.2.2. *Soit G un groupe, A un sous-groupe de G est $\mathcal{C}$ une classe de sous-groupes de G. On définit par récurrence sur n, $\mathcal{K}_0 = \{A\}$, $\mathcal{K}_{n+1} = \mathcal{K}_n \cup \{B_1 *_C B_2, B *_C | B_1, B \in \mathcal{K}_n, B_2 \leq G, C \in \mathcal{C}\}$. Nous dirons que G est constructible à partir de A au-dessus de $\mathcal{C}$, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G \in \mathcal{K}_n$.* □

Théorème 5.2.3. *Soit Γ un groupe hyperbolique sans torsion et A un sous-groupe de Γ non abélien. Alors Γ peut être construit à partir de $acl(A)$ au-dessus de groupes cycliques. En particulier $acl(A)$ est de type fini, quasi-convexe et hyperbolique.* □

Nous utilisons dans la suite, une notion plus faible de clôture algébrique qui permet d'avoir des résultats plus généraux. Si G est un groupe et A un sous-ensemble de G, on note par $acl^{\exists}(A)$, appelée *la clôture algébrique existentielle*, l'ensemble des éléments b tel qu'il existe une formule existentielle $\psi(x)$, à paramètres dans A, telle que $\psi(b)$ est vraie dans G et $\psi(x)$ n'a qu'un nombre fini d'éléments qui la satisfasse dans G. On voit aussi que $acl^{\exists}(A)$ est un sous-groupe de G. On dit de A qu'il est *finiment existentiellement clos* (dans G) si $acl^{\exists}(A) = A$.

Théorème 5.2.4. *Soit Γ un groupe hyperbolique sans torsion et A un sous-groupe de Γ non abélien finiment existentiellement clos. Alors Γ peut être construit à partir de A au-dessus de groupes cycliques. En particulier $acl(A)$ est de type fini, quasi-convexe et hyperbolique.* □

Comme pour tout sous-ensemble A, $acl(A)$ est finiment existentiellement clos, le Théorème 5.2.3 est une conséquence du Théorème 5.2.4. Celui-ci permet aussi d'avoir quelques propriétés des sous-groupes existentiellement clos d'un groupe hyperbolique sans torsion. C. Perin [Per09] avait montré que si A est un sous-groupe élémentaire de Γ, alors ce dernier a une structure de tour hyperbolique au-dessus de A. Il découle, en particulier que A est de type fini, quasi-convexe et hyperbolique. Remarquons qu'un sous-groupe élémentaire est en particulier e.c. Le Théorème 5.2.4 permet d'avoir les mêmes propriétés, puisque un groupe e.c. est en particulier finiment existentiellement clos.

Corollaire 5.2.5. *Un sous-groupe e.c. d'un groupe hyperbolique sans torsion est de type fini, quasi-convexe et hyperbolique.* □

La preuve du Théorème 5.2.4 repose sur l'utilisation des actions sur les arbres réels, les décompositions JSJ abéliennes et l'argument de raccourcissement. En fait, on démontre la proposition plus générale suivante.

Proposition 5.2.6. *Soit Γ un groupe hyperbolique sans torsion et A un sous-groupe non abélien de Γ finiment existentiellement clos. Soit ${}^*\Gamma$ une ultrapuissance nonprincipale de Γ. Soit $K \leq {}^*\Gamma$ un sous-groupe de type fini contenant A, librement indécomposable relativement à A. Alors un des cas suivants se produit.*

(1) *Soit Λ une décomposition JSJ abélienne de K relativement à A. Alors le groupe sommet contenant A dans Λ est exactement A.*

(2) *Il existe un sous-groupe de type fini $L \leq {}^*\Gamma$ contenant A et un epimorphisme non injectif $f : K \to L$ vérifiant :*

(i) f envoi A à A point par point ;

(ii) si Λ est une décomposition JSJ abélienne de K relativement à A, alors la restriction de f au groupe sommet contenant A dans Λ est injective. □

En utilisant la condition de chaîne descendante sur les groupes Γ-limites, on déduit que K est constructible à partir de A par une séquence finie de produits libres amalgamés ou HNN-extensions au-dessus des groupes abéliens. En particulier, cela est vrai pour Γ et on obtient le Théorème 5.2.4.

Le fait que la clôture algébrique soit de type fini est une conséquence immédiate, mais c'est une propriété importante. En utilisant un théorème de Bestvina-Feighn [BF92] et un théorème de Kapovich et Weidmann [KW99], sur la combinaison des groupes hyperboliques, on déduit que A est quasi-convexe et hyperbolique.

Nous esquissons rapidement la preuve de la Proposition 5.2.6. Soit $\bar{d} = \{d_1, \ldots, d_p\}$ un système générateur fini de K. La première étape consiste à trouver une formule $\phi(\bar{x})$ vérifiant la propriété

suivante. Si $f : K \to \Gamma$ est une application telle que $\Gamma \models \phi(f(\bar{d}))$, alors f est un homomorphisme qui fixe point par point A.

Soit $(v_i(\bar{x}))_{i\in\mathbb{N}}$ la suite des mots réduits tels que $K \models v_i(\bar{d}) \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous considérons la formule

$$\varphi_n(\bar{x}) := \phi(\bar{x}) \wedge v_1(\bar{x}) \neq 1 \wedge \cdots \wedge v_n(\bar{x}) \neq 1.$$

Alors deux cas se présente.

(1) Il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que pour toute application $f : K \to \Gamma$ telle que $\Gamma \models \varphi_n(f(\bar{d}))$, f est un plongement. On démontre, dans ce cas que si Λ est une décomposition JSJ abélienne de K relativement à A, alors le groupe sommet contenant A dans Λ est exactement A. Dans ce cas, on obtient la conclusion (1) de la Proposition 5.2.6.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n : K \to \Gamma$ tel que $\Gamma \models \varphi_n(f_n(\bar{d}))$ et tel que f_n n'est pas un plongement. On déduit l'existence d'une suite convergente $(f_n : K \to \Gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ d'homomorphismes non-injectifs ayant un noyau stable trivial. On construit un quotient raccourcissant, qui est par le Théorème 5.1.9 propre. On obtient la conclusion (2) de la Proposition 5.2.6 en utilisant le Lemme 5.1.12.

5.3 La clôture algébrique dans la décomposition JSJ, clôture définissable

Dans l'étude dans la clôture algébrique, on est amené naturellement à voir sa place dans la décomposition JSJ. Une des questions naturelles est de savoir si la clôture algébrique coïncide avec le groupe sommet contenant A dans la décomposition JSJ. On a d'abord la proposition générale suivante.

Proposition 5.3.1. *Soit G un groupe sans torsion dont tout sous-groupe abélien est cyclique et soit A un sous-groupe de G. Soit Λ une décomposition abélienne de G relativement à A. Alors $acl(A)$ est contenue dans le voisinage elliptique abélien du groupe sommet contenant A.* □

Let fait que la décomposition soit abélienne est crucial. La preuve repose sur l'utilisation des Dehns twists, en démontrant que si b n'est pas dans le voisinage elliptique abélien du groupe sommet contenant A, alors on peut trouver des automorphismes de Dehns qui ont beaucoup d'images de b.

Dans le cas des groupes libres, on a le théorème suivant dont la preuve repose plus précisément sur la Proposition 4.3.3 et la Proposition 5.3.1. Précisons que les décompositions JSJ utilisées dans le théorème qui suit sont ceux données dans la Définition 5.1.10.

Théorème 5.3.2. *Soit F un groupe libre de rang fini et A un sous-groupe non abélien, où F est librement indécomposable relativement à A. Alors $acl(A)$ est exactement le voisinage elliptique abélien du groupe sommet contenant A dans toute décomposition JSJ cyclique de F relativement à A.* □

En utilisant les décompositions JSJ généralisées discutées à la fin de la première section de ce chapitre, nous obtenons.

Théorème 5.3.3. *Soit F un groupe libre de rang fini et A un sous-groupe non abélien, où F est librement indécomposable relativement à A. Alors $acl(A)$ est exactement le groupe sommet contenant A dans toute décomposition JSJ cyclique généralisée de F relativement à A.* □

Les théorèmes précédents expriment un lien entre une notion de la théorie géométrique des groupes et une notion issue de la théorie des modèles. En ce qui concerne le lien avec la clôture définissable, on a le résultat suivant.

Théorème 5.3.4. *Soit F un groupe libre de rang fini et A un sous-groupe non abélien de F. Alors :*
(1) *le rang de $acl(A)$ est borné par celui de F,*
(2) *$dcl(A)$ est un facteur libre de $acl(A)$.* □

En particulier, si le rang de F est 2 alors la clôture algébrique et définissable coïncident, ce qui donne une réponse partielle positive à la question de Sela. La preuve de Théorème 5.3.4(1) repose en particulier su le Théorème 5.2.3 et [OH10d].

5.4 Le contre exemple

Le cas du groupe libre de rang 2 semble, comme c'est généralement le cas, très particulier. Il n'existe pas d'identité entre la clôture algébrique et définissable dans les groupes libres de rang supérieur, comme le montre le théorème ci-après. Cela, répond en particulier, négativement à la question de Sela.

Théorème 5.4.1. *Soit A_0 un ensemble fini et*

$$A = \langle A_0, a, b, u | \rangle,\ H = A * \langle y | \rangle,$$

$$v = aybyay^{-1}by^{-1}, F = \langle H, t | u^t = v \rangle.$$

Alors F est un groupe libre de rang $|A_0| + 4$ et les propriétés suivantes sont satisfaites.
(1) *Si $f \in End(F/A)$, alors $f \in Aut(F/A)$ et $f(y) = y^{\pm 1}$.*
(2) *$acl(A) = acl^{\exists}(A) = H$.*
(3) *$dcl(A) = dcl^{\exists}(A) = A$.* □

On voit en particulier que $dcl(A)$ est un sous-groupe propre de $acl(A)$. Nous finissons ce chapitre par une esquisse rapide de la preuve du Théorème 5.4.1. La preuve de la propriété (1) est technique et consiste dans le calcul de $f(y)$ en exploitant les propriétés des formes normales. Nous supposons (1) et nous nous bornerons aux propriétés (2) et (3). On a

$$A \leq acl^{\exists}(A) \leq acl(A) \leq H,$$

et par conséquent pour démontrer $acl^{\exists}(A) = H$, il suffit de montrer que $y \in acl^{\exists}(A)$. Considérons la formule

$$\varphi(z) := \exists \alpha (u^{\alpha} = azbzaz^{-1}bz^{-1}).$$

Alors, en utilisant la propriété (1), les seuls éléments de F qui satisfont φ sont y et y^{-1} et par conséquent $y \in acl^{\exists}(A)$.

Etant donné que la clôture définissable est fixée, point par point, par tout automorphisme qui fixe A (point par point), pour démontrer la propriété (3), il suffit de montrer qu'il existe un automorphisme $f \in Aut(F/A)$ tel que pour tout $\gamma \in H \setminus A$, on ait $f(\gamma) \neq \gamma$. Soit f définit en étant l'identité sur A, $f(y) = y^{-1}$ et $f(t) = t(ay^{-1}by^{-1})^{-1}$. Alors f est un automorphisme de F fixant A point par point. Si $\gamma \in H \setminus A$, alors y apparaît dans la forme normale de γ, relativement à la structure du produit libre de H, et comme $f(y) = y^{-1}$, on déduit $f(\gamma) \neq \gamma$.

Chapitre 6

Groupes de présentation finie ayant un nombre infini de cônes asymptotiques

Les cônes asymptotiques ont été introduits par Gromov [Gro81] pour démontrer que les groupes à croissance polynomiale sont virtuellement nilpotents. L. van den Dries et A. J. Wilkie [WvdD84] ont donné une définition, qui se généralise à un groupe de type fini arbitraire et qui utilise l'analyse non standard, plus particulièrement les ultrafiltres. Dans [Gro93], Gromov pose la question de savoir si un groupe de type fini (ou de présentation finie) peut avoir deux cônes asymptotiques non homéomorphes. Une solution positive à ce problème a été fournie par S. Thomas et B. Velicovic [TV00]. Le groupe construit est une limite directe de groupes à petites simplifications et il n'est pas de présentation finie. Par la suite C. Drutu et M. Sapir [DS05] ont construit un groupe de type fini ayant $2^{\aleph_0}$ cônes asymptotiques deux à deux non homéomorphes. De même, ces groupes ne sont pas de présentation finie. L. Kramer, S. Shelah, K. Tent et S. Thomas [KSTT05] ont donné un exemple d'un groupe de présentation finie H tel que si l'hypothèse du continu est vraie alors H a un unique cône asymptotique, à homéomorphisme près, et si elle fausse alors H a (le nombre maximal possible) $2^{2^{\aleph_0}}$ de cônes asymptotiques (à homéomorphisme près). Cela montre en particulier que savoir si H a ou non un nombre infini de cônes asymptotiques est indépendant de ZFC.

Plus récemment, A. Ol'shanskii et M. Sapir [OS07] ont construit un groupe de présentation finie ayant deux cônes aysmptotiques non homéomorphes. Le groupe construit utilise les fonctions de Dehn, et il n'est pas très clair s'il possède ou non un nombre infini de cônes asymptotiques deux à deux non homéomorphes. Le problème restait de savoir s'il existe un groupe de présentation finie ayant un nombre infini de cônes asymptotiques deux à deux non homéomorphes et cela indépendamment de l'hypothèse du continu.

Un groupe de type fini G est dit *rétréci* si tout cône asymptotique de G admet au moins un point de coupure et dit *étalé* si aucun cône aysmptotique de G n'admet un point de coupure. C. Drutu et M. Sapir [DS05] ont posé la question de savoir si tout groupe qui n'est pas rétréci est étalé. A. Ol'shanski, D. Osin et M. Sapir [OOS09] ont construit des groupes qui ne sont ni rétrécis ni étalés. Le problème restait de savoir si l'hypothèse de la finitude d'une présentation pourrait forcer un groupe (de présentation finie) non rétréci à être étalé.

Dans ce chapitre, nous présentons un travail en commun avec D. Osin. Nous construisons des groupes de présentation finie ayant un nombre infini de cônes asymptotiques deux à deux non homémorphes et qui ne sont ni rétrécis ni étalés. Ce travail est extrait de [OH11b].

6.1 Généralités

Rappelons la définition d'un cône asymptotique d'un espace métrique, donnée aussi dans le chapitre précédent (Définition 5.1.3). Soit (X, d) un espace métrique. Soit ω un ultrafiltre nonprincipal sur $\mathbb{N}$. Soit $\hat{\lambda} = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs dont la limite est infinie, appelée la suite des scalaires. Soit $\hat{e} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X, appelée la suite des points d'observations.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note d_n la distance sur X définie par $d_n(x, y) = d(x, y)/\lambda_n$. Soit $\hat{X}$ l'ensemble des suites $\hat{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles il existe c, dépendant de $\hat{x}$, tel $d_n(x_n, e_n) \leq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On définit une relation d'équivalence sur $\hat{X}$ par $\hat{x} \approx \hat{y}$ si et seulement si $\lim_\omega d_n(x_n, y_n) = 0$. Le *cône asymptotique de* X, relativement à $\hat{e}$, à $\hat{\lambda}$ et ω, noté $\mathrm{Con}^\omega(X, \hat{e}, \hat{\lambda})$, est l'espace quotient $\hat{X}/\approx$ munie de la distance définie par $d_\omega(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_\omega d_n(x_n, y_n)$. La classe de $\hat{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera notée $(x_n)^\omega$.

Rappelons, que si G est un groupe de type fini et S est une partie génératrice finie de G, on note $|g|_S$ la longueur de g par rapport à S, c'est-à-dire $|g|_S$ est la longueur du plus petit mot w sur l'alphabet $S^{\pm 1}$ qui représente g. Le groupe G est munie d'une structure d'espace métrique en définissant la distance entre deux éléments $g, h \in G$ par $d_S(g, h) = |g^{-1}h|_S$. Un espace métrique X est appelé un *cône asymptotique de* G s'il existe une partie génératrice finie S de G, tel que X est un cône asymptotique de (G, d_S)[1].

Remarquons que pour une même suite de scalaires $\hat{\lambda} = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et un même ultrafiltre ω, les cônes asymptotiques $\mathrm{Con}^\omega(G, \hat{e}, \hat{\lambda})$ et $\mathrm{Con}^\omega(G, \hat{e}', \hat{\lambda})$, correspondants respectivement aux différents points d'observations $\hat{e}$ et $\hat{e}'$, sont isométriques. En effet, l'application $\pi : \mathrm{Con}^\omega(G, \hat{e}, \hat{\lambda}) \to \mathrm{Con}^\omega(G, \hat{e}', \hat{\lambda})$ définie par $\pi((x_n)^\omega) = (e'_n e_n^{-1} x_n)^\omega$ constitue une isométrie. Par conséquent, comme nous nous intéressons à distinguer les cônes asymptotiques non homéomorphes, nous ne considérons dans la suite que les cônes asymptotiques relativement aux points d'observations $\hat{1} = (e_n = 1)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour simplifier, de tels cônes asymptotiques seront notés $\mathrm{Con}^\omega(G, \hat{\lambda})$

Plusieurs propriétés algébriques et géométriques des groupes de type fini peuvent être encodées dans les propriétés topologiques de leurs cônes asymptotiques. Par exemple, un groupe de type fini est hyperbolique si et seulement si tous ses cônes asymptotiques sont des arbres réels [Gro87]. Tous les cônes asymptotiques de G sont propres si et seulement si G est nilpotent-par-fini [WvdD84].

Rappelons qu'un *point de coupure* d'un espace topologique X est un point dont l'enlèvement rend l'espace non connexe. L'existence de points de coupure dans un espace métrique géodésique complet X permet de définir une collection de pièces $\mathcal{P}$ par rapport à laquelle X est un arbre gradué [DS05]. Si X est le cône asymptotique d'un groupe de type fini G, cela rend, dans un certain sens et modulo d'autres informations, l'étude de G plus accessible. D'où l'idée de savoir si un groupe de type fini peut avoir des cônes asymptotiques dont certains ont des points des coupures et d'autres pas. Signalons aussi que si $\mathrm{Con}^\omega(G, \hat{\lambda})$ possède un point de coupure, alors l'ultrapuissance ${}^\omega G$ contient un groupe libre non abélien [DS05]. Un groupe de type fini est dit *rétréci* si tous ses cônes asymptotiques ont des points de coupure et dit *étalé* si tous ses cônes aysmptotiques sont sans point de coupure.

Nous commençons par un lemme, qui va être utilisé par la suite, et qui donne une condition suffisante pour avoir des points de coupure dans les cônes asymptotiques des HNN-extensions.

Lemme 6.1.1. *Soit G un groupe engendré par un ensemble fini S et soit A un sous-groupe de G. Soit $G^* = \langle G, t | a^t = a, a \in A\rangle$. Alors pour tout $g \in G$, $|g|_S = |g|_{S\cup\{t\}}$, et s'il existe un élément*

[1] On peut considérer, comme cela a été le cas dans le chapitre précédent, la réalisation métrique du graphe de Cayley, pour obtenir des cônes asymptotiques géodésiques.

$g_0 \in G$ *tel que* $A^{g_0} \cap A = 1$ *alors* G^* *est rétréci.* □

6.2 Plongements quadratiques préservant le centre

Le célèbre théorème de Higman [Hig61, LS77] affirme que tout groupe (dénombrable) récursivement présenté se plonge dans un groupe de présentation finie. Dans ce contexte, les propriétés conservées par ce genre de plongement sont très étudiées. Olshanskii a étudié la préservation de la longueur des éléments par ce genre de plongements et a démontré le théorème suivant.

Théorème 6.2.1. [Ol′97] *Soit G un groupe de type fini récursivement présenté et A une partie génératrice finie de G. Alors G se plonge dans un groupe de présentation finie H, ayant une partie génératrice finie B telle que $|g|_A = |g|_B$ pour tout élément $g \in G$.* □

Remeslennikov avait posé en 1976 le problème de savoir si tout groupe abélien dénombrable se plonge dans le centre d'un groupe de présentation finie. Motivé par ce problème, la préservation du centre par les plongements dans les groupes de présentation finie a été étudié dans [OH03]. Le théorème suivant est démontré dans [OH03, OH07a].

Théorème 6.2.2. [OH03, OH07a] *Tout groupe (dénombrable) récursivement présenté G se plonge dans un groupe de présentation finie H tel que $Z(G) = Z(H)$.* □

En utilisant la construction fournie dans la démonstration du théorème 6.2.2, combiné avec le théorème 6.2.1 et le Lemme 6.1.1, nous construisons des plongements qui préservent le centre et qui permettent d'avoir un contrôle sur la distorsion des éléments et sur les points de coupure.

Théorème 6.2.3. *Soit G un groupe de type fini récursivement présenté et A une partie génératrice finie de G. Alors G se plonge dans un groupe de présentation finie Γ, ayant une partie génératrice finie B telle que les propriétés suivantes sont satisfaites.*
(1) $Z(G) = Z(\Gamma)$.
(2) *Pour tout* $g \in G$, $\sqrt{|g|_A} \leq |g|_B \leq |g|_A$.
(3) $\Gamma/Z(\Gamma)$ *est rétréci.* □

Le reste de cette partie est consacré à donner l'idée générale de la démonstration du théorème 6.2.3. Nous rappelons rapidement la construction utilisée dans [OH03, OH07a]. Sans perte de généralité, on peut supposer que G est non abélien. Soit

$$G_0 = \langle G, z | g^z = g, g \in Z(G) \rangle.$$

On a $Z(G) = Z(G_0)$. Posons $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et soit F_X le groupe libre de base $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$. On a un isomorphisme naturel $v : F_X/R \to G_0$, où R est la clôture normale de la présentation de G_0 et qui envoie x_i sur a_i, $1 \leq i \leq n$, et x_{n+1} sur z. Soit

$$F_R = \langle F_X, d | r^d = r, r \in R \rangle.$$

Si w est un mot sur les générateurs de F_X, on note par $\bar{w}$ le mot obtenu en remplaçant x_i par a_i, $1 \leq i \leq n$, et x_{n+1} par z. Soit L le sous-groupe de F_R engendré par F_X et F_X^d. Alors L est le produit amalgamé de F_X et F_X^d au-dessus de R. Alors l'application qui envoie w sur $\bar{w}$ et w^d sur 1, pour tout w dans F_X, s'étend à un homomorphisme, noté ϕ, de L dans G_0.

On définit $\psi : L \times Z(G_0) \to L \times G_0$ par $\psi(l, g) = (l, \phi(l)g)$. Alors ψ est un homomorphisme injectif. En utilisant le théorème de plongement de Higman, on plonge F_R dans un groupe de présentation finie H. Soit

$$K = \langle H \times G_0, s | s^{-1}(l, g)s = (l, \phi(l)g), l \in L, g \in Z(G_0) \rangle.$$

Soit $M = G \times \langle t|\rangle$ et soit U le produit libre amalgamé où G s'envoie dans K et M de manière évidente

$$U = K *_G M.$$

Soit $r = (s^{-1}z) \cdot t \cdot z \cdot t^2 \cdots z \cdot t^{80}$. Alors l'ensemble symmétrisé engendré par r satisfait la condition de petite simplification $C'(1/70)$ par rapport à la structure en produit libre amalgamé de U. Soit N la clôture normale de r dans U et posons $\Gamma_0 = U/N$. Par [OH03, OH07a], Γ_0 est de présentation finie et $Z(G) = Z(\Gamma_0)$.

La seule propriété importante du groupe H utilisée dans la construction est la finitude de la présentation. Par conséquent, on choisit H vérifiant les conclusions du théorème 6.2.1. Cela permet de contrôler la distorsion du plongement. Pour pouvoir contrôler les points de coupure, on utilise une nouvelle extension HNN

$$\Gamma = \langle \Gamma_0, q | g^q = g, g \in G\rangle.$$

Alors Γ est de présentation finie et $Z(\Gamma) = Z(\Gamma_0) = Z(G)$. On a $G^z \cap G \leq Z(G)$. Il s'ensuit que $\Gamma/Z(\Gamma)$ est rétréci par le lemme 6.1.1. La démonstration de la propriété (2) du théorème, qui est très technique, exploite les propriétés de la construction, les propriétés des formes normales et du choix du groupe H.

6.3 Construction

Pour distinguer les cônes asymptotiques non homéomorphes, nous utilisons le *degré de connexité*. Pour un espace métrique X, le *degré de connexité* de X, noté $c(X)$, est défini comme étant le nombre minimal de points enlevés qui rendent X non connexe, si un tel nombre existe. Bien évidement, le degré de connexité d'un espace métrique est un invariant topologique. Remarquons que $c(X) = 1$ si et seulement si X a un point de coupure. Nous désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Le résultat principal est le suivant.

Théorème 6.3.1. *Il existe un groupe de présentation finie Γ tel que pour tout $p \in \mathcal{P} \cup \{1\}$, il existe une suite de scalaires $\hat{\lambda}$ telle que pour tout ultrafiltre nonprincipal ω, on ait $c(\mathrm{Con}^\omega(\Gamma, \hat{\lambda})) = p$.* □

Comme conséquence immédiate, Γ a un nombre infini de cônes asymptotiques deux à deux non homéomorphes, et il n'est ni étalé, ni rétréci. Dans le reste de cette partie, nous esquissons la démonstration du théorème précédent. Soit $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ une bijection recursive. On peut prendre par exemple

$$\alpha(j, n) = ((j + n)^2 + j + 3n)/2.$$

Posons $\alpha_1(m) = j$ pour $m = \alpha(j, n)$. Le lemme suivant nous permet d'avoir les ingrédients nécessaires des présentations des groupes récursivement présentés, qui vont être par la suite plongés dans des groupes de présentation finie.

Lemme 6.3.2. *Soit $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite récursivement énumérable de nombres naturels. Soit F le groupe libre de base $\{a, b\}$. Alors il existe une suite récursivement énumérable $(R_n|n \in \mathbb{N})$ d'éléments cycliquement réduits de F telle que les propriétés suivantes sont satisfaites.*

(1) *La fonction $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\beta(n) = |R_n|$ est récursive.*

(2) *L'ensemble symétrisé engendré par $(R_n|n \in \mathbb{N})$ satisfait la condition de petite simplification $C'(1/24)$.*

(3) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} p_{\alpha_1(k)}\beta(k) = o(\sqrt{\beta(n)}).$$

(4) *Soit $j \in \mathbb{N}$ fixé et posons $\lambda_n^j = \beta(\alpha(j,n))$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n^j = +\infty$.* □

En ayant les ensembles récursivement présentés, nous pouvons construire les groupes récursivements présentés grâce au lemme suivant.

Lemme 6.3.3. *Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres naturels telle que $k_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit F le groupe libre de base $\{a,b\}$ et $(R_n|n \in \mathbb{N})$ une suite d'éléments cycliquement réduits dont l'ensemble symétrisé engendré satisfait $C'(1/24)$. Soit*

$$G = \langle a, b | R_n^{k_n} = [R_n, a] = [R_n, b] = 1, n \in \mathbb{N}\rangle.$$

Alors les propriétés suivantes sont satisfaites.

(1) *Le centre $Z(G)$ de G coïncide avec l'image dans G du sous-groupe engendré par $(R_n|n \in \mathbb{N})$.*

(2) *Soit U un sous-mot de $R_n^{k_n}$ de longueur au plus $k_n|R_n|/2$. Alors la longueur de l'élément représenté par U dans G est au moins $|U|/8$. En particulier, $|R_n^\epsilon|_{\{a,b\}} \geq |R_n|/8$ pour tout $\epsilon \not\equiv 0\ [k_n]$, où $|R_n|$ désigne la longueur de R_n dans F.* □

Nous disposons maintenant des ingrédients nécessaires pour la construction. Soit $\hat{p} = (p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite récursivement énumérable d'entiers premiers. Soit $(R_n|n \in \mathbb{N})$ la suite donnée par le lemme 6.3.2. Soit $k_n = p_{\alpha_1(n)}$ et

$$G = \langle a, b | R_n^{k_n} = [R_n, a] = [R_n, b] = 1, n \in \mathbb{N}\rangle.$$

Alors G est récursivement énumérable et le sous-groupe N engendré par $(R_n|n \in \mathbb{N})$ est le centre de G par le lemme 6.3.3. Soit $A = \{a, b\}$, qui engendre G. Par le théorème 6.2.3, on plonge G dans un groupe de présentation finie Γ, ayant une partie génératrice finie B telle que pour tout $g \in G$, $\sqrt{|g|_A} \leq |g|_B \leq |g|_A$. On considère le centre N, qui, rappelons-le, coïncide avec le centre de Γ, équipé de la distance induite par celle de Γ par rapport à B. On note ses cônes asymptotiques, par rapport à cette distance, de la façon usuelle. Le lemme suivant, permet, par la suite, d'avoir un contrôle sur les cônes asymptotiques de Γ.

Lemme 6.3.4.

(1) *Soit $j \in \mathbb{N}$ fixé et posons $\hat{r}^j = (r_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$, $r_n^j = |R_{\alpha(j,n)}|_B$. Alors pour tout ultrafiltre nonprincipal ω, $\mathrm{Con}^\omega(N, \hat{r}^j)$ consiste exactement en p_j points.*

(2) *Posons $\hat{r} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $r_n = nk_n\beta(n)$. Alors pour tout ultrafiltre nonprincipal ω, $\mathrm{Con}^\omega(N, \hat{r})$ se réduit à un seul point.* □

Le lemme précédent est combiné avec le lemme suivant, pour aboutir aux propriétés désirées.

Lemme 6.3.5. [OOS09] *Soit N un sous-groupe central d'un groupe de type fini G, équipé de la métrique induite par celle de G. Supposons que $\mathrm{Con}^\omega(N, \hat{\lambda})$ consiste exactement en m points, pour un ultrafiltre nonprincipal ω et une suite de scalaires $\hat{\lambda}$. Alors $c(\mathrm{Con}^\omega(G, \hat{\lambda})) = mc(\mathrm{Con}^\omega(G/N, \hat{\lambda}))$.* □

Prenons $\hat{r}^j$ la suite donnée par le lemme 6.3.4 (1). Comme $N = Z(\Gamma)$, par le lemme 6.3.4(1), on déduit que $c(\mathrm{Con}^\omega(\Gamma, \hat{r}^j)) = p_j c(\mathrm{Con}^\omega(\Gamma/Z(\Gamma), \hat{r}^j))$. Par le théorème 6.2.3(3), $\Gamma/Z(\Gamma)$ est rétréci, i.e. $c(\mathrm{Con}^\omega(\Gamma/Z(\Gamma), \hat{r}^j)) = 1$, on obtient $c(\mathrm{Con}^\omega(\Gamma, \hat{r}^j)) = p_j$. De même, en prenant $\hat{r}$ la suite donnée par le lemme 6.3.4 (2), on obtient $c(\mathrm{Con}^\omega(\Gamma, \hat{r})) = 1$. En choisissant pour la suite des nombres premiers considérée la suite de tous les nombres premiers, on obtient que pour tout $p \in \mathcal{P} \cup \{1\}$, il existe une suite de scalaires $\hat{\lambda}$ telle que pour tout ultrafiltre nonprincipal ω, on ait $c(\mathrm{Con}^\omega(\Gamma, \hat{\lambda})) = p$, ce qui est l'énoncé du théorème 6.3.1.

Remarquons que pour deux suites différentes de nombres premiers $\hat{p} = (p_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $\hat{q} = (q_j)_{j\in\mathbb{N}}$, les groupes de présentation finie correspondants $\Gamma_{\hat{p}}$ et $\Gamma_{\hat{q}}$ satisfont $Z(\Gamma_{\hat{p}}) \ncong Z(\Gamma_{\hat{q}})$, et donc $\Gamma_{\hat{p}}$ et $\Gamma_{\hat{q}}$ ne sont pas isomorphes.

Liste des travaux présentés

[OH11c] A. Ould Houcine et D. Vallino. Algebraic and definable closure in free groups. *Soumis* (http ://arxiv.org/abs/1108.5641), 2011.

[OH11b] D. Osin et A. Ould Houcine. Finitely presented groups with infinitely many non-homeomorphic asymptotic cones. *Soumis* (http ://arxiv.org/abs/1108.2100), 2011.

[OH11a] A. Ould Houcine. Homogeneity and prime models in torsion-free hyperbolic groups. *Confluentes Mathematici*, 3(1) :121–155, 2011.

[OH08b] A. Ould Houcine. Superstable groups acting on trees. *Soumis* (http ://arxiv.org/abs/0809.3441), 2008.

[OH08a] A. Ould Houcine. On superstable CSA-groups. *Ann. Pure Appl. Logic*, 154(1) :1–7, 2008.

[OH07b] A. Ould Houcine. On superstable groups with residual properties. *Math. Log. Q.*, 53(1) :19–26, 2007.

[OH04] E. Jaligot et A. Ould Houcine. Existentially closed CSA-groups. *J. Algebra*, 280(2) :772–796, 2004.

Travaux

[OH11c] A. Ould Houcine et D. Vallino. Algebraic and definable closure in free groups. *Soumis* (http ://arxiv.org/abs/1108.5641), 2011.

[OH11b] D. Osin et A. Ould Houcine. Finitely presented groups with infinitely many non-homeomorphic asymptotic cones. *Soumis* (http ://arxiv.org/abs/1108.2100), 2011.

[OH11a] A. Ould Houcine. Homogeneity and prime models in torsion-free hyperbolic groups. *Confluentes Mathematici*, 3 (1) :121–155, 2011.

[OH10d] A. Ould Houcine. Note on free conjugacy pinched one-relator groups *Soumis*, 2010.

[OH10c] A. Ould Houcine. Note on the Cantor-Bendixson rank of limit groups. *Communications in Algebra*, 38 (8) :2825–2831, 2010.

[OH10b] L. Ciobanu et A. Ould Houcine. The monomorphism problem in free groups. *Archiv der Mathematik*, 94 :423–434, 2010.

[OH10a] A. Ould Houcine. Subgroup theorem for valuated groups and the csa property. *Journal of Algebra*, 134 (2) :159–182, 2010.

[OH09b] A. Ould Houcine. One variable equations in torsion-free hyperbolic groups. *Soumis* (http ://arxiv.org/abs/0902.3599), 2009.

[OH09a] A. Ould Houcine. On finitely generated models of theories with countably many nonisomorphic finitely generated models. *Soumis* (http ://arxiv.org/abs/0804.2908), 2009.

[OH08b] A. Ould Houcine. Superstable groups acting on trees. *Soumis* (http ://arxiv.org/abs/0809.3441), 2008.

[OH08a] A. Ould Houcine. On superstable CSA-groups. *Ann. Pure Appl. Logic*, 154(1) :1–7, 2008.

[OH07c] A. Ould Houcine. Limit Groups of Equationally Noetherian Groups. In *Geometric group theory*, Trends Math., pages 103–119. Birkhäuser, Basel, 2007.

[OH07b] A. Ould Houcine. On superstable groups with residual properties. *MLQ Math. Log. Q.*, 53(1) :19–26, 2007.

[OH07a] A. Ould Houcine. Embeddings in finitely presented groups which preserve the center. *J. Algebra*, 307(1) :1–23, 2007.

[OH06b] A. Ould Houcine. Satisfaction of existential theories in finitely presented groups and some embedding theorems. *Annals of Pure and Applied Logic*, 142(1-3) :351–365, 2006.

[OH06a] A. Ould Houcine. On hyperbolic groups. *Journal of Group Theory*, 9 :147–159, 2006.

[OH05] A. Ould Houcine. A model-theoretic characterization of countable direct sums of finite cyclic groups. *Communications in Algebra*, 33 :3719–3723, 2005.

[OH04] E. Jaligot et A. Ould Houcine. Existentially closed CSA-groups. *J. Algebra*, 280(2) :772–796, 2004.

[OH03] A. Ould Houcine. *Sur quelques problèmes de plongement dans les groupes.* Thèse de Doctorat. Université Paris 7. 2003.

Bibliographie

[ABC08] T. Altinel, A. Borovik et G. Cherlin : *Simple groups of finite Morley rank*, volume 145 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Bag09] P. Baginsky : *Stable, Aleph0-Categorical Algebraic Structures,*. PhD thesis. 2009.

[Bal73] J. T. Baldwin : α_T is finite for $\aleph_1$-categorical T. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181:37–51, 1973.

[Bau90] A. Baudisch : On superstable groups. *J. London Math. Soc*, 42:452–464, 1990.

[Ber81] Ch. Berline : Stabilité et algèbre. II. Groupes abéliens et modules. *In Study Group on Stable Theories (Bruno Poizat), Second year : 1978/79 (French)*, pages Exp. No. 2, 8. Secrétariat Math., Paris, 1981.

[Ber86] Ch. Berline : Superstable groups ; a partial answer to conjectures of Cherlin and Zil′ber. *Ann. Pure Appl. Logic*, 30(1):45–61, 1986. Stability in model theory (Trento, 1984).

[BF92] M. Bestvina et M. Feighn : A combination theorem for negatively curved groups. *J. Differential Geom.*, 35(1):85–101, 1992.

[BF95] M. Bestvina et M. Feighn : Stable actions of groups on real trees. *Invent. Math.*, 121(2):287–321, 1995.

[BL71] J. T. Baldwin et A. H. Lachlan : On strongly minimal sets. *J. Symbolic Logic*, 36:79–96, 1971.

[BL86] Ch. Berline et D. Lascar : Superstable Groups. *Annals of Pure and Applied Logic*, 30:1–43, 1986.

[BM79] Cherlin G. Baur, W. et A. Macintyre : Totally categorical groups and rings. *J. Algebra*, 57(2):407–440, 1979.

[BM00] M. Burger et S. Mozes : Lattices in product of trees. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (92):151–194 (2001), 2000.

[BM06] R. W. Bell et D. Margalit : Braid groups and the co-Hopfian property. *J. Algebra*, 303(1):275–294, 2006.

[BN94] A. Borovik et A. Nesin : *Groups of finite Morley Rank*. Oxford science publications, 1994.

[Bow98] B. H. Bowditch : Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups. *Acta Math.*, 180(2):145–186, 1998.

[BP90a] A. Borovik et B. Poizat : Simple groups of finite morley rank without nonnilpotent connected subgroups. *Preprint mimeographed by VINITI, N2062-B*, 1990.

[BP90b] A. Borovik et B. Poizat : Tores et p-groupes. *J. Symbolic Logic*, 55(2):478–491, 1990.

[CG05] C. Champetier et V. Guirardel : Limit groups as limits of free groups. *Israel J. Math.*, 146:1–75, 2005.

[Che79] G. Cherlin : Groups of small Morley rank. *Ann. Math. Logic*, 17(1-2):1–28, 1979.

[Chi01] I. Chiswell : *Introduction to Λ-trees*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001.

[CHL85] G. Cherlin, L. Harrington et A. H. Lachlan : $\aleph_0$-categorical, $\aleph_0$-stable structures. *Ann. Pure Appl. Logic*, 28(2):103–135, 1985.

[CK73] C. C. Chang et H. J. Keisler : *Model Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1973.

[Cor89] L. J. Corredor : Bad groups of finite Morley rank. *J. Symbolic Logic*, 54(3):768–773, 1989.

[DS99] M. J. Dunwoody et M. E. Sageev : JSJ-splittings for finitely presented groups over slender groups. *Invent. Math.*, 135(1):25–44, 1999.

[DS00] M. J. Dunwoody et E. L. Swenson : The algebraic torus theorem. *Invent. Math.*, 140(3):605–637, 2000.

[DS05] C. Drutu et M. Sapir : Tree-graded spaces and asymptotic cones of groups. with an appendix by denis osin and sapir. *Topology*, 44(5):959–1038, 2005.

[Fel78] U. Felgner : $\aleph_0$-categorical stable groups. *Math. Z.*, 160(1):27–49, 1978.

[FH07] B. Farb et M. Handel : Commensurations of $\mathrm{Out}(\mathrm{F}_n)$. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (105):1–48, 2007.

[FP06] K. Fujiwara et P. Papasoglu : JSJ-decompositions of finitely presented groups and complexes of groups. *Geom. Funct. Anal.*, 16(1):70–125, 2006.

[Gag05] J. Gagelman : A note on superstable groups. *J. Symbolic Logic*, 70(2):661–663, 2005.

[GKM95] D. Gildenhuys, O. Kharlampovich et A. Myasnikov : CSA-groups and separated free constructions. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 52(1):63–84, 1995.

[GL09] V. Guirardel et G. Levitt : JSJ decompositions : definitions, existence, uniqueness. I : The JSJ deformation space. *ArXiv e-prints*, novembre 2009.

[GL10] V. Guirardel et G. Levitt : JSJ decompositions : definitions, existence, uniqueness. II. Compatibility and acylindricity. *ArXiv e-prints*, février 2010.

[GLP94] D. Gaboriau, G. Levitt et F. Paulin : Pseudogroups of isometries of $\mathbf{R}$ and Rips' theorem on free actions on $\mathbf{R}$-trees. *Israel J. Math.*, 87(1-3):403–428, 1994.

[Gro81] M. Gromov : Groups of polynomial growth and expanding maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (53):53–73, 1981.

[Gro87] M. Gromov : Hyperbolic groups. *In Essays in group theory*, volume 8 de *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[Gro93] M. Gromov : Asymptotic invariants of infinite groups. *In Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, volume 182 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[Gui08] V. Guirardel : Actions of finitely generated groups on $\mathbb{R}$-trees. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(1):159–211, 2008.

[Hig61] G. Higman : Subgroups of finitely presented groups. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 262:455–475, 1961.

[HNN49] G. Higman, B. H. Neumann et H. Neumann : Embedding theorems for groups. *J. London Math. Soc.*, 24:247–254, 1949.

[Hod93] W. Hodges : *Model theory*, volume 42 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[IM99] N. V. Ivanov et J. D. McCarthy : On injective homomorphisms between Teichmüller modular groups. I. *Invent. Math.*, 135(2):425–486, 1999.

[JMN08] E. Jaligot, A. Muranov et A. Neman : Independence property and hyperbolic groups. *Bull. Symbolic Logic*, 14(1):88–98, 2008.

[Joh79] K. Johannson : *Homotopy equivalences of* 3*-manifolds with boundaries*, volume 761 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.

[JS79] W. H. Jaco et P. B. Shalen : Seifert fibered spaces in 3-manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 21(220):viii+192, 1979.

[Keg89] O. H. Kegel : Four lectures on Sylow theory in locally finite groups. *In Group theory (Singapore, 1987)*, pages 3–27. de Gruyter, Berlin, 1989.

[Khe07] A. Khelif : Bi-interprétabilité et structures QFA : étude de groupes résolubles et des anneaux commutatifs. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 345(2):59–61, 2007.

[KM05a] O. Kharlampovich et A. Myasnikov : Algebraic geometry over free groups : lifting solutions into generic points. *In Groups, languages, algorithms*, volume 378 de *Contemp. Math.*, pages 213–318. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[KM05b] O. Kharlampovich et A. Myasnikov : Effective JSJ decompositions. *In Groups, languages, algorithms*, volume 378 de *Contemp. Math.*, pages 87–212. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[KM05c] O. Kharlampovich et A. Myasnikov : Implicit function theorem over free groups. *J. Algebra*, 290(1):1–203, 2005.

[KM06] O. Kharlampovich et A. Myasnikov : Elementary theory of free non-abelian groups. *J. Algebra*, 302(2):451–552, 2006.

[Kro90] P. H. Kropholler : An analogue of the torus decomposition theorem for certain Poincaré duality groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 60(3):503–529, 1990.

[KS77] A. Karrass et D. Solitar : Subgroups with centre in HNN groups. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 24(3):350–361, 1977.

[KSTT05] L. Kramer, S. Shelah, K. Tent et S. Thomas : Asymptotic cones of finitely presented groups. *Adv. Math.*, 193(1):142–173, 2005.

[KW73] O. H. Kegel et B. A. F. Wehrfritz : *Locally finite groups*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973. North-Holland Mathematical Library, Vol. 3.

[KW99] I. Kapovich et R. Weidmann : On the structure of two-generated hyperbolic groups. *Math. Z.*, 231(4):783–801, 1999.

[Las11] C. Lasserre : *Sur les groupes de type fini : primalité, axiomatisabilité quasi finie et bi-interprétabilité avec l'arithmétique*. Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 2011.

[Łoś54] J. Łoś : On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems. *Colloquium Math.*, 3:58–62, 1954.

[LS77] R.C. Lyndon et P.E. Schupp : *Combinatorial group theory*. Classics in mathematics. Springer, 1977.

[Mac71] A. Macintyre : On ω_1-categorical theories of abelian groups. *Fund. Math.*, 70(3):253–270, 1971.

[Mar02] D. Marker : *Model Theory : An Introduction.* Springer-Verlag, New york, 2002. Graduate Texts in Mathematics.

[Mor65] M. Morley : Categoricity in power. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114:514–538, 1965.

[MP06] Y. Mustafin et B. Poizat : Sous-groupes superstables de $\mathrm{SL}_2(K)$ et de $\mathrm{PSL}_2(K)$. *J. Algebra*, 297(1):155–167, 2006.

[MR96] A. G. Myasnikov et V. N. Remeslennikov : Exponential groups. II. Extensions of centralizers and tensor completion of CSA-groups. *Internat. J. Algebra Comput.*, 6(6):687–711, 1996.

[MT07] D. Macpherson et K. Tent : Stable pseudofinite groups. *J. Algebra*, 312(2):550–561, 2007.

[Nes91] A. Nesin : Poly-separated and ω-stable nilpotent groups. *J. Symbolic Logic*, 56(2):694–699, 1991.

[Neu73] B. H. Neumann : The isomorphism problem for algebraically closed groups. *In Word problems : decision problems and the Burnside problem in group theory (Conf. on Decision Problems in Group Theory, Univ. California, Irvine, Calif. 1969 ; dedicated to Hanna Neumann)*, pages 553–562. Studies in Logic and the Foundations of Math., Vol. 71. North-Holland, Amsterdam, 1973.

[Nie03a] A. Nies : Aspects of free groups. *J. Algebra*, 263(1):119–125, 2003.

[Nie03b] A. Nies : Separating classes of groups by first-order sentences. *Internat. J. Algebra Comput.*, 13(3):287–302, 2003.

[Nie07] A. Nies : Comparing quasi-finitely axiomatizable and prime groups. *J. Group Theory*, 10(3):347–361, 2007.

[Oge06] F. Oger : Quasi-finitely axiomatizable groups and groups which are prime models. *J. Group Theory*, 9(1):107–116, 2006.

[Ol′97] A. Yu. Ol′shanskiĭ : On the distortion of subgroups of finitely presented groups. *Mat. Sb.*, 188(11):51–98, 1997.

[OOS09] A. Yu. Ol′shanskii, D. V. Osin et M. V. Sapir : Lacunary hyperbolic groups. *Geom. Topol.*, 13(4):2051–2140, 2009. With an appendix by Michael Kapovich and Bruce Kleiner.

[OS06] F. Oger et G. Sabbagh : Quasi-finitely axiomatizable nilpotent groups. *J. Group Theory*, 9(1):95–106, 2006.

[OS07] A. Yu. Ol′shanskii et M. Sapir : A finitely presented group with two non-homeomorphic asymptotic cones. *Internat. J. Algebra Comput.*, 17(2):421–426, 2007.

[Pau88] F. Paulin : Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels. *Invent. Math.*, 94(1):53–80, 1988.

[Per09] C. Perin : Elementary embeddings in torsion-free hyperbolic groups. *ArXiv e-prints*, mars 2009.

[Pil09] A. Pillay : On genericity and weight in the free group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(11):3911–3917, 2009.

[Poi83] B. Poizat : Groupes stables, avec types génériques réguliers. *J. Symbolic Logic*, 48(2): 339–355, 1983.

[Poi01] B. Poizat : *Stable groups*, volume 87 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the 1987 French original by Moses Gabriel Klein.

[Pra76] G. Prasad : Discrete subgroups isomorphic to lattices in semisimple Lie groups. *Amer. J. Math.*, 98(1):241–261, 1976.

[PS10] C. Perin et R. Sklinos : Homogeneity in the free group. *ArXiv e-prints*, mars 2010.

[RS94] E. Rips et Z. Sela : Structure and rigidity in hyperbolic groups. I. *Geom. Funct. Anal.*, 4(3):337–371, 1994.

[RS97] E. Rips et Z. Sela : Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition. *Ann. of Math. (2)*, 146(1):53–109, 1997.

[Sel97a] Z. Sela : Acylindrical accessibility for groups. *Invent. Math.*, 129(3):527–565, 1997.

[Sel97b] Z. Sela : Structure and rigidity in (Gromov) hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie groups. II. *Geom. Funct. Anal.*, 7(3):561–593, 1997.

[Sel01] Z. Sela : Diophantine geometry over groups. I. Makanin-Razborov diagrams. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (93):31–105, 2001.

[Sel03] Z. Sela : Diophantine geometry over groups. II. Completions, closures and formal solutions. *Israel J. Math.*, 134:173–254, 2003.

[Sel04] Z. Sela : Diophantine geometry over groups. IV. An iterative procedure for validation of a sentence. *Israel J. Math.*, 143:1–130, 2004.

[Sel05a] Z. Sela : Diophantine geometry over groups. III. Rigid and solid solutions. *Israel J. Math.*, 147:1–73, 2005.

[Sel05b] Z. Sela : Diophantine geometry over groups. V_1. Quantifier elimination. I. *Israel J. Math.*, 150:1–197, 2005.

[Sel06a] Z. Sela : Diophantine geometry over groups. V_2. Quantifier elimination. II. *Geom. Funct. Anal.*, 16(3):537–706, 2006.

[Sel06b] Z. Sela : Diophantine geometry over groups. VI. The elementary theory of a free group. *Geom. Funct. Anal.*, 16(3):707–730, 2006.

[Sel06c] Z. Sela : Diophantine Geometry over Groups VIII : Stability. *ArXiv Mathematics e-prints*, septembre 2006.

[Sel09] Z. Sela : Diophantine geometry over groups. VII. The elementary theory of a hyperbolic group. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 99(1):217–273, 2009.

[Sel10] Z. Sela : Diophantine Geometry over Groups X : The Elementary Theory of Free Products of Groups. *ArXiv e-prints*, novembre 2010.

[Ser80] J.-P. Serre : *Trees*. Springer, 1980.

[She71] S. Shelah : Stability, the f.c.p., and superstability ; model theoretic properties of formulas in first order theory. *Ann. Math. Logic*, 3(3):271–362, 1971.

[She91] S. Shelah : *Classification theory and the number of nonisomorphic models*. North-Holland, 1991. Second Edition.

[SS03] P. Scott et G. A. Swarup : Regular neighbourhoods and canonical decompositions for groups. *Astérisque*, (289):vi+233, 2003.

[Tsu92] A. Tsuboi : On definability of normal subgroups of a superstable group. *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, 38(2):101–106, 1992.

[TV00] S. Thomas et B. Velickovic : Asymptotic cones of finitely generated groups. *Bull. London Math. Soc.*, 32(2):203–208, 2000.

[Vau54] R. L. Vaught : Applications to the Löwenheim-Skolem-Tarski theorem to problems of completeness and decidability. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* **57** = *Indagationes Math.*, 16:467–472, 1954.

[Wag00] F. Wagner : *Simple theories*, volume 503 de *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[Wag11] F. Wagner : Propriétés résiduelles des groupes supersimples. *Journal of Symbolic Logic*, 72(2):361–367, 2011.

[Weh73] B. A. F. Wehrfritz : *Infinite linear groups. An account of the group-theoretic properties of infinite groups of matrices*. Springer-Verlag, New York, 1973. Ergebnisse der Matematik und ihrer Grenzgebiete, Band 76.

[WvdD84] A. J. Wilkie et L. van den Dries : An effective bound for groups of linear growth. *Arch. Math. (Basel)*, 42(5):391–396, 1984.

[Zil77] B. I. Zil′ber : Groups and rings whose theory is categorical. *Fund. Math.*, 95(3):173–188, 1977.