Université Paris VII - Denis Diderot

Thèse de Doctorat - Mathématique

Spécialité : Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique

Sur Quelques Problèmes de Plongement dans les Groupes

Abderezak OULD HOUCINE

Soutenue le 7 Juillet 2003

Directeur :	Jury :
Gabriel SABBAGH	Zoé CHATZIDAKIS
	Patrick DEHORNOY (Président)
	Michèle GIRAUDET
Rapporteurs :	Anatole KHELIF
C.F.MILLER III	Françoise POINT
J.S.WILSON	Gabriel SABBAGH

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier l'Equipe de Logique Mathématique, plus particulièrement Daniel Lascar et Gabriel Sabbagh, pour leur aide dans mes démarches administratives au début de ma thèse.

Gabriel Sabbagh, en dirigeant mon mémoire de D.E.A et ensuite ma thèse, m'a fait découvrir des sujets passionnants en théorie des modèles et en théorie des groupes. Je lui suis reconnaissant pour ses conseils, son soutien, sa disponibilité, qui ont été très précieux. Je le remercie pour ses multiples corrections et critiques qui ont permis à ce travail de prendre forme. Il m'a laissé un grand champ de liberté et a fait preuve d'une grande patience envers moi.

J'ai été très heureux d'apprendre que C.F.Miller III et J.S.Wilson étaient les rapporteurs. Je les remercie d'avoir accepté cette tâche et de l'avoir effectuée en un si bref délai. Je remercie également Andrew Glass, Martin Ziegler et Pierre de la Harpe pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mon travail et pour leurs conseils.

Je remercie les organisateurs du séminaire de théorie des groupes et équivalence élémentaire de m'avoir invité à exposer les résultats de ma thèse. Je remercie tous les membres du jury, qui m'ont honoré en acceptant d'examiner cette thèse. Je remercie Anatole Khelif pour ses conseils et sa lecture attentive de mon travail. J'ai été particulièrement touché de ce que Françoise Point ait réussi à se libérer, en dépit de nombreuses contraintes, pour participer au jury. J'ai été très honoré que Monsieur Patrick Dehornoy ait accepté de présider le jury. Je remercie également Zoé Chatzidakis et Michèle Giraudet pour avoir bien voulu participer au jury.

Mes remerciements vont aussi à tous les thésards et x-thésards de l'équipe, plus particulièrement à Alexandre, Malcolm et Thierry pour les nombreuses discussions que j'ai eues avec eux.

Ces remerciements seraient incomplets si j'oubliais René Cori, un enseignant exemplaire, pour ses cours de Maîtrise et de DEA ; je le remercie d'avoir pu transmettre sa passion et aussi de m'avoir encouragé à faire une thèse. Merci à tous les enseignants de D.E.A de Logique, de l'avoir rendu inoubliable ; J'adresse un remerciement particulier à Velickovic pour son enseignement sur la théorie de Ramsey.

Je remercie tout le personnel administratif, plus particulièrement Odile Ainardi, Khadija Bayoud pour leur accueil chaleureux et Michèle Wasse pour son efficacité exceptionnelle, son humanité et sa disponibilité.

Enfin des pensées particulières vont à toutes les personnes à l'extérieur de l'université, qui m'ont beaucoup aidé et sans qui ce travail n'aurait jamais pu voir le jour : je remercie François Regnault, Dominique Faure et Christine Saby, Sylvie Da Silva et Guillaume Chenu, Philippe Missote, et je remercie spécialement Aminata Sissoko.

Table des matières

Introduction **7**

Notations **9**

1 Préliminaires **11**
1.1 Omission des types 11
1.2 Problèmes de décidabilité dans les groupes 12
1.3 Les groupes existentiellement clos 14

2 Les modèles ayant $\mathcal{P}$ **19**
2.1 Introduction 19
2.2 Les théories inductives 21
2.2.1 Les types ayant un nombre dénombrable de variables 22
2.3 Quelques conditions suffisantes 28

3 Quasi-variétés et modèles fortement e.c. **31**
3.1 Introduction 31
3.2 Les modèles ayant $\mathcal{P}$ dans les quasi-variétés 33
3.3 Les modèles fortement existentiellement clos 36
3.4 Les modèles d-fortement existentiellement clos. 43
3.5 Les groupes fortement existentiellement clos 44
3.6 Remarques 46

4 Les propriétés de la classe $\sum(T_{gp})$. **49**
4.1 Les groupes de type fini 49
4.1.1 Satisfaction des théories existentielles dans les groupes de présentation finie 50
4.1.2 Remarques 58
4.2 Les groupes qui ne sont pas forcément de type fini 61
4.2.1 Les groupes Σ-génériques 68
4.3 Les groupes ayant $\mathcal{P}$ 74
4.3.1 Quelques propriétés simples 74
4.3.2 Exemples 77
4.4 Les groupes ayant $\mathcal{P}$ dans la théorie des groupes commutatifs 78

5 Embeddings which preserve the center **83**
5.1 Introduction 84
5.2 Preliminary propositions 89
5.3 Proof of theorem I 93
5.4 Proof of theorem II 96
5.5 Proofs of corollaries 105

Bibliographie **107**

Introduction

Le problème des mots dans les groupes est apparu au début des années 1900 avec les travaux de Dehn, et a connu un développement considérable depuis les années 1950 avec les résultats de Novikov, Boone, Higman, entre autres.

W.R.Scott (cf. [13], p.689) introduisit en 1951 les groupes existentiellement clos qui sont un analogue des corps algébriquement clos. Vingt ans plus tard, les travaux de Neumann-Simmons-Macintyre permirent d'obtenir la caractérisation suivante des groupes de type fini ayant un problème des mots résoluble : *Un groupe de type fini a un problème des mots résoluble si et seulement si il se plonge dans tous les groupes existentiellement clos.*

Cette thèse comporte deux parties.

La première partie (chapitre I à IV) est principalement consacrée au problème suivant : *quels sont les groupes G qui vérifient : il existe une théorie existentielle Γ consistante telle que G se plonge dans tout groupe qui vérifie Γ ?* On dira d'un tel groupe qu'il a la propriété (*). Cette question a été motivée par l'observation que les groupes de *type fini* qui vérifient (*) sont exactement ceux qui ont un problème des mots résoluble. On voit que la propriété (*) peut être énoncée pour n'importe quelle théorie T, par conséquent dans les premiers chapitres on s'intéressera au traitement de cette question dans un cadre général.

La seconde partie (chapitre V) est consacrée à la solution du problème ouvert suivant, proposé par V.N.Remeslennikov : *est-il vrai que tout groupe commutatif dénombrable se plonge dans le centre d'un groupe de présentation finie* ?

Nous apporterons une réponse positive à ce problème.

Au premier chapitre sont rappelées des notions essentielles sur les types et leur omission, le problème des mots dans les groupes et les groupes existentiellement clos. Nous y établissons aussi quelques propriétés des théories existentielles de groupes et des groupes existentiellement clos.

Le chapitre II est consacré à l'étude, dans un cadre général, des modèles qui ont (*). On cherche en particulier à caractériser les modèles qui se plongent dans tous les modèles existentiellement clos d'une théorie inductive T. On obtient en particulier le résultat suivant : *Soit G un groupe qui se plonge dans tous les groupes existentiellement clos. Alors il existe une théorie inductive Γ de groupes, telle que G se plonge dans tout modèle de Γ.*

Nous donnerons aussi quelques conditions suffisantes pour l'existence de modèles de type fini ayant (*).

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons aux quasi-variétés, en particulier à celles

qui ont la propriété du plongement (PP) et la propriété d'amalgamation (PA). Nous introduisons un renforcement simple de la notion de modèle existentiellement clos, i.e les modèles fortement existentiellement clos, et un cardinal $d(T)$ qui mesure, dans un certain sens, le degré de complexité d'une quasi-variété T. En nous inspirant des résultats de M.Ziegler (cf. [11],[30]), nous obtenons le résultat suivant (théorème 3.3.1) : *Soit T une quasi-variété récursivement énumérable dans un langage dénombrable ayant la PP et la PA. Soit $\alpha = d(T)$. Alors il existe au moins α modèles de T, dénombrables fortement existentiellement clos et ultrahomogènes, deux à deux non isomorphes.*

Nous obtenons aussi la caractérisation suivante des modèles de type fini de T qui se plongent dans des modèles de présentation finie (théorème 3.3.7) : *Soit T une quasi-variété ayant la PP et la PA dans un langage dénombrable. Soit F un modèle de T de type fini. Alors on a : F se plonge dans un modèle de présentation finie de T si et seulement si F se plonge dans tous les modèles fortement existentiellement clos et ultrahomogènes de T.*

Cela donne en théorie des groupes, en combinaison avec le théorème de plongement de Higman, une nouvelle caractérisation algébrique des groupes de type fini récursivement présentés : *un groupe de type fini est récursivement présenté si et seulement si il se plonge dans tous les groupes fortement existentiellement clos.*

Cela constitue également un analogue du théorème de Neumann-Macintyre sur les groupes de type fini ayant un problème des mots résoluble.

Dans le chapitre IV, nous étudions les groupes qui ont (*) et ses variantes. Nous démontrons en particulier le théorème suivant : *Soit T une théorie existentielle consistante et récursivement énumérable. Alors il existe un groupe de présentation finie H tel que T est vraie dans tout quotient non trivial de H.*

Ce théorème nous permet d'avoir une nouvelle démonstration d'un résultat de B.M.Hurley [14] et de retrouver un résultat de C.F.Miller III [24].

Dans la seconde partie (chapitre V), nous démontrons, en nous inspirant de la démonstration du théorème de plongement de Higman et en utilisant la théorie des petites simplifications (Small Cancellation Theory), le théorème suivant : *Tout groupe de type fini G récursivement présenté se plonge dans un groupe de présentation finie H tel que $Z(G) = Z(H)$.*

Ce théorème nous permet de résoudre le problème de Remeslennikov, précédemment énoncé, et aussi de démontrer une proposition annoncée par B.M.Hurley [14] qui est restée jusque là sans démonstration.

Notations

$\mathbb{F}_X$	le groupe libre de base X.
$G =< S \mid P(S) >$	G un groupe engendré par S et de présentation $P(S)$.
$H \leq G$	H est un sous-groupe de G.
X^{-1}	l'ensemble des inverses des éléments de X.
$ordre(x)$	l'ordre de l'élément x.
$G^{(\lambda)}$	le produit faible de λ copies de G.
$\oplus_i G_i$	le produit faible des G_i.
$Z(G)$	le centre de G.
$\mathcal{L}_{gp}$	le langage de la théorie des groupes $\left\{e, \times, x \mapsto x^{-1}\right\}$.
$L_{\omega_1\omega}$	le langage infinitaire autorisant des conjonctions et des disjonctions dénombrables.
T_{gp}	la théorie des groupes dans le langage $\mathcal{L}_{gp}$.
T_{gpc}	la théorie des groupes commutatifs dans le langage $\mathcal{L}_{gp}$.
$T_{\forall\exists}$	l'ensemble des formules $\forall\exists$ qui sont des conséquences de T.
$T_{\forall}$	l'ensemble des formules universelles qui sont des conséquences de T.
$Th_{\exists}(\mathcal{M})$	l'ensemble des formules existentielles vraies dans $\mathcal{M}$.
$\sum_e(T)$	la classe des modèles expansifs de T.
$\sum_{fe}(T)$	la classe des modèles finiment expansifs de T.
$\sum_*(T)$	la classe des modèles ayant (*) de T .
$\sum_{**}(T)$	la classe des modèles ayant (**) de T .
$\Sigma_0(T)$	la classe des modèles de type fini de T qui se plongent dans tous les modèles existentiellement clos de T.
$\Sigma_1(T)$	la classe des modèles de T qui se plongent dans tous les modèles existentiellement clos de T.
$\Sigma(T)$	la classe des modèles de T tels que toutes leurs sous-structures de type fini se plongent dans tous les modèles existentiellement clos de T.
$< a_1, ..., a_n >_{\mathcal{M}}$	la structure engendrée par $a_1, ..., a_n$ dans $\mathcal{M}$.
$\lvert X \rvert$	le cardinal de X.
$\lvert \overline{a} \rvert$	la longueur de la suite $\overline{a}$.
$\mathcal{A}ge(\mathcal{M})$	la classe des sous-structures de type fini de $\mathcal{M}$.
$\phi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$	ϕ est un isomorphisme entre les deux structures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
$\mathcal{M}_1 * \mathcal{M}_2$	le produit libre de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$.
$\mathcal{M}_1 *_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \mathcal{M}_2$	le produit libre de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ amalgamant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
$\mathcal{M} =< S \mid P(S) >$	$\mathcal{M}$ un modèle engendré par S et de présentation $P(S)$.

$\triangle^+(\overline{a}, \mathcal{M})$	l'ensemble des formules atomiques $\varphi(\overline{x})$ telle que $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$.
$\triangle^-(\overline{a}, \mathcal{M})$	l'ensemble de formules $\varphi(\overline{x})$ qui sont des négations de formules atomiques telle que $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$.
$\triangle(\overline{a}, \mathcal{M})$	l'ensemble des formules primitives sans quantificateurs $\varphi(\overline{x})$ telle que $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$.
$\triangle_\forall(\overline{a}, \mathcal{M})$	l'ensemble des formules universelles $\varphi(\overline{x})$ telle que $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$.
$\triangle_\exists(\overline{a}, \mathcal{M})$	l'ensemble des formules existentielles $\varphi(\overline{x})$ telle que $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$.
$\triangle_{\forall\vee\exists}(\overline{a}, \mathcal{M})$	l'ensemble des formules universelles ou existentielles $\varphi(\overline{x})$ telle que $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$.
$\triangle(\mathcal{M})$	le diagramme de $\mathcal{M}$ i.e l'ensemble des formules sans quantificateurs à paramètres dans $\mathcal{M}$ vraies dans $\mathcal{M}$.
$\overline{a}\widehat{\ }\overline{b}$	la concaténation des deux suites $\overline{a}$ et $\overline{b}$.
$\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$	$\mathcal{N}$ se plonge dans $\mathcal{M}$ i.e il existe un isomorphisme de $\mathcal{N}$ sur une sous-structure de $\mathcal{M}$.
ω,$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{Z}$	l'ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{Q}$	l'ensemble des rationnels.
$\mathbb{Z}\left[p^\infty\right]$	la composante p-primaire du groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
$[\omega]^{<\omega}$	l'ensemble des sous-ensembles finis de ω.
$\mathcal{P}(\omega)$	l'ensemble des parties de ω.
$\leq_1$, $\leq_e$, $\equiv_1$, $\equiv_e$	voir la définition page 30.
$d(X)$	la classe de X par rapport à la relation $\equiv_e$, où X désigne un ensemble d'entiers naturels.
$d(H)$	pour un groupe H, voir page 35.
$d(T)$	pour une théorie T, voir page 35.
Res_ψ	voir page 56 ou 67.
χ_0	le premier cardinal infini.
χ_1	le premier cardinal infini non dénombrable.
$\square$	fin d'une démonstration ou fin d'une démonstration à l'intérieur d'une autre ou proposition qui ne nécessite pas de démonstration.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous espérons être lus par des logiciens (resp. des algébristes) connaissant un minimum d'algèbre (resp. de logique).

Nous supposons connues les notions de base de la théorie des modèles (langage du premier ordre, théorie, modèle, variable libres, théorème de compacité...) et de la théorie combinatoire des groupes infinis (groupes libres, groupes de présentation finie, produit libre, produit libre amalgamé, HNN-extension...). Pour la théorie des groupes notre référence est le livre de R.C.Lyndon et P.Schupp *Combinatorial Group Theory* [17]. Pour les groupes existentiellement clos le travail fondamental est celui de M.Ziegler [30] mais le lecteur non germanophone pourra consulter l'ouvrage de G.Higman et E.Scott *Existentially Closed Groups* [11]. Pour le problème des mots dans les groupes notre référence est C.F.Miller III *Decision problems for groups-survey and reflections* [23]. Pour la théorie des modèles nous renvoyons au livre de W.Hodges, *Model Theory* [13], mais pour nous un modèle n'est jamais vide.

Nous rappelons dans la première section le théorème classique d'omission des types et le théorème d'omission des types pour les théories $\forall\exists$. Dans la seconde section nous rappelons des définitions et résultats classiques pour le problème des mots dans les groupes (Théorème de plongement de Higman, Théorème de Boone-Higman, Théorème de Boone-Rogers). Enfin pour terminer, nous rappelons dans la troisième section quelques propriétés des groupes existentiellement clos et leurs liens avec les groupes de type fini ayant un problème des mots résoluble (Théorème de Neumann-Macintyre). Nous exposerons aussi quelques propriétés des théories existentielles de groupes. Nous attirons l'attention du lecteur sur la proposition 1.3.5 qui, quoique très simple, semble nouvelle.

1.1 Omission des types

Tout au long de cette thèse nous désignons par $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, par $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et par $\overline{x}$ un uplet fini de variables (sauf mention contraire). Dans toute la suite on ne fera pas de distinction entre une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ et son ensemble de base M.

Définitions.

(1) Soit $p(\overline{x})$ un ensemble de formules qui ont $\overline{x}$ comme variables libres. Soit T une théorie de

$\mathcal{L}$. On dit que $p(\overline{x})$ est un ***type*** *par rapport à* T, ou un *type* s'il n'y a pas de confusion, s'il existe un modèle $\mathcal{M}$ de T, et $\overline{a} \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models p(\overline{a})$. On dit que p est ***universel*** si toutes les formules qui appartiennent à p sont universelles.

(2) Soit $p(\overline{x})$ un type et soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. On dit que $\mathcal{M}$ ***omet*** p si pour tout $\overline{a} \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \nvDash p(\overline{a})$, ce qui signifie qu'il existe au moins une formule $\varphi(\overline{x})$ dans $p(\overline{x})$ telle que $\mathcal{M} \nvDash \varphi(\overline{a})$. Dans le cas contraire on dit que $\mathcal{M}$ ***réalise*** p.

(3) Soient $\mathcal{K}$ une classe de $\mathcal{L}$-structures et $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{K}$. On dit que $\mathcal{M}$ est ***$\mathcal{K}$-existentiellement clos*** (en abrégé $\mathcal{K}$-e.c.) si toute formule existentielle $\psi(\overline{a})$, où $\overline{a}$ est un uplet fini de paramètres de $\mathcal{M}$, satisfaite dans une extension de $\mathcal{M}$ qui est dans K, est satisfaite dans $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{M}$ un modèle d'une théorie T. On dit que $\mathcal{M}$ est ***existentiellement clos*** (en abrégé e.c.) s'il est ***$\mathcal{K}(T)$-existentiellement clos*** où $\mathcal{K}(T)$ est la classe des modèles de T.

(4) Une théorie T est dite ***inductive*** si elle admet un ensemble d'axiomes de la forme $\forall\exists$.

Théorème d'omission des types *classique* [6][13][16].

Soient $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et T une théorie consistante. Soit $(p_n(\overline{x}_n))_{n\in\omega}$ une suite de types. Si chaque p_n vérifie : il n'existe pas de formule ψ telle que :

- $T \cup \{\exists \overline{x}_n \psi(\overline{x}_n)\}$ est consistante ;

- $T \vdash (\forall \overline{x}_n(\psi(\overline{x}_n) \Rightarrow \phi(\overline{x}_n))$, pour toute formule $\phi \in p_n$.

Alors il existe un modèle dénombrable de T qui omet chaque p_n.

Théorème d'omission des types *pour les théories inductives* [13].

*Soient $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et T une théorie **inductive** consistante. Soit $(p_n(\overline{x}_n))_{n\in\omega}$ une suite de types **universels**. Si chaque p_n vérifie : il n'existe pas de formule **existentielle** ψ telle que :*

- $T \cup \{\exists \overline{x}_n \psi(\overline{x}_n)\}$ est consistante ;

- $T \vdash (\forall \overline{x}_n(\psi(\overline{x}_n) \Rightarrow \phi(\overline{x}_n))$, pour toute formule $\phi \in p_n$.

*Alors il existe un modèle dénombrable de T, **existentiellement clos**, qui omet chaque p_n.*

Il existe plusieurs versions du théorème d'omission des types pour des théories plus générales [7].

1.2 Problèmes de décidabilité dans les groupes

Tout au long de cette thèse $\mathbb{F}_X$ désignera le groupe libre de base X. Soit G un groupe. La notation $G =< S \mid P(S) >$ est usuelle et elle signifie que G est engendré par S et que $P(S)$ est une présentation de G en fonction de S. Si S est fini ou dénombrable alors on peut coder les mots en les éléments de S et de leurs inverses, et définir les ensembles récursivement énumérables et récursifs. On dit que G est ***récursivement présenté*** s'il est engendré par un ensemble S dénombrable récursivement énumérable et s'il possède une présentation $P(S)$ récursivement énumérable. Il est bien connu que cela équivaut à l'existence d'un ensemble générateur U *récursif* et d'une présentation $P(U)$ *récursive*. Pour plus de précision sur ce sujet on pourra consulter [12].

On dit que G est de type fini si S est fini. On dit que G est de présentation finie si S et $P(S)$ sont finis.[1]

Définition. *Soit $G =< S \mid P(S) >$ un groupe dénombrable. On dit que G a un **problème des mots résoluble** par rapport à S si S est récursif et si l'ensemble des mots w en les éléments de S et de leurs inverses tel que $w = e$ dans G est récursif.*

Cela revient à dire qu'il existe un algorithme A qui pour tout mot w *en les éléments de S et de leurs inverses, renvois* 1 *si $w = e$ dans G et renvois* 0 *dans le cas contraire.*

On a la propriété suivante pour les groupes de type fini : soit G un groupe de type fini et soient S_1 et S_2 deux ensembles de générateurs finis de G. Si G a un problème de mots résoluble par rapport à S_1, alors G a un problème des mots résoluble par rapport à S_2.

L'analogue de cela n'est pas vrai pour un groupe qui n'est pas de type fini.

Pour plus de précisions sur les définitions ci-dessus, nous renvoyons à [12][17][23].

Novikov (1954) et Boone (1959) démontrèrent indépendamment le théorème suivant :

Théorème de Novikov-Boone [17][23]. *Il existe un groupe de présentation finie ayant un problème des mots non résoluble.*

En 1961, G.Higman démontra un théorème remarquable reliant la notion de récursivité et les groupes de présentation finie :

Théorème de *plongement* de G.Higman [12].

(1) *Soit G un groupe de type fini, alors on a :*

G est récursivement présenté si et seulement si G se plonge dans un groupe de présentation finie.

(2) *Soit G un groupe dénombrable, alors on a :*

Si G est récursivement présenté alors G se plonge dans un groupe de présentation finie.

Le théorème de G.Higman permet de remontrer facilement l'existence de groupes de présentation finie ayant un problème des mots non résoluble.

Le théorème suivant, aussi dû à G.Higman (1961), est un corollaire du théorème de plongement précédent :

Théorème 1.2.1. *Il existe un groupe de présentation finie H tel que tout groupe de présentation finie se plonge dans H.*

En 1967, C.R.J.Clapham démontra que la construction utilisée dans la démonstration du théorème de plongement de Higman préserve le degré d'insolubilité du problème des mots ; en particulier on a :

[1] Il est bien connu que si G est un groupe ayant une présentation finie $< S \mid P(S) >$, alors G admet pour tout système fini de générateurs T une présentation finie de la forme $< T \mid Q(T) >$.

Théorème 1.2.2 (C.R.G.Clapham)[9]. *Soit G un groupe dénombrable ayant un problème des mots résoluble. Alors G se plonge dans un groupe de présentation finie ayant un problème des mots résoluble.*

En ce qui concerne les groupes ayant un problème des mots résoluble, Boone et Higman ont pu obtenir en 1973 la caractérisation algébrique suivante :

Théorème de Boone-Higman [3].

(1) *Soit G un groupe de type fini, alors on a :*

G a un problème des mots résoluble si et seulement si G se plonge dans un groupe simple ayant un problème des mots résoluble, qui se plonge à son tour dans un groupe de présentation finie.

(2) *Soit G un groupe dénombrable. Si G a un problème des mots résoluble, alors G se plonge dans un groupe simple ayant un problème des mots résoluble, qui se plonge à son tour dans un groupe de présentation finie.*

En combinant le théorème 1.2.2 et le théorème de Boone-Higman on obtient :

Théorème 1.2.3. *Soit G un groupe dénombrable. Si G a un problème des mots résoluble, alors G se plonge dans un groupe simple, qui se plonge à son tour dans un groupe de présentation finie ayant un problème des mots résoluble.*

R.J.Thompson a amélioré ce résultat en démontrant en 1980 le :

Théorème de R.J.Thompson [29]. *Soit G un groupe dénombrable. Si G a un problème des mots résoluble alors G se plonge dans un groupe* ***simple de type fini****, qui se plonge à son tour dans un groupe de présentation finie ayant un problème des mots résoluble.*

Ce résultat laisse ouverte la conjecture suivante : *Tout groupe dénombrable ayant un problème des mots résoluble se plonge dans un groupe de présentation finie simple.*

En 1966, Boone et Rogers démontrèrent le résultat suivant :

Théorème de Boone-Rogers [4]. *Soit K l'ensemble des présentations finies des groupes de présentation finie ayant un problème des mots résoluble. Alors K n'est pas récursivement énumérable et il n'existe pas d'algorithme uniforme qui résout le problème des mots de tous les groupes de présentation finie ayant un problème des mots résoluble.*

1.3 Les groupes existentiellement clos

L'axiomatisation de la théorie des groupes dans les langages du premier ordre qui sera adoptée dans la suite est usuelle. On considère le langage $\mathcal{L}_{gp} = \left\{e, \times, x \mapsto x^{-1}\right\}$, où un groupe est une $\mathcal{L}_{gp}$-structure où e est interprété par l'élément neutre, $\times$ par la multiplication et $x \mapsto x^{-1}$ par la fonction qui associe à chaque élément son inverse. Tout au long de cette thèse on désignera par

T_{gp} la théorie (du premier ordre) des groupes. On peut aussi considérer la théorie des groupes commutatifs T_{gpc} qui est axiomatisée dans le même langage $\mathcal{L}_{gp}$. On voit que les théories T_{gp} et T_{gpc} sont des théories universelles.

Définition. *Soit G un groupe. On dit que G est e.c. s'il est existentiellement clos comme $\mathcal{L}_{gp}$-structure par rapport à la théorie T_{gp}.*

Cela revient à dire que tout système fini d'équations et d'inéquations :

$$\{w_i(\overline{a},\overline{x}) = e,\ v_j(\overline{a},\overline{x}) \neq e, \quad i = 1,...,n\ ;\ j = 1,...,m\}$$

où $\overline{a}$ est un uplet fini de G, qui possède une solution dans une extension de G, possède une solution dans G.

On définit de même les groupes commutatifs existentiellement clos (par rapport à la théorie T_{gpc}).

Définitions.

(1) Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Soient $a_1,...,a_n$ des éléments de $\mathcal{M}$. On désigne par $< a_1,...,a_n >_{\mathcal{M}}$ la $\mathcal{L}$-structure engendrée par $a_1,...,a_n$ dans $\mathcal{M}$.

(2) On dit que $\mathcal{M}$ est ***algébriquement-ω-homogène*** si pour tout $\{a_1,...,a_n,b\} \subseteq \mathcal{M}$ et pour tout *plongement*

$$\varphi :< a_1,...,a_n >_{\mathcal{M}} \hookrightarrow \mathcal{M}$$

il existe un *plongement* $\phi :< a_1,...,a_n,b >_{\mathcal{M}} \hookrightarrow \mathcal{M}$ qui prolonge φ.

Tout au long de cette thèse, pour alléger les écritures, les modèles ***algébriquement-ω-homogènes*** *seront dit* ***ω-homogènes***. *Notre terminologie diffère donc de la terminologie généralement en vigueur, en particulier dans* [13].

(3) On dit que $\mathcal{M}$ est ***ultrahomogène*** si pour tout $\{a_1,...,a_n\} \subseteq \mathcal{M}$ et pour tout *plongement*

$$\varphi :< a_1,...,a_n >_{\mathcal{M}} \hookrightarrow \mathcal{M}$$

il existe un ***automorphisme*** $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ qui prolonge φ.

Remarquons qu'un modèle ultrahomogène est ω-homogène. Il est bien connu et immédiat qu'un modèle dénombrable ω-homogène est ultrahomogène.

(4) Soit $\psi(\bar{x})$ une formule sans quantificateurs de $\mathcal{L}$. On dit que $\psi(\bar{x})$ est ***primitive*** si elle est de la forme :

$$(\bigwedge_{i=1,...,n} \nu_i(\overline{x}) \wedge \bigwedge_{j=1,...,m} \tau_j(\overline{x}))$$

où les $\nu_i(\overline{x})$ sont des formules atomiques et les $\tau_j(\overline{x})$ des négations de formules atomiques.

Dans la théorie des groupes cela revient à

$$(\bigwedge_{i=1,...,n} w_i(\overline{x}) = e \wedge \bigwedge_{j=1,...,m} v_j(\overline{x}) \neq e)$$

où les $w_i(\overline{x})$ et les $v_j(\overline{x})$ sont des mots en fonctions des $\overline{x}$ et de leurs inverses.

Soit ψ une formule existentielle de $\mathcal{L}$. On dit que ψ est ***existentielle primitive*** si ψ est de la forme $\exists \bar{x} \varphi(\bar{x})$ où $\varphi(\bar{x})$ est une formule sans quantificateurs primitive.

Remarque. Soit H un groupe de présentation finie $W(a_1, ..., a_n)$. Soit K un groupe ayant des éléments $b_1, ..., b_n$ tels que $W(b_1, ..., b_n) = e$. Il existe alors un homomorphisme φ de H dans K tel que $\varphi(a_i) = b_i$. Cela justifie le fait suivant qui sera utilisé constamment dans cette thèse : un énoncé de la forme

$$\exists x_1 ... \exists x_n (W(x_1, ..., x_n) \wedge \bigwedge_{j=1,...,m} v_j(x_1, ..., x_n) \neq e)$$

est consistant avec la théorie des groupes si et seulement si $H \models \bigwedge_{j=1,...,m} v_j(a_1, ..., a_n) \neq e$.

En particulier tout énoncé existentiel consistant avec la théorie des groupes, est satisfait dans un groupe de présentation finie.

Compte tenu du Théorème 1.2.1 nous pouvons conclure que *toute théorie existentielle consistante avec la théorie des groupes a pour modèle un groupe de présentation finie.*

Théorème 1.3.1. *Soit G un groupe e.c., alors on a :*

(1) *G est ultrahomogène.*

(2) *(B.H.Neumann)* [11][13] *G vérifie l'énoncé : $\forall u \forall v \exists x \exists y (u \neq e \Rightarrow x^{-1}uxy^{-1}uy = v)$, par conséquent G est simple.*

(3) *(B.H.Neumann)* [11][13] *G n'est pas de type fini.*

(4) *Si ψ est un énoncé existentiel consistant alors $G \models \psi$. Par conséquent tous les groupes e.c. vérifient les mêmes énoncés existentiels qui ne sont que les énoncés existentiels consistants (avec la théorie des groupes). Tout énoncé de la forme $\forall\exists$ vrai dans un groupe e.c. est vrai dans tous les groupes e.c.*

On a la caractérisation suivante des groupes de type fini ayant un problème des mots résoluble qui découle des travaux de Neumann, Simmons, Macintyre :

Théorème de Neumann-Macintyre. *Un groupe de type fini a un problème des mots résoluble si et seulement si il se plonge dans tous les groupes e.c.*

Nous finissons ce chapitre par quelques propositions, qui découlent assez facilement des théorèmes précédents :

Proposition 1.3.2.

La théorie existentielle des groupes existentiellement clos n'est pas récursivement énumérable.

Démonstration. Cela résulte aisément du théorème 1.3.1 (4), de la remarque précédente[1], et de l'existence d'un groupe de présentation finie ayant un problème des mots non résoluble.

□

[1] Lignes 3 à 10 de cette page.

Proposition 1.3.3. *Soit* Γ *l'ensemble des énoncés existentiels* ψ *tels que* ψ *est vrai dans un groupe ayant un problème des mots résoluble. Alors* Γ *n'est pas récursivement énumérable.*

Démonstration. On va raisonner par l'absurde. Supposons le contraire et démontrons qu'il existe un algorithme uniforme qui résout le problème des mots de tous les groupes de présentation finie ayant un problème des mots résoluble. Comme Γ est récursivement énumérable alors l'ensemble

$$A = \{(W(\overline{x}), w(\overline{x})) \mid \exists \overline{x}(W(\overline{x}) \wedge w(\overline{x}) \neq e) \ \in \Gamma\}$$

où $W(\overline{x})$ est une conjonction finie de formules atomiques et w un mot, est récursivement énumérable.

Soit $W(a_1, ..., a_n)$ une présentation finie d'un groupe H ayant un problème des mots résoluble et soit w un mot en fonction des générateurs de H. Pour savoir si $w = e$ ou non dans H on énumère tous les mots qui sont égaux à e et en même temps l'ensemble B suivant qui est récursivement énumérable :

$$B = \{w(\overline{x}) \mid (W(\overline{x}), w(\overline{x})) \ \in A\}$$

Si w apparaît dans la première liste alors $w = e$ et si w apparaît dans la seconde liste alors $w \neq e$. Par conséquent il existe un algorithme uniforme qui résout le problème des mots de tous les groupes de présentation finie ayant un problème des mots résoluble. Cela contredit le théorème de Boone-Rogers.

Remarques.

(1) C.F.Miller III [17] a démontré le résultat suivant : *si* G *est un groupe e.c. alors* G *n'est pas récursivement présenté.* Voici une version plus précise de ce résultat :

Proposition 1.3.4.

Soit Γ *la théorie* $\forall\exists$ *des groupes e.c. Alors* Γ *n'admet pas de modèle dénombrable récursivement présenté. Plus précisément aucun modèle dénombrable de* Γ *ne se plonge dans un groupe de présentation finie.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un groupe de présentation finie H ayant comme sous-groupe un modèle dénombrable $\mathcal{M}$ de Γ. Il résulte du théorème 1.3.1 (2) que $\mathcal{M}$ est un groupe simple. Soit $H =< \overline{a} \mid P(\overline{a}) >$ une présentation finie de H. Soit $s(\overline{a})$ un élément non trivial de $\mathcal{M}$ écrit en fonction de $\overline{a}$. La formule $\psi = \exists \overline{x}(P(\overline{x}) \wedge s(\overline{x}) \neq e)$ vérifie :

$$T_{gp} \cup \{\psi\} \vdash \Gamma_0$$

Où Γ_0 est l'ensemble des énoncés existentiels consistants. Par conséquent Γ_0 est récursivement énumérable, ce qui contredit la proposition 1.3.2.

□

(2) A titre d'illustration de l'utilisation du théorème d'omission des types on a la proposition suivante :

Proposition 1.3.5.[1] *Il existe un groupe e.c. tel que tous ses sous-groupes de présentation finie ont un problème des mots résoluble.*

Démonstration. Soit H_n la suite des groupes de présentation finie ayant un problème des mots non résoluble. Pour chaque H_n soit $\Delta_n(\overline{x}_n)$ le diagramme de H_n en fonction d'un système de générateurs fixe de H_n. Alors pour chaque n, il n'existe pas de formule existentielle $\psi(\overline{x}_n)$ consistante avec la théorie des groupes telle que : $T_{gp} \vdash (\forall \overline{x}_n(\psi(\overline{x}_n) \Rightarrow \phi(\overline{x}_n))$, pour toute formule $\phi \in \Delta_n$; sinon H_n se plongerait dans tout groupe vérifiant la formule $\exists \overline{x}_n \psi(\overline{x}_n)$ et comme $\exists \overline{x}_n \psi(\overline{x}_n)$ est vraie dans tous les groupes existentiellement clos alors H_n se plongerait dans tous les groupes e.c. et cela contredirait le Théorème de Neumann-Macintyre. Par conséquent d'après le théorème d'omission des types pour les théories inductives il existe un groupe G e.c. qui omet Δ_n pour tout n. Par conséquent G ne contient pas de copie de H_n. Donc si H est un groupe de présentation finie qui se plonge dans G, alors H a un problème des mots résoluble.

On peut en fait démontrer que tout groupe générique au sens de [16] vérifie la même propriété. Plus précisément on a : *il existe* 2^{χ_0} *groupes génériques* (*au sens de* [16]) *tels que tous leurs sous-groupes de présentation finie ont un problème des mots résoluble.*

□

On a aussi la proposition suivante :

Proposition 1.3.5. bis *Il existe un groupe e.c. tel que tous ses sous-groupes de type fini récursivement présentés ont un problème des mots résoluble.*

Démonstration. Il suffit de remplacer dans la démonstration précédente la suite H_n par la suite des groupes de type fini récursivement présentés ayant un problème des mots non résoluble.

□

[1] Il est bien connu que tout groupe e.c. contient un sous-groupe de type fini ayant un problème des mots non résoluble.

Chapitre 2

Les modèles ayant $\mathcal{P}$

Ce chapitre comporte une introduction (2.1) et deux sections principales (2.2 et 2.3). Dans les sections 2.1 et 2.2, on s'intéresse aux modèles qui ont $\mathcal{P}$ (définie plus bas) dans un cadre général et plus particulièrement dans les théories inductives qui ont la propriété d'amalgamation. Dans la section 2.3, on s'intéresse aux conditions suffisantes pour l'existence de modèles vérifiant $\mathcal{P}$.

2.1 Introduction

Le point de départ de ce travail est la question suivante : *quels sont les groupes G qui vérifient : il existe une théorie existentielle Γ consistante telle que G se plonge dans tout groupe qui vérifie Γ ?* On dira d'un tel groupe qu'il a la propriété (*). Cette question a été motivée par l'observation que les groupes de *type fini* qui vérifient (*) sont exactement ceux qui ont un problème des mots résoluble. Le théorème de Löwenheim-Skolem garantit qu'un groupe vérifiant (*) est dénombrable. On voit que la propriété (*) peut être énoncée pour n'importe quelle théorie T. Nous étudierons les modèles qui ont (*) dans certaines théories qui ont des propriétés particulières telles que la propriété d'amalgamation et la propriété du plongement. Il y a plusieurs variantes de (*) et nous allons les définir :

Définitions. Soient T une théorie et $\mathcal{M}$ un modèle de T.

(1) On dit que $\mathcal{M}$ est ***finiment expansif*** (relativement à T) s'il existe un énoncé existentiel ψ (consistant avec T) tel que $\mathcal{M}$ est modèle de ψ et tel que $\mathcal{M}$ se plonge dans tout modèle de T qui vérifie ψ.

(2) On dit que $\mathcal{M}$ est ***expansif*** (relativement à T) s'il existe une théorie existentielle Γ (consistante avec T) telle que $\mathcal{M}$ est modèle de Γ et telle que $\mathcal{M}$ se plonge dans tout modèle de T qui vérifie Γ.

(3) On dit que $\mathcal{M}$ ***a la propriété (**)*** (relativement à T) s'il existe un énoncé existentiel ψ consistant avec T tel que $\mathcal{M}$ se plonge dans tout modèle de T qui vérifie ψ. [1]

[1] Après avoir achevé notre rédaction, nous avons pris connaissance de [5] qui étudie sous le nom de modèle finiment déterminé les modèles ayant la propriété (**) et qui est en grande partie disjoint de notre travail.

(4) On dit que $\mathcal{M}$ ***a la propriété (*)*** (relativement à T) s'il existe une théorie existentielle Γ consistante avec T telle que $\mathcal{M}$ se plonge dans tout modèle de T qui vérifie Γ.

Convention. Tout au long de cette thèse $\mathcal{P}$ désignera l'une des propriétés précédentes fixée une fois pour toute.

Remarquons que si $\mathcal{M}$ est expansif alors on peut prendre $\Gamma = Th_{\exists}(\mathcal{M})$. Si la théorie T est fixée on omettra la mention "relativement à T".

Dans la suite on aura aussi besoin des définitions suivantes :

(5) On dit que $\mathcal{M}$ est ***algébriquement premier*** si $\mathcal{M}$ se plonge dans tous les modèles de T.

(6) On dit que $\mathcal{M}$ est ***algébriquement universel*** si $\mathcal{M}$ est dénombrable et si tout modèle dénombrable de T se plonge dans $\mathcal{M}$.

Tout au long de cette thèse les modèles ***algébriquement universels*** *seront dit* ***universels.***

On peut définir plusieurs variantes des propriétés précédentes en remplçant Γ par une théorie d'une forme particulière (par exemple $\forall\exists$). Mais on se limitera aux théories existentielles.

On est amené aussi à introduire les classes suivantes :

$$\sum_e(T) = \textit{ la classe des modèles expansifs de } T$$

$$\sum_{fe}(T) = \textit{ la classe des modèles finiment expansifs de } T$$

$$\sum_*(T) = \textit{ la classe des modèles ayant (*) de } T$$

$$\sum_{**}(T) = \textit{ la classe des modèles ayant (**) de } T$$

Rappelons également quelques définitions et résultats classiques :

(1) Soit $\mathcal{K}$ une classe de $\mathcal{L}$-structures. On dit que $\mathcal{K}$ a la ***propriété du plongement*** (en abrégé PP) si : pour tous les modèles $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{K}$, il existe $\mathcal{S} \in \mathcal{K}$ tel que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ se plongent dans $\mathcal{S}$. On dit qu'une théorie T a la PP si la classe des modèles de T a la PP.

(2) Soit $\mathcal{K}$ une classe de $\mathcal{L}$-structures. On dit que $\mathcal{K}$ a la ***propriété d'amalgamation*** (en abrégé PA) si : pour tous les modèles $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{A} \in \mathcal{K}$, tels que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$ il existe $\mathcal{S} \in \mathcal{K}$ et deux plongements $\varphi_1 : \mathcal{M} \hookrightarrow S$ et $\varphi_2 : \mathcal{N} \hookrightarrow S$ tels que pour tout $x \in \mathcal{A}$ on ait $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. On dit qu'une théorie T a la PA si la classe des modèles de T a la PA.

(3) *Si une théorie T est inductive et qu'elle a la PP alors tous les modèles e.c. de T vérifient les mêmes formules $\forall\exists$.* (Voir W.Hodges [13]).

(4) *Si une théorie T est inductive et qu'elle a la PP alors toute formule existentielle consistante est vraie dans tous les modèles e.c. de T* (Immédiat).

Proposition 2.1.1. *Soient T une théorie et $\mathcal{M}$ un modèle de T. Soit $K(\mathcal{M})$ la classe des modèles $\mathcal{N}$ de T tels que $\mathcal{M}$ se plonge dans $\mathcal{N}$. Alors on a :*

(1) *$K(\mathcal{M})$ est axiomatisable modulo T si et seulement si $\mathcal{M}$ est expansif.*

(2) *$K(\mathcal{M})$ est finiment axiomatisable modulo T si et seulement si $\mathcal{M}$ est finiment expansif, et dans ce cas $K(\mathcal{M})$ et $Th_{\exists}(\mathcal{M})$ sont axiomatisables modulo T par un même énoncé existentiel.*

Démonstration.

(1) Supposons que $\mathcal{M}$ est expansif. Alors tout modèle $\mathcal{N}$ de $T \cup Th_\exists(\mathcal{M})$ est dans $K(\mathcal{M})$. Si $\mathcal{N} \in K(\mathcal{M})$ alors $\mathcal{N} \models T \cup Th_\exists(\mathcal{M})$. Donc $K(\mathcal{M})$ est axiomatisable par $T \cup Th_\exists(\mathcal{M})$.

Supposons que $K(\mathcal{M})$ est axiomatisable. Soit Γ l'ensemble des énoncés vrais dans tous les modèles qui sont dans $K(\mathcal{M})$, montrons que Γ est équivalente à $T \cup Th_\exists(\mathcal{M})$.

On a $\Gamma \vdash T \cup Th_\exists(\mathcal{M})$. Si $\mathcal{N} \models T$ et si $\mathcal{U} \in K(\mathcal{M})$ avec $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{N}$ alors $\mathcal{N} \in K(\mathcal{M})$. Donc Γ est équivalente modulo T à une théorie existentielle Υ. Mais $\mathcal{M} \in K(\mathcal{M})$ donc $\mathcal{M} \models \Upsilon$. Donc $Th_\exists(\mathcal{M}) \vdash \Upsilon$. Par conséquent si $\mathcal{N} \models T \cup Th_\exists(\mathcal{M})$ alors $\mathcal{N} \models T \cup \Upsilon$ et donc $\mathcal{N} \models \Gamma$. D'où $\mathcal{N} \models T \cup Th_\exists(\mathcal{M})$ si et seulement si $\mathcal{N} \models T \cup \Upsilon$ si et seulement si $\mathcal{N} \models \Gamma$, par conséquent $\mathcal{M}$ se plonge dans tout modèle de ces théories et est expansif.

(2) Supposons que $\mathcal{M}$ est finiment expansif. Alors il existe un énoncé existentiel ψ tel que $\mathcal{M}$ est modèle de ψ et tel que $\mathcal{M}$ se plonge dans tout modèle qui vérifie ψ. Donc $T \cup \{\psi\} \vdash Th_\exists(\mathcal{M})$. Comme $\mathcal{M}$ est modèle de ψ on a $Th_\exists(\mathcal{M}) \vdash \psi$. Donc $Th_\exists(\mathcal{M})$ est finiment axiomatisable modulo T.

Supposons que $K(\mathcal{M})$ est finiment axiomatisable modulo T. Il suffit de refaire la démonstration de (1) et de voir que $Th_\exists(\mathcal{M})$ est équivalente modulo T à Υ et par conséquent Γ et $Th_\exists(\mathcal{M})$ sont finiment axiomatisable modulo T par un même énoncé existentiel.

□

Proposition 2.1.2. *Soient T une théorie et $\mathcal{M}$ un modèle. Alors on a :*

(1) *Si $\mathcal{M} \models T$ et $\mathcal{M}$ a $\mathcal{P}$ relativement à $T_{\forall\exists}$ alors $\mathcal{M}$ a $\mathcal{P}$ relativement à T.*

(2) *Si T est inductive et a la propriété du plongement alors tout modèle $\mathcal{M}$ ayant $\mathcal{P}$ relativement à T se plonge dans tous les modèles existentiellement clos de T.*

(3) *Si $\mathcal{M}$ est expansif ou finiment expansif relativement à T et T est inductive, alors il existe une théorie Γ de la forme $\forall\exists$ telle que $\mathcal{M}$ est un modèle algébriquement premier de Γ.*

□

La proposition 2.1.2 (2) nous suggère de nous intéresser aux modèles qui se plongent dans tous les modèles existentiellement clos. Pour cette raison on va "imiter" dans un certain sens les propriétés vérifiées par la théorie des groupes comme la propriété d'amalgamation et la propriété du plongement. On s'intéresse, pour commencer, aux théories inductives qui vérifient la propriété d'amalgamation.

2.2 Les théories inductives

D'après la proposition 2.1.2 (2), si T est inductive et a la propriété du plongement alors tout modèle $\mathcal{M}$ ayant $\mathcal{P}$ relativement à T se plonge dans tous les modèles existentiellement clos de T. On s'intéressera dans cette section à la réciproque : *est-ce que tout modèle de T qui se plonge dans tous les modèles e.c. de T a la propriété (*) relativement à T ?* On verra dans le chapitre IV que dans le cas de la théorie des groupes la réponse est négative, autrement dit : *il existe un groupe qui ne vérifie pas (*) et qui se plonge dans tous les groupes e.c.* (corollaire 4.2.3 (1)). On verra aussi

que la réponse est négative dans le cas de la théorie des groupes commutatifs et on déterminera la forme générale des groupes commutatifs qui ont la propriété (*).

Cela dit on peut avoir des propriétés intéressantes dans le cas général et c'est l'objet de cette section.

Pour parler des plongements de modèles on doit considérer les diagrammes des modèles. Par conséquent on peut voir le diagramme d'un modèle comme un type ayant un nombre infini de variables. Pour cette raison on va s'intéresser aux types ayant un nombre infini de variables (mais dénombrable) et à leur omission dans des modèles existentiellement clos.

2.2.1 Les types ayant un nombre dénombrable de variables

La question posée est la suivante : soit $\triangle(\overline{x})$ un type universel consistant avec une théorie T tel que $|\overline{x}| \leq \omega$, (donc ici $|\overline{x}|$ peut être dénombrable), sous quelles conditions peut-on affirmer l'existence d'un modèle dénombrable qui omet $\triangle(\overline{x})$?

Posons $\overline{x} = (x_i; i \in \omega)$, on définit

$$\triangle_n(x_0, ..., x_n) = \{\varphi \in \triangle(\overline{x}) \mid \textit{les variables libres}$$

$$\textit{qui apparaissent dans } \varphi \textit{ sont parmi } x_0, ..., x_n\}$$

On voit que s'il existe un modèle e.c. qui omet $\triangle_n$ pour un certain n alors ce même modèle omet aussi $\triangle$. Par conséquent la condition précédente est suffisante pour affirmer l'existence d'un modèle qui omet $\triangle$. Le problème devient plus intéressant quand on suppose que tous les $\triangle_n$ sont réalisés dans tous les modèles e.c.

Définition. Soit $\triangle(\overline{x})$ un type universel tel que $|\overline{x}| \leq \omega$. On dit que $\triangle$ est ***sans quantificateurs complet***, (en abrégé s.q.complet), si :

pour toute formule φ atomique dont les variables libre sont dans $\overline{x}$ (il n'y a qu'un nombre fini de variables qui apparaissent dans φ), on a $\varphi \in \triangle$ ou $\neg\varphi \in \triangle$.

On remarque que $\triangle_n$ est s.q.complet si $\triangle$ est s.q.complet.

On a le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Soit T une théorie inductive dans un langage dénombrable telle que $T_\forall$ a la propriété d'amalgamation. Soit $\triangle(\overline{x})$ un type universel tel que $|\overline{x}| \leq \omega$ et s.q.complet. Supposons que pour chaque n tout modèle e.c. de T réalise $\triangle_n$. Alors il existe une théorie Γ inductive vérifiant :*

- *$T \cup \Gamma$ est consistante et vraie dans tous les modèles e.c. de T.*
- *Pour tout $\mathcal{M}$ si $\mathcal{M} \models T \cup \Gamma$, alors $\mathcal{M}$ réalise $\triangle$.*

En particulier on voit que $\triangle$ est réalisé dans tous les modèles e.c. de T.

Démonstration.

Comme il n'existe pas de modèle e.c. de T qui omet $\triangle_n$ pour tout $n \in \omega$ alors d'après le théorème d'omission des types pour les théories inductives, pour tout $\triangle_n$ il existe une formule $\psi_n(x_0, ..., x_n)$ existentielle consistante avec T telle que :

$$T \vdash \psi_n(x_0, ..., x_n) \Longrightarrow \varphi(x_0, ..., x_n), \text{ pour tout } \varphi \in \triangle_n.$$

Soit Γ la théorie suivante :

$$\begin{cases} \exists x \psi_0(x) \\ \forall x(\psi_0(x) \Longrightarrow \exists y \psi_1(x, y)) \\ ... \\ \forall x_0, ..., \forall x_n(\psi_n(x_0, ..., x_n) \Longrightarrow \exists x_{n+1} \psi_{n+1}(x_0, ..., x_n, x_{n+1})) \\ ... \end{cases}$$

Montrons que Γ vérifie les conditions énoncées.

Fait 1. *Γ est de la forme $\forall\exists$.*

Soit $\varphi = \forall x_0, ..., \forall x_n(\psi_n(x_0, ..., x_n) \Longrightarrow \exists x_{n+1} \psi_{n+1}(x_0, ..., x_n, x_{n+1}))$.

Soit $\psi_n(x_0, ..., x_n) \equiv \exists \overline{z}_n \phi_n(x_0, .., x_n, \overline{z}_n)$, où ϕ_n est sans quantificateurs. Alors :

$$\varphi \equiv \forall x_0, ..., \forall x_n(\exists \overline{z}_n \phi_n(x_0, .., x_n, \overline{z}_n) \Longrightarrow \exists \overline{z}_{n+1} \exists x_{n+1} \phi_{n+1}(x_0, .., x_{n+1}, \overline{z}_{n+1}))$$

On peut supposer sans perte de généralité que $\overline{z}_n \cap \overline{z}_{n+1} = \emptyset$.

Donc $\varphi \equiv \forall x_0, ..., \forall x_n \exists \overline{z}_n \exists \overline{z}_{n+1}(\phi_n(x_0, .., x_n, \overline{z}_n) \Longrightarrow \phi_{n+1}(x_0, .., x_{n+1}, \overline{z}_{n+1}))$. On a bien une formule $\forall\exists$.

Fait 2. *$\triangle$ est réalisé dans tous les modèles de $T \cup \Gamma$.*

Soit $\mathcal{M} \models T \cup \Gamma$, on construit une suite $(a_i : i \in \omega)$ dans $\mathcal{M}$ qui vérifie $\triangle$. La construction est par récurrence sur n et telle que $\mathcal{M} \models \psi_n(a_0, ..., a_n)$.

Pour $n = 0$, on a $\mathcal{M} \models \Gamma$ donc $\mathcal{M} \models \exists x \psi_0(x)$. On prend a_0 tel que $\mathcal{M} \models \psi_0(a_0)$.

Supposons construite $(a_i : 0 \leq i \leq n)$. Comme $\mathcal{M} \models \Gamma$ on a

$$\mathcal{M} \models \forall x_0, ..., \forall x_n(\psi_n(x_0, ..., x_n) \Longrightarrow \exists x_{n+1} \psi_{n+1}(x_0, ..., x_n, x_{n+1}))$$

et comme $\mathcal{M} \models \psi_n(a_0, ..., a_n)$ on peut prendre a_{n+1} tel que $\mathcal{M} \models \psi_{n+1}(a_0, ..., a_n, a_{n+1})$.

Ainsi on a une suite $(a_i : i \in \omega)$ telle que $\mathcal{M} \models \psi_n(a_0, ..., a_n)$.

Grâce aux propriétés $T \vdash \psi_n(x_0, ..., x_n) \Longrightarrow \varphi(x_0, ..., x_n)$ pour tout $\varphi \in \triangle_n$, on voit que $(a_i : i \in \omega)$ réalise $\triangle$.

Fait 3. *$T \cup \Gamma$ est vraie dans tous les modèles e.c. de T (C'est là qu'on utilise la propriété d'amalgamation et le fait que $\triangle$ est s.q.complet) .*

Soit $\mathcal{M}$ un modèle e.c. de T et montrons que $\mathcal{M} \models \Gamma$. Montrons d'abord que $\mathcal{M} \models \exists x \psi_0(x)$. Comme $\exists x \psi_0(x)$ est consistante il existe $\mathcal{M}_0$ et un $b \in \mathcal{M}_0$ tel que $\mathcal{M}_0 \models \psi_0(b)$. Puisque $\mathcal{M}$ réalise $\triangle_0$ il existe $a \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}$ vérifie $\triangle_0(a)$. Comme $\triangle_0$ est s.q.complet les sous-structures $< a >$ et $< b >$ sont isomorphes. On voit que $< a >$ et $< b >$ sont des modèles de $T_\forall$. Comme $T_\forall$ a la PA il existe $\mathcal{N} \models T_\forall$ qui amalgame $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_0$ au-dessus de $< a >$ et $< b >$. Comme $\mathcal{M}_0 \models \psi_0(b)$, alors $\mathcal{N} \models \psi_0(a)$. Comme $\mathcal{N} \models T_\forall$ alors $\mathcal{N}$ se plonge dans un modèle $\mathcal{U}$ de T. Donc $\mathcal{U} \models \psi_0(a)$. Comme $\mathcal{M}$ est e.c alors $\mathcal{M} \models \psi_0(a)$.

Soient maintenant $a_0, ..., a_n$ des éléments de $\mathcal{M}$ tels que $\mathcal{M} \models \psi_n(a_0, ..., a_n)$.

Comme $\exists x_0, .., x_{n+1}\psi_{n+1}(x_0, ..., x_{n+1})$ est consistante il existe $\mathcal{M}_n$ et une suite $b_0, ..., b_n \in \mathcal{M}_n$ telle que $\mathcal{M}_n \models \exists x_{n+1}\psi_{n+1}(b_0, ..., b_n, x_{n+1})$.

Puisque $\triangle_n$ est s.q-complet et comme

$$T \vdash \exists x_{n+1}\psi_{n+1}(x_0, ..., x_n, x_{n+1}) \Longrightarrow \varphi(x_0, ..., x_n), \text{ pour tout } \varphi \in \triangle_n,$$

les sous-structures $< a_1, ..., a_n >$ et $< b_1, ..., b_n >$ sont isomorphes.

On voit que $< a_1, ..., a_n >$ et $< b_1, .., b_n >$ sont des modèles de $T_\forall$. Comme $T_\forall$ a la PA il existe $\mathcal{N} \models T$ qui amalgame $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_n$ au-dessus de $< a_1, .., a_n >$ et $< b_1, ..., b_n >$. Comme $\mathcal{N} \models T_\forall$ alors $\mathcal{N}$ se plonge dans un modèle $\mathcal{U}$ de T. Comme $\mathcal{M}_n \models \exists x_{n+1}\psi_{n+1}(b_0, .., b_n, x_{n+1})$ alors $\mathcal{U} \models \exists x_{n+1}\psi_{n+1}(a_0, ..., a_n, x_{n+1})$. Comme $\mathcal{M}$ est e.c. alors $\mathcal{M} \models \exists x_{n+1}\psi_{n+1}(a_0, ..., a_n, x_{n+1})$.

□

Corollaire 2.2.2.

Soit T une théorie inductive dans un langage dénombrable telle que $T_\forall$ a la PA. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T qui se plonge dans tous les modèles e.c. de T. Alors il existe une théorie inductive Γ vraie dans tous les modèles existentiellement clos de T et telle que $\mathcal{M}$ se plonge dans tout modèle de Γ. En particulier $\mathcal{M}$ se plonge dans tout modèle élémentairement équivalent à un modèle e.c. de T.

En particulier pour la théorie des groupes on a :

Corollaire 2.2.3.

Soit G un groupe qui se plonge dans tous les groupes e.c. Alors il existe une théorie inductive Γ vraie dans tous les groupes existentiellement clos et telle que G se plonge dans tout groupe qui vérifie Γ. En particulier G se plonge dans tout groupe élémentairement équivalent à un groupe e.c.

□

Dans le théorème qui suit on va voir une condition plus faible (voir la proposition 2.2.6 plus bas) que la propriété d'amalgamation pour avoir *presque* les mêmes conclusions que le théorème précédent.

Théorème 2.2.4. *Soit T une théorie inductive dans un langage dénombrable ayant un modèle e.c. et ω-homogène. Soit $\triangle(\overline{x})$ un type universel tel que $|\overline{x}| \leq \omega$ et s.q.complet. Supposons que pour chaque n, tout modèle e.c. de T réalise $\triangle_n$. Alors il existe une théorie Γ inductive vérifiant :*

*- $T \cup \Gamma$ est consistante et vraie dans **au moins** un modèle e.c. de T.*
- Pour tout $\mathcal{M}$ si $\mathcal{M} \models T \cup \Gamma$ alors $\mathcal{M}$ réalise $\triangle$.

Démonstration.

Soient $\mathcal{A}$ un modèle e.c. et ω-homogène et $\Upsilon = T \cup Th_\exists(\mathcal{A})$. Alors on a les deux propriétés suivantes :

(1) *Si ψ est un énoncé existentiel consistant avec Υ, alors $\psi \in \Upsilon$.*

(2) *Si $\mathcal{N}$ est un modèle e.c. par rapport à Υ alors $\mathcal{N}$ est e.c. par rapport à T.*

Pour démontrer (1) il suffit de considérer la théorie suivante :

$$\triangle(\mathcal{A}) \cup \{\psi\}$$

et de voir par compacité qu'elle a un modèle. Donc $\mathcal{A}$ se plonge dans un modèle qui vérifie ψ et comme $\mathcal{A}$ est e.c. alors $\mathcal{A} \models \psi$, d'où $\psi \in \Upsilon$.

Quant à la propriété (2) elle est évidente.

Comme pour tout n, $\triangle_n$ est réalisé dans tous les modèles e.c. de T, alors $\triangle_n$ est réalisé dans tous les modèles e.c. de Υ.

D'après le théorème d'omission des types des théories inductives, pour tout $\triangle_n$ il existe une formule $\psi_n(x_0, ..., x_n)$ existentielle consistante avec Υ telle que :

$$\Upsilon \vdash \psi_n(x_0, ..., x_n) \Longrightarrow \varphi(x_0, ..., x_n) \text{ , pour tout } \varphi \in \triangle_n$$

Soit Γ la théorie suivante : $\begin{cases} \varphi \text{ existentielle et } \varphi \in \Upsilon \\ \forall x(\psi_0(x) \Longrightarrow \exists y \psi_1(x, y)) \\ ... \\ \forall x_0, ..., \forall x_n(\psi_n(x_0, ..., x_n) \Longrightarrow \exists x_{n+1} \psi_{n+1}(x_0, ..., x_n, x_{n+1})) \\ ... \end{cases}$

Montrons que Γ vérifie les conditions énoncées.

Fait 1. *Γ est de la forme $\forall\exists$.* La démonstration est incluse dans celle du Théorème 2.2.1

Fait 2. *$\triangle$ est réalisé dans tous les modèles de $T \cup \Gamma$.*

Soit $\mathcal{M} \models T \cup \Gamma$, on construit une suite $(a_i : i \in \omega)$ dans $\mathcal{M}$ qui vérifie $\triangle$. Par récurrence sur n, on construit $(a_i : i = 0, n)$ vérifiant : $\mathcal{M} \models \psi_n(a_0, ..., a_n)$.

Pour $n = 0$, on a $\mathcal{M} \models \Gamma$ donc $\mathcal{M} \models \exists x \psi_0(x)$ car $\exists x \psi_0(x)$ est consistante avec Υ et donc $\exists x \psi_0(x) \in \Gamma$. Donc on prend a_0 tel que $\mathcal{M} \models \psi_0(a_0)$.

Supposons construite $(a_i : i = 0, n)$. Comme $\mathcal{M} \models \Gamma$, alors ;

$$\mathcal{M} \models \forall x_0, ..., \forall x_n(\psi_n(x_0, ..., x_n) \Longrightarrow \exists x_{n+1} \psi_{n+1}(x_0, ..., x_n, x_{n+1}))$$

et comme $\mathcal{M} \models \psi_n(a_0, ..., a_n)$, on peut prendre a_{n+1} tel que $\mathcal{M} \models \psi_{n+1}(a_0, ..., a_n, a_{n+1})$.

Ainsi on a une suite $(a_i : i \in \omega)$ telle que $M \models \psi_n(a_0, ..., a_n)$.

Grâce aux propriétés $\Upsilon \vdash \psi_n(x_0, ..., x_n) \Rightarrow \varphi(x_0, ..., x_n)$, pour tout $\varphi \in \triangle_n$, on voit que $(a_i : i \in \omega)$ vérifie $\triangle$.

Fait 3. *$T \cup \Gamma$ est vraie dans au moins un modèle e.c. de T.*

On va montrer que Γ est vraie dans $\mathcal{A}$.

Soient $a_0, ..., a_n \in \mathcal{A}$ tels que $\mathcal{A} \models \psi_n(a_0, ..., a_n)$. Comme $\mathcal{A} \models \exists x_0, .., x_{n+1} \psi_{n+1}(x_0, ..., x_{n+1})$, il existe une suite $b_0, ..., b_n \in \mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A} \models \exists x_{n+1} \psi_{n+1}(b_0, ..., b_n, x_{n+1})$.

Comme $\triangle_n$ est s.q.complet et puisque $\Upsilon \vdash \psi_n(x_0, ..., x_n) \Rightarrow \varphi(x_0, ..., x_n)$, pour tout $\varphi \in \triangle_n$, les sous-structures $< a_1, ..., a_n >$ et $< b_1, .., b_n >$ sont isomorphes. Comme $\mathcal{A}$ est ω-homogène on a $\mathcal{A} \models \exists x_{n+1}\psi_{n+1}(a_0, ..., a_n, x_{n+1})$.

Pour finir, il suffit juste de remarquer que comme Γ est vraie dans au moins un modèle e.c. de T, alors elle est consistante avec T et donc $T \cup \Gamma$ est consistante et pour tout $\mathcal{M}$ si $\mathcal{M} \models T \cup \Gamma$, alors M réalise $\triangle$.

□

Remarque. Si T a la PP, alors Γ est vraie dans tous les modèles e.c. En effet dans ce cas tous les modèles e.c. de T vérifient les mêmes formules $\forall\exists$.

Corollaire 2.2.5. *Soit T une théorie inductive dans un langage dénombrable ayant un modèle e.c. et ω-homogène. Soit $\triangle(\overline{x})$ un type universel tel que $|\overline{x}| \leq \omega$ et s.q.complet. S'il n'existe pas de théorie Γ inductive consistante avec T telle que tout modèle de $T \cup \Gamma$ réalise $\triangle(\overline{x})$, alors il existe un modèle e.c. dénombrable de T qui omet $\triangle(\overline{x})$.*

Démonstration. Supposons que pour chaque n, tout modèle e.c. de T réalise $\triangle_n$, alors d'après le théorème précédent il existe une théorie Γ inductive consistante avec T telle que tout modèle de $T \cup \Gamma$ réalise $\triangle(\overline{x})$. Contradiction. Par conséquent il existe un modèle e.c. $\mathcal{M}$ qui omet un certain $\triangle_n$. D'après le théorème de Löwenheim-Skolem descendant il existe un modèle $\mathcal{N}$ dénombrable tel que $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ et donc $\mathcal{N}$ est e.c. et omet $\triangle_n$.

□

La proposition qui suit nous éclaire sur le lien entre la PA et la propriété énoncée dans le théorème 2.2.4.

Proposition 2.2.6. *Soit T une théorie inductive telle que $T_\forall$ a la PA. Alors tout modèle infini $\mathcal{M}$ de T se plonge dans un modèle $\mathcal{N}$ existentiellement clos et ω-homogène tel que $|\mathcal{N}| = sup(|\mathcal{M}|, |T|)$.* [1]

Lemme 2.2.7. *Soit T une théorie inductive telle que $T_\forall$ a la propriété d'amalgamation. Soient $\mathcal{M}$ un modèle infini de T et $\overline{a}, \overline{b}, c \in \mathcal{M}$ tels que $\triangle(\overline{a}, \mathcal{M}) = \triangle(\overline{b}, \mathcal{M})$. Alors $\mathcal{M}$ se plonge dans un modèle $\mathcal{N}$ de T tel que $|\mathcal{N}|=sup(|\mathcal{M}|, |T|)$ et tel qu'il existe $d \in \mathcal{N}$ tel que $\triangle(\overline{a}^\frown c, \mathcal{N}) = \triangle(\overline{b}^\frown d, \mathcal{N})$.*

Démonstration. Soit

$$\Gamma = T \cup \triangle(\mathcal{M}) \cup \{\psi(\overline{b}, d) \mid \psi(\overline{x}, y) \in \triangle(\overline{a}^\frown c, \mathcal{M})\}$$

Soit $S =< \overline{\alpha}, d >$ une copie de $< \overline{a}, c >$. Comme $\triangle(\overline{a}, \mathcal{M}) = \triangle(\overline{b}, \mathcal{M})$ on a $< \overline{\alpha} > \cong < \overline{b} >$. Soit $\mathcal{K}$ amalgamant $\mathcal{M}$ et S au-dessus de $\mathcal{A} =< \overline{b} >$ et $\mathcal{B} =< \overline{\alpha} >$. Alors $\mathcal{K}$ est un modèle de $T_\forall$ par conséquent il existe $\mathcal{N}'$ tel que $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{N}'$ et $(\mathcal{N}', d)$ vérifie Γ. Comme $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}'$,

[1] En présence de PP cette propriété équivaut à la propriété d'amalgamation pour $T_\forall$.

$\mathcal{N}' \models \triangle(\mathcal{M})$ et $\overline{\alpha} = \overline{b}$ dans $\mathcal{N}'$ et $\triangle(\overline{\alpha}\widehat{}d, \mathcal{N}') = \triangle(\overline{a}\widehat{}c, \mathcal{N}')$, alors $\triangle(\overline{b}\widehat{}d, \mathcal{N}') = \triangle(\overline{a}\widehat{}c, \mathcal{N}')$. Comme $|\Gamma| = sup(|\mathcal{M}|, |T|)$, alors Γ admet un modèle de cardinal $sup(|\mathcal{M}|, |T|)$.

□

Lemme 2.2.8. *Soit T une théorie inductive telle que $T_\forall$ a la propriété d'amalgamation. Soit $\mathcal{M}$ un modèle infini de T. Alors $\mathcal{M}$ se plonge dans un modèle ω-homogène $\mathcal{N}$ de T tel que $|\mathcal{N}|$=$sup(|\mathcal{M}|, |T|)$.*

Démonstration. On désigne par α le cardinal $sup(|\mathcal{M}|, |T|)$.

On va construire une suite $(\mathcal{H}_i)_{i\in\omega}$ vérifiant :

$$(1)\begin{cases} \mathcal{H}_0 = \mathcal{M} & \mathcal{H}_i \models T,\ \mathcal{H}_i \hookrightarrow \mathcal{H}_{i+1}, |\mathcal{H}_i| = \alpha \\ \forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{H}_i & si\ \ \triangle(\overline{a}, \mathcal{H}_i) = \triangle(\overline{b}, \mathcal{H}_i),\ alors \\ \forall c \in \mathcal{H}_i\ \ , \exists d \in \mathcal{H}_{i+1}\ \ tel\ \ que & \triangle(\overline{a}\widehat{}c, \mathcal{H}_{i+1}) = \triangle(\overline{b}\widehat{}d, \mathcal{H}_{i+1}) \end{cases}$$

Alors la réunion $\mathcal{H} = \cup_i \mathcal{H}_i$ est $\omega-$homogène et est modèle de T, et $|\mathcal{H}| = \alpha$.

Supposons $\mathcal{H}_i$ construit. Soit $[(\overline{a}_k, \overline{b}_k, c_k)]_{k\in\alpha}$ la liste de tous les triplets de suites finies extraites de $\mathcal{H}_i$ vérifiant : $|\overline{a}_k| = \left|\overline{b}_k\right|$, $|c_k| = 1$, $\triangle(\overline{a}_k, \mathcal{H}_i) = \triangle(\overline{b}_k, \mathcal{H}_i)$.

On construit une suite $(\mathcal{U}_k)_{k\in\lambda}$vérifiant :

$$(2)\begin{cases} \mathcal{U}_0 = \mathcal{H}_i & \mathcal{U}_k \models T \\ |\mathcal{U}_k| = \alpha & \cup_{i<k}\mathcal{U}_i \hookrightarrow \mathcal{U}_k \\ \exists d \in \mathcal{U}_k\ \ tel\ \ que & \triangle(\overline{a}_k\widehat{}c_k, \mathcal{U}_k) = \triangle(\overline{b}_k\widehat{}d, \mathcal{U}_k) \end{cases}$$

On pose $\mathcal{H}_{i+1} = \cup_{k\in\alpha}\mathcal{U}_k$, on voit que $\mathcal{H}_{i+1} \models T$, $|\mathcal{H}_{i+1}| = \alpha$, $\mathcal{H}_{i+1}$ satisfait les conditions de la suite (1).

Supposons $\mathcal{U}_i$ construit pour $i < k$. Soit $\mathcal{P} = \cup_{i<k}\mathcal{U}_i$. D'après le lemme 2.2.7 il existe $\mathcal{V}$ tel que $P \hookrightarrow \mathcal{V}$, avec $\mathcal{V} \models T$, $|\mathcal{V}|$=$sup(\alpha, |T|)$ et il existe $d \in \mathcal{V}$ tel que $\triangle(\overline{b}_k\widehat{}d, \mathcal{U}_k) = \triangle(\overline{a}_k\widehat{}c_k, \mathcal{U}_k)$. Il suffit de prendre $\mathcal{U}_k = \mathcal{V}$.

□

Démonstration de la proposition 2.2.6. On construit une suite $(\mathcal{M}_k)_{k\in\omega}$vérifiant :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}, & \mathcal{M}_k \models T \\ |\mathcal{M}_k| = sup(|\mathcal{M}|, |T|), & \mathcal{M}_k \hookrightarrow \mathcal{M}_{k+1} \end{cases}$$

Avec si k pair non nul $\mathcal{M}_k$ ω-homogène et si k impair $\mathcal{M}_k$ e.c.

Cela est possible grâce au lemme 2.2.8 et au fait que tout modèle de cardinal λ se plonge dans un modèle existentiellement clos ayant le cardinal $sup(\lambda, |T|)$. Alors $\mathcal{N} = \cup_{k\in\omega}\mathcal{M}_k$ est existentiellement clos et ω-homogène.

□

Pour finir cette section on a cette proposition, qui sera constamment utilisée :

Proposition 2.2.9. *Soit T une théorie inductive dans un langage dénombrable, ayant la PP. Alors pour tout modèle $\mathcal{M}$ de type fini de T les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *$\mathcal{M}$ a (**).*

(2) *$\mathcal{M}$ a (*).*

(3) *$\mathcal{M}$ se plonge dans tous les modèles e.c. de T.*

Démonstration.

(1)⇒(2). Evidente.

(2)⇒(3). Comme T a la PP alors tout énoncé existentiel consistant avec T est vrai dans tous les modèles e.c. de T. Par conséquent $\mathcal{M}$ se plonge dans tous les modèles e.c. de T.

(3)⇒(1). Posons $\mathcal{M} =< a_1, ..., a_n >$. Comme $\mathcal{M}$ se plonge dans tous les modèles e.c. de T alors $\triangle(a_1, ..., a_n, \mathcal{M})$[1] n'est omis dans aucun modèle existentiellement clos. Par conséquent d'après le théorème d'omission des types pour les théories inductives, il existe une formule existentielle $\psi(x_1, ..., x_n)$ telle que :

$$T \vdash \psi(x_1, ..., x_n) \Rightarrow \varphi(x_1, ..., x_n), \text{ pour tout } \varphi \in \triangle(a_1, ..., a_n, \mathcal{M}).$$

Alors il est clair que la formule $\exists x_1 ... \exists x_n \psi(x_1, ..., x_n)$ vérifie la propriété voulue.

□

2.3 Quelques conditions suffisantes

Dans cette section on va voir quelques conditions suffisantes pour affirmer l'existence de modèles ayant $\mathcal{P}$. On a la proposition suivante, qui reprend un argument classique en théorie des modèles ;

Proposition 2.3.1. *Soit T une théorie dans un langage dénombrable et ayant un modèle $\mathcal{M}$ universel*[2]*.*

Alors pour toute formule sans quantificateurs $\vartheta(x_1, ..., x_n)$ telle que l'énoncé $\exists \overline{x} \vartheta(\overline{x})$ est consistant avec T il existe une formule $\varphi(x_1, ..., x_n)$ sans quantificateurs vérifiant :

(1) *$\exists x_1 ... \exists x_n \varphi(x_1, ..., x_n)$ est consistante avec T.*

(2) *$T \vdash \varphi(x_1, ..., x_n) \Longrightarrow \vartheta(x_1, ..., x_n)$.*

(3) *Pour toute formule atomique $\phi(x_1, ..., x_n)$ on a :*

$$T \vdash \varphi(x_1, ..., x_n) \Longrightarrow \phi(x_1, ..., x_n)$$

$$\text{ou } T \vdash \varphi(x_1, ..., x_n) \Longrightarrow \neg\phi(x_1, ..., x_n)$$

[1] Voir notations.

[2] Remarquons que cela implique que T a la PP

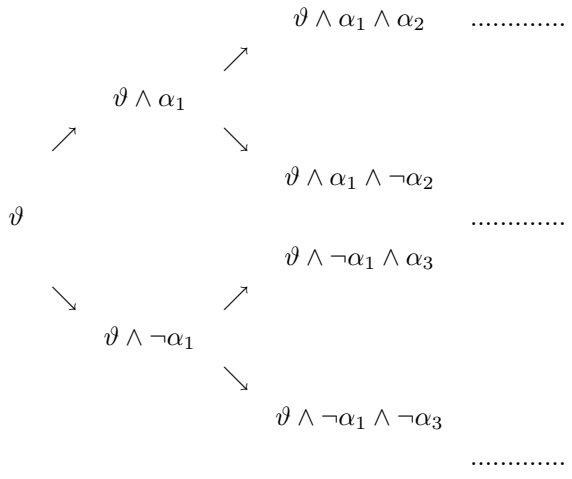
Démonstration.

Supposons qu'il n'existe pas de formule sans quantificateurs $\xi(x_1, ..., x_n)$ qui vérifie : pour toute formule atomique $\phi(x_1, ..., x_n)$ on a :

$$T \vdash \vartheta(x_1, ..., x_n) \wedge \xi(x_1, ..., x_n) \Longrightarrow \phi(x_1, ..., x_n)$$

$$\text{ou } T \vdash \vartheta(x_1, ..., x_n) \wedge \xi(x_1, ..., x_n) \Longrightarrow \neg\phi(x_1, ..., x_n)$$

Soit U l'ensemble des formules atomiques qui ont $x_1, ..., x_n$ comme variables libres. On va construire un arbre. D'après notre hypothèse il existe une formule atomique $\alpha_1(x_1, ..., x_n)$ telle que : $\vartheta(x_1, ..., x_n) \wedge \alpha_1(x_1, ..., x_n)$ est consistante avec T et $\vartheta(x_1, ..., x_n) \wedge \neg\alpha_1(x_1, ..., x_n)$ est aussi consistante (pour alléger l'écriture on va négliger les variables). On peut faire de même pour les formules $\vartheta \wedge \alpha_1$ et $\vartheta \wedge \neg\alpha_1$. Donc on a :



Par conséquent on construit 2^{χ_0} diagrammes de structures de type fini, consistants avec T. Donc $T_\forall$ a 2^{χ_0} structures de type fini deux à deux non isomorphes, qui sont toutes plongées dans $\mathcal{M}$ ce qui contredit la dénombrabilité de $\mathcal{M}$.

□

Remarque. Observons que la proposition 2.3.1. reste vraie si on remplace la condition "*T a un modèle universel*" par la condition "*$T_\forall$ a au plus χ_0 modèles de type fini*".

Corollaire 2.3.2. *Soit T une théorie universelle dans un langage dénombrable et ayant un modèle universel. Alors T a des modèles de type fini finiment expansifs et tout modèle ayant (**) se plonge dans un modèle de type fini finiment expansif. En outre pour tout modèle de type fini $\mathcal{M}$ de T les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *$\mathcal{M}$ a (**).*

(2) *$\mathcal{M}$ a (*).*

(3) *$\mathcal{M}$ se plonge dans tous les modèles e.c. de T.*

(4) *$\mathcal{M}$ se plonge dans un modèle de type fini finiment expansif.*

Démonstration.

Soit $\psi(x_1,...,x_n) = \bigwedge_{i=1...,n} x_i = x_i$. Alors $\exists x_0...\exists x_n\psi(x_1,...,x_n)$ est consistante avec T et d'après la proposition 2.3.1, il existe une formule $\varphi(x_1,...,x_n)$ sans quantificateurs vérifiant : $\exists x_1...\exists x_n\varphi(x_1,...,x_n)$ est consistante avec T, $T \vdash \varphi(x_1,...,x_n) \Longrightarrow \psi$ et pour toute formule atomique $\phi(x_1,...,x_n)$:

$$T \vdash \varphi(x_1,...,x_n) \Longrightarrow \phi(x_1,...,x_n)$$

$$ou\ T \vdash \varphi(x_1,...,x_n) \Longrightarrow \neg\phi(x_1,...,x_n)$$

Soit $\mathcal{N}$ un modèle de T qui vérifie $\exists y_1...\exists y_m\varphi(y_1,...,y_m)$. Soit $\mathcal{K}$ la sous-structure engendrée par des éléments qui vérifient φ dans $\mathcal{N}$. Alors on voit que $\mathcal{K}$ est un modèle finiment expansif.

Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T ayant (**). Soit ψ une formule existentielle consistante avec T et qui vérifie : $\mathcal{M}$ se plonge dans tout modèle de T et de ψ. On peut écrire ψ sous la forme $\exists x_0...\exists x_n\vartheta(x_1,...,x_n)$ où ϑ est sans quantificateurs. D'après la proposition 2.3.1 il existe une formule $\varphi(y_1,...,y_m)$ sans quantificateurs qui vérifie les conditions (1)-(2)-(3) de la proposition 2.3.1. Soit $\mathcal{N}$ un modèle de T qui vérifie $\exists y_1...\exists y_m\varphi(y_1,...,y_m)$. Soit $\mathcal{K}$ la sous-structure engendrée par des éléments qui vérifient φ dans $\mathcal{N}$. Alors on voit que $\mathcal{K}$ est un modèle finiment expansif qui contient une copie de $\mathcal{M}$.

Montrons maintenant les équivalences énoncées.

Les implications **(1)**⇒**(2)** et **(4)**⇒**(1)** sont évidentes.

(2)⇒**(3)**. Comme T a un modèle universel, T a la PP et donc on applique la proposition 2.2.9.

(3)⇒**(4)**. Comme T a la PP on peut appliquer la proposition 2.2.9, et d'après ce qui précède $\mathcal{M}$ se plonge dans un modèle de type fini finiment expansif.

□

Remarque Il est bien connu que la théorie des groupes commutatifs a un modèle universel (On peut prendre $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\chi_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(\chi_0)}$). Il est également bien connu que les modèles e.c. de cette théorie sont les groupes commutatifs divisibles ayant pour tout $n \geq 2$ une infinité d'éléments d'ordre n. On voit que chacune des propriétés (1) à (4) du corollaire 2.3.2 caractérise les groupes commutatifs *finis* parmi les groupes commutatifs de type *fini*.

Chapitre 3

Quasi-variétés et modèles fortement e.c.

A part la section 3.2 ce chapitre peut être lu d'une manière indépendante des autres chapitres. Nous nous intéressons dans la section 3.2 aux modèles ayant $\mathcal{P}$ et nous démontrons une proposition (la proposition 3.2.2) qui unifie certains résultats connus en théorie des groupes.

Dans la section 3.3 nous introduisons la notion de modèle fortement e.c. et nous étudions la relation qui existe entre le plongement dans des modèles de présentation finie et les plongements dans les modèles fortement e.c. Si une bonne partie de cette section est une adaptation aux quasi-variétés récursivement énumérables des résultats relatifs aux groupes de ([11][30]), son point fort en est une nouvelle caractérisation des groupes de type fini récursivement présentés, analogue à celle du théorème de Neumann-Macintyre.

3.1 Introduction

Le but de cette introduction est de rappeler les notions de base qui vont être utilisées par la suite, en particulier celle de quasi-variété. Pour plus de détails nous renvoyons à [11] et [13].

Toute variété étant une quasi-variété, tout ce qui va être dit ici est valable pour les variétés de groupes.

Définitions et propriétés.

(1) Soit T une théorie dans un langage $\mathcal{L}$. On dit que T est une ***quasi-variété*** si T est universelle et la classe des modèles de T est close par produit cartésien.

(2) Soient $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ deux modèles de T, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures telles que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_1$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}_2$ et $\phi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

On désigne par

$$\mathcal{M}_1 * \mathcal{M}_2$$

le modèle de T présenté par l'ensemble :

$$P(\mathcal{M}_1) \cup P(\mathcal{M}_2)$$

où $P(\mathcal{M}_i)$ est une présentation de $\mathcal{M}_i$ (cf.[13], et où on a employé des ensembles de générateurs disjoints pour $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. On ne mentionnera plus les précautions manifestes de ce genre dans la suite).

On désigne par

$$\mathcal{M}_1 *_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \mathcal{M}_2$$

le modèle de T présenté par l'ensemble :

$$P(\mathcal{M}_1) \cup P(\mathcal{M}_2) \cup \{\phi(a) = a,\ a \in \mathcal{A}\}$$

où $P(\mathcal{M}_i)$ est une présentation de $\mathcal{M}_i$.

Il est bien connu que $\mathcal{M}_1 * \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_1 *_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \mathcal{M}_2$ ne dépendent pas des présentations choisies et ont une définition intrinsèque que nous ne donnerons pas ici.

(3) Soient $X, Y \subseteq \omega$; on dit que Y est ***récursivement réductible*** à X et on écrit $Y \leq_e X$ (cf. [30] p.483), s'il existe un ensemble récursivement énumérable $U \subseteq \omega \times [\omega]^{<\omega}$ tel que :

$$n \in Y \Longleftrightarrow \exists A \subseteq X \text{ et } (n, A) \in U$$

(4) Pour $X, Y \subseteq \omega$, on définit $X \leq_1 Y$ (cf. [11] p.40 ou [30] p.487) si et seulement si il existe une fonction $f : \omega \to \omega$, injective récursive telle que $n \in Y$ ssi $f(n) \in X$.

(5) La relation ($Y \leq_1 X$ et $X \leq_1 Y$) est une relation d'équivalence notée $Y \equiv_1 X$.

(6) La relation ($Y \leq_e X$ et $X \leq_e Y$) est une relation d'équivalence notée $Y \equiv_e X$.

$(\mathcal{P}(\omega)/\equiv_e, \leq_e)$ est un treillis de cardinal 2^ω. Dans tout ce qui suit on choisit un système représentatif $(d_i : i \in \omega)$ des classes d'équivalence.

(7) Si $Y \leq_1 X$ alors $Y \leq_e X$.

(8) Soit $\mathcal{K}$ une classe de $\mathcal{L}$-structures de type fini. On dit que $\mathcal{K}$ a la HP si chaque fois que $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ et $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, avec $\mathcal{N}$ de type fini, alors $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$.

Proposition 3.1.1. *Soit T une quasi-variété.*

***i)** Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *T a la PA.*

(2) *Pour tout $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ modèles de T, pour tout $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_1$, pour tout $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}_2$ tel que $\phi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures, les applications canoniques de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ dans $\mathcal{M}_1 *_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \mathcal{M}_2$ sont des plongements.*

***ii)** Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *T a la PP.*

(2) *Pour tout $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ modèles de T, les applications canoniques de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ dans $\mathcal{M}_1 * \mathcal{M}_2$ sont des plongements.*

Démonstration.

On va juste montrer *i)* , car *ii)* se traite de la même manière.

On a (2)⇒(1) est évidente, montrons donc (1)⇒(2).

Soient $\mathcal{M}_1 =< X \mid W_1(X) >$ et $\mathcal{M}_2 =< Y \mid W_2(Y) >$, alors on sait que

$$\mathcal{M}_1 *_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \mathcal{M}_2 = <X, Y \mid W_1(X) \wedge W_2(Y),\ a = \phi(a),\ a \in A, >$$

Donc il suffit de montrer que si $\mathcal{M}_1 \models \neg\varphi(\overline{a})$, avec $\varphi(\overline{a})$ une formule atomique, alors

$$\mathcal{M}_1 *_{A,B} \mathcal{M}_2 \models \neg\varphi(\overline{a})$$

Cela résulte de ce que la la formule $W_1(X) \wedge W_2(Y) \wedge \neg\varphi(\overline{a})$, $a = \phi(a)$, $a \in \mathcal{A}$, est consistante car elle est vraie dans un modèle de T amalgamant $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ au-dessus de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ car T a la propriété d'amalgamation, et de l'adaptation à notre contexte de la remarque de la page 14.

□

3.2 Les modèles ayant $\mathcal{P}$ dans les quasi-variétés

Dans le cas des quasi-variétés les modèles ayant $\mathcal{P}$ ont certaines propriétés particulières. Pour une théorie T universelle, on définit les classes suivantes :

$\Sigma_0(T)$ =*la classe des modèles de* ***type fini*** *de T qui se plongent dans tous les modèles e.c. de T*

$\Sigma_1(T)$ =*la classe des modèles de T qui se plongent dans tous les modèles e.c. de T*

On voit que pour la théorie des groupes $\Sigma_0(T_{gp})$ n'est rien d'autre que la classe des groupes de types fini ayant un problème des mots résoluble. Une étude plus détaillée des classes $\Sigma_0(T_{gp})$ et $\Sigma_1(T_{gp})$ fera l'objet du chapitre IV.

G. Sabbagh a observé le résultat suivant, (non publié, mais on trouve une bonne partie du théorème 3.2.1 dans [5], cf. notre note à la p. 17), qui est implicite dans la littérature (cf. [13], Théorème 8.2.6 et les remarques historiques de la page 409 qui omettent [7]).

Théorème 3.2.1. *Soit T une quasi-variété ayant la PP dans un langage dénombrable sans symboles de relation et soit $\mathcal{M}$ un modèle de type fini de T*[1]*. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *$\mathcal{M}$ a la propriété (**).*

(2) *$\mathcal{M}$ a la propriété (*).*

(3) *$\mathcal{M}$ se plonge dans tous les modèles e.c. de T.*

(4) *Il existe un modèle de présentation finie H vérifiant les propriétés suivantes :*

il existe un plongement $\varphi : \mathcal{M} \hookrightarrow H$, une suite $(\alpha_i, \beta_i)_{i=1,...,n}$, $\alpha_i \neq \beta_i$ d'éléments de H vérifiant : pour tout X modèle de T, pour tout homomorphisme $\phi : H \to X$, s'il existe $a, b \in \mathcal{M}$, $a \neq b$ tels que $\phi\varphi(a)=\phi\varphi(b)$, alors il existe i_0 tel que $\phi(\alpha_{i_0}) = \phi(\beta_{i_0})$.

Démonstration.

(1)⇒(2)⇒(3). Découle de la proposition 2.2.9.

(3)⇒(4).

Posons $\mathcal{M} =< a_1, .., a_n >$, alors tout modèle dénombrable e.c. de T réalise $\triangle(a_1, ..., a_n, \mathcal{M})$. D'après le théorème d'omission des types pour les théories inductives, il existe une formule $\chi(x_1, .., x_n)$ existentielle telle que $T \cup \{\exists x_1, .., x_n \chi(x_1, ..., x_n)\}$ est consistante et

[1] On peut quitte à alourdir les écritures travailler dans un langage ayant des symboles de relations. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer le théorème correspondant.

$$T \models \chi(x_1, .., x_n) \Rightarrow \varphi(x_1, ..., x_n), \text{ pour toute formule } \varphi \in \triangle(a_1, ..., a_n, \mathcal{M})$$

Posons $\chi(x_1, .., x_n) = \exists \bar{y} \vartheta(x_1, ..., x_n, \bar{y})$ avec ϑ sans quantificateurs. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\vartheta(\overline{x}, \bar{y})$ est primitive, donc de la forme $(V(\overline{x}, \bar{y}) \wedge N(\overline{x}, \bar{y}))$, où V est une conjonction de formules atomiques et N est une conjonction de négations de formules atomiques. Soit H le modèle de T de type fini engendré par $\overline{c}, \bar{b}$ présenté par $V(\overline{c}, \bar{b})$. Alors on voit que H vérifie $V(\overline{c}, \bar{b}) \wedge N(\overline{c}, \bar{b})$, par conséquent H vérifie $\exists \bar{y} \vartheta(x_1, ..., x_n, \bar{y})$. Il en résulte qu'il y a un plongement $\varphi : \mathcal{M} \hookrightarrow H$, tel que $\varphi(a_i) = c_i$. Comme le langage ne contient pas de symboles de relations on peut écrire $N(\overline{x}, \overline{y}) = \bigwedge_{i=1,...,m} u_i(\overline{x}, \overline{y}) \neq v_i(\overline{x}, \overline{y})$ où u_i et v_i sont des termes. Posons $\alpha_i = u_i(\overline{c}, \bar{b})$ et $\beta_i = u_i(\overline{c}, \bar{b})$.

Si $\phi : H \to X$ est un homomorphisme tel que pour tout $i = 1, ..., n$, on a $\phi(\alpha_i) \neq \phi(\beta_i)$, alors l'homomorphisme $\phi\varphi$ préserve χ et est donc un plongement de $\mathcal{M}$ dans X. Par conséquent si $\phi : H \to X$ est un homomorphisme et s'il existe $a, b \in \mathcal{M}$, $a \neq b$ tels que $\phi\varphi(a)=\phi\varphi(b)$, alors on voit qu'il existe i_0 tel que $\phi(u_{i_0}) = \phi(v_{i_0})$, car sinon $\phi\varphi$ serait un plongement.

(4)⇒(1). Posons $H =< \overline{a} \,|W(\overline{a}) >$. Il existe des termes $u_i(\overline{x})$ et $v_i(\overline{x})$ tels que $\alpha_i = u_i(\overline{a})$ et $\beta_i = v_i(\overline{a})$. Soit X un modèle de T contenant $\bar{b}$ et qui vérifie $(W(\bar{b}) \wedge \bigwedge_i u_i(\bar{b}) \neq v_i(\bar{b}))$, il en résulte qu'il y a un homomorphisme $\phi : H \to X$ tel que $\phi(a_i) = b_i$. Alors d'après (4) on voit que l'homomorphisme $\phi\varphi : \mathcal{M} \to X$ est un plongement. Par conséquent $\mathcal{M}$ se plonge dans tous les modèles de $\exists \bar{x}(W(\bar{x}) \wedge \bigwedge_i u_i(\bar{x}) \neq v_i(\bar{x}))$, d'où $\mathcal{M}$ a la propriété (**).

□

Proposition 3.2.2. *Soit T une quasi-variété dans un langage dénombrable. Supposons que T a la PA. Soient* (1), (2), (3), (4), (5) *les propriétés suivantes :*

(1) *$\Sigma_0(T)$ n'a pas la propriété d'amalgamation.*
(2) *Il n'existe pas de modèle e.c. de T qui se plonge dans tous les modèles e.c. de T.*
(3) *Tout modèle e.c. de T contient un modèle de type fini de T qui n'est pas dans $\Sigma_0(T)$.*
(4) *Il existe un énoncé existentiel ψ consistant avec T tel que tout modèle de $\Sigma_0(T)$ vérifie $\neg\psi$.*
(5) *Il existe un modèle de présentation finie de T qui n'est pas dans $\Sigma_0(T)$.*

Alors pour tout i, $1 \leq i \leq 4$, $(i) \Longrightarrow (i+1)$.
Cependant la théorie des groupes commutatifs vérifie (5) et ne vérifie pas (4).

Lemme 3.2.3. *Soit T une théorie inductive. Soit $\mathcal{M}$ un modèle dénombrable e.c. de T qui se plonge dans tous les modèles e.c. de T. Si $T_\forall$ a la PA alors $\mathcal{M}$ est ω-homogène.*

Démonstration. Soient $a_1, ..., a_n \in \mathcal{M}$ et $b_1, ..., b_n \in \mathcal{M}$ tels que $< a_1, ..., a_n > \cong < b_1, ..., b_n >$ et soit $b \in \mathcal{M}$. Comme $\triangle(b_1, ..., b_n, b, \mathcal{M})$ n'est omis dans aucun modèle e.c. il existe une formule existentielle $\psi(x_1, ..., x_n, y)$ telle que :

$$T \vdash \forall x_1 ... \forall x_n \forall y(\psi(x_1, ..., x_n, y) \Longrightarrow \varphi(x_1, ..., x_n, y)), \text{ pour tout } \varphi \in \triangle(b_1, ..., b_n, b, \mathcal{M})$$

Etant donné que $T_\forall$ a la PA il existe $\mathcal{N}$ modèle de $T_\forall$ qui amalgame $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ au-dessus de $< a_1, ..., a_n >$ et $< b_1, ..., b_n >$. Comme $\mathcal{N}$ est modèle de $T_\forall$, on peut plonger $\mathcal{N}$ dans un modèle $\mathcal{N}'$ de T dans lequel on identifiera les a_i et les b_i.

Comme $\mathcal{M}\models\exists y\psi(b_1,...,b_n,y)$ alors $\mathcal{N}'\models\exists y\psi(b_1,...,b_n,y)$ et donc $\mathcal{N}'\models\exists y\psi(a_1,...,a_n,y)$. Comme $\mathcal{M}$ est e.c. alors $\mathcal{M}\models\exists y\psi(a_1,...,a_n,y)$. Par conséquent il existe $d\in\mathcal{M}$, tel que $\mathcal{M}\models\psi(a_1,...,a_n,d)$ et donc $\triangle(b_1,...,b_n,b,\mathcal{M})=\triangle(a_1,...,a_n,d,\mathcal{M})$.

□

Lemme 3.2.4. *Soit T une théorie inductive telle que $T_\forall$ a la PA. S'il existe un modèle e.c. tel que toutes ses sous-structures de type fini appartiennent à $\Sigma_0(T)$, alors $\Sigma_0(T)$ a la propriété d'amalgamation.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ un modèle e.c. de T tel que toutes ses sous-structures de type fini appartiennent à $\Sigma_0(T)$. D'après le théorème 2.2.1 $\mathcal{M}$ se plonge dans tous les modèles e.c. de T. Comme $T_\forall$ a la PA alors d'après le lemme 3.2.3 $\mathcal{M}$ est ω-homogène et on voit que $\mathcal{A}ge(\mathcal{M})=\Sigma_0(T)$, ce qui implique que $\Sigma_0(T)$ a la propriété d'amalgamation.

□

Démonstration de la proposition 3.2.2.

(1)⇒(2). On raisonne par l'absurde et on applique le lemme 3.2.4.

(2)⇒(3). On peut se borner aux modèles e.c. dénombrables. On raisonne par l'absurde et on applique le théorème 2.2.1.

(3)⇒(4).

D'après le théorème d'omission des types pour les théories inductives, pour chaque $m\in\Sigma_0(T)$ tel que $m=<a_1,...,a_n>$ il existe une formule existentielle $\psi_m(\overline{x})$ telle que $T\vdash\psi_m(\overline{x})\Rightarrow\varphi(\overline{x})$, pour tout $\varphi\in\triangle(\overline{a},m)$. Soit $\Gamma_n(\overline{x})=\{\neg\psi_m(\overline{x})\,|\,|\overline{x}|=n \text{ et } m\in\Sigma_0(T)\}$. Supposons que pour tout $n\in\omega$, il n'existe pas de formule existentielle $\chi(\overline{x})$ telle que $\exists\overline{x}\chi(\overline{x})$ est consistante avec T et $T\vdash\chi(\overline{x})\Rightarrow\varphi(\overline{x})$, pour tout $\varphi\in\Gamma_n(\overline{x})$. Alors d'après le théorème d'omission des types des théories inductives, il existe un modèle $\mathcal{M}$ e.c. de T qui omet chaque $\Gamma_n(\overline{x})$. D'après (3) il existe $m_0\notin\Sigma_0(T)$ et $m_0\subseteq\mathcal{M}$. Soit $m_0=<a_1,...,a_r>$. Comme $\mathcal{M}$ omet Γ_r alors il existe $\neg\psi_l\in\Gamma_r$ tel que $\mathcal{M}\models\psi_l(a_1,...,a_r)$. Comme $T\vdash\psi_m(\overline{x})\Rightarrow\varphi(\overline{x})$, pour tout $\varphi\in\triangle(\overline{a},m_0)$ alors $m_0\cong l$ et $l\in\Sigma_0(T)$ et donc $m_0\in\Sigma_0(T)$. Contradiction.

Donc il existe $n_0\in\omega$ tel qu'il existe une formule existentielle φ consistante avec T telle que $T\vdash\varphi(\overline{x})\Rightarrow\neg\psi_m(\overline{x})$ pour tout $\neg\psi_m\in\Gamma_{n_0}$. Montrons que $\exists\overline{x}(\varphi(\overline{x}))$ n'est vraie dans aucun modèle de $\Sigma_0(T)$. On peut écrire $\varphi(\overline{x})\equiv\exists\overline{y}\vartheta(\overline{x},\overline{y})$. On raisonne par l'absurde; supposons le contraire et soit $m\in\Sigma_0(T)$ telle que $m\models\exists\overline{x}\exists\overline{y}(\vartheta(\overline{x},\overline{y}))$, alors il existe $\overline{a},\overline{b}\in m$ tels que $m\models\vartheta(\overline{a},\overline{b})$. Soit $l=<\overline{a}>$ et $m_0=<\overline{a},\overline{b}>$, alors on a $l,m_0\in\Sigma_0(T)$. Alors il existe $\neg\psi_{m_0}\in\Gamma_{n_0}$telle que $T\vdash\psi_{m_0}(\overline{x},\overline{y})\Rightarrow\varphi(\overline{x},\overline{y})$, pour tout $\varphi\in\triangle(\overline{a}\,\overline{b},m_0)$. Soit $\chi(\overline{x})$ la formule $\exists\overline{y}\psi_{m_0}(\overline{x},\overline{y})$, alors on voit que $T\vdash\chi(\overline{x})\Rightarrow\phi(\overline{x})$, pour tout $\phi\in\triangle(\overline{a},l)$. On voit aussi que $\chi(\overline{x})\wedge\varphi(\overline{x})$ est consistante. Mais $T\vdash\varphi(\overline{x})\Rightarrow\neg\psi_m(\overline{x})$ pour tout $\neg\psi_m\in\Gamma_{n_0}$ et donc $T\vdash\varphi(\overline{x})\Rightarrow\neg\chi(\overline{x})$ car $\neg\chi(\overline{x})\in\Gamma_{n_0}$, d'où une contradiction.

(4)⇒(5).

Soit $\exists\overline{x}\varphi(\overline{x})$ qui vérifie les conditions de (4) avec φ sans quantificateurs. Alors $\varphi(\overline{x})$ est équivalente à une formule de la forme :

$$\bigvee_{i=1,...,n}(V_i(\overline{x})\wedge N_i(\overline{x}))$$

où V_i est une conjonction de formules atomiques et N_i est une conjonction de négations de formules atomiques. Comme $\exists\overline{x}(\varphi(\overline{x}))$ est consistante il existe k tel que $\exists\overline{x}(V_k(\overline{x}) \wedge N_k(\overline{x}))$ est consistante. Soit H la structure de type fini engendrée par $\overline{a}$ et présentée par $V_k(\overline{a})$. Alors on voit que H vérifie $V_k(\overline{a}) \wedge N_k(\overline{a})$, par conséquent H vérifie $\exists\overline{x}(\varphi(\overline{x}))$. Donc $H \notin \Sigma_0(T)$.

Rappelons que la classe $\Sigma_0(T_{gpc})$ est la classe des groupes commutatifs finis (cf. la remarque de la page 28). La théorie des groupes commutatifs satisfait (5) car $\mathbb{Z}$ est un modèle infini de présentation finie. Il est bien connu que tout énoncé existentiel consistant avec la théorie des groupes commutatifs est vrai dans un groupe commutatif fini, par conséquent la théorie des groupes commutatifs ne satisfait pas (4).

□

Remarque. La démonstration montre que **(3)⇒(4)** est vraie dans toute théorie universelle.

Proposition 3.2.5. *Soit T une quasi-variété ayant un modèle universel. Alors T a des modèles finiment expansifs de présentation finie et tout modèle de T ayant (**) se plonge dans un modèle de présentation finie finiment expansif.*

Démonstration. Il suffit d'adapter la démonstration du corollaire 2.3.2.

□

3.3 Les modèles fortement existentiellement clos

Définition. Soient T une théorie et $\mathcal{M}$ un modèle de T. On dit que $\mathcal{M}$ est ***fortement existentiellement clos*** s'il vérifie :

tout ensemble de formules de la forme :

$\{\varphi_1(\overline{x},\overline{a}), ..., \varphi_n(\overline{x},\overline{a}),\ \neg\phi_i(\overline{x},\overline{a})\ ;\ i \in \omega,\ \varphi_i,\ \phi_j$ *des formules atomiques,* $\overline{a} \in \mathcal{M}, |\overline{a}| < \infty, |\overline{x}| < \infty\}$

qui possède une solution dans une extension de $\mathcal{M}$, qui est modèle de T, possède une solution dans $\mathcal{M}$.

Remarque. Il est clair que tout modèle fortement existentiellement clos est existentiellement clos.

Dans tout le reste de ce chapitre le langage $\mathcal{L}$ est dénombrable et on fixe un codage des formules de $\mathcal{L}$. On ne fera pas de distinction entre un ensemble de formules et son ensemble de codes.

Définitions.

(1) Si X est un ensemble de formules, $d(X)$ désignera la classe d'équivalence de X par rapport à la relation $\equiv_e$.

(2) Soit T une théorie dans un langage dénombrable et soit $H \models T$ avec H de type fini ; $H =< a_1, ..., a_n >$. Soit

$$\triangle^+(a_1,...,a_n,H) = \{\psi(x_1,..,x_n) \mid H \models \psi(a_1,..,a_n),\ \psi(x_1,..,x_n)\ atomique\}$$

Soit $d(a_1,...,a_n,H)$ la classe d'équivalence de $\triangle^+(a_1,...,a_n,H)$ par rapport à la relation $\equiv_e$. On verra plus loin (corollaire 3.3.3) que $d(a_1,...,a_n,H)$ ne dépend pas du système générateur de H, donc on le désigne par $d(H)$. Pour une théorie T, on définit $d(T)$ par :

$$d(T)=le\ cardinal\ de\ \{d(H)\mid H \models T,\ H\ \ de\ type\ fini\ \}$$

Exemples.

D'après le théorème 4.12 dans [11], pour tout d_i il existe un groupe de type fini telle que $d(G) = d_i$, par conséquent on voit que $d(T_{gp}) = 2^{\chi_0}$. Il est bien connu que tout groupe commutatif de type fini a un problème des mots résoluble par conséquent on voit que $d(T_{gpc}) = 1$. Cela montre bien la différence de complexité qui existe entre la théorie des groupes et la théorie des groupes commutatifs.

Le but de cette section est la démonstration du théorème suivant :

Théorème 3.3.1.

Soit T une quasi-variété récursivement énumérable dans un langage dénombrable ayant la PP et la PA. Soit $\alpha = d(T)$. Alors il existe au moins α modèles de T, dénombrables, fortement existentiellement clos et ultrahomogènes, deux à deux non isomorphes.

Lemme 3.3.2. *Soit H un modèle de type fini engendré par $a_1,...,a_n$. Soient $b_1,...,b_m \in H$ et $K =< b_1,...,b_m >$. Alors $\triangle^+(b_1,...,b_m,K) \leq_1 \triangle^+(a_1,...,a_n,H)$.*

Démonstration. Soit $W(x_1,...,x_n)$ l'ensemble des formules atomiques écrites en fonction des variables $x_1,...,x_n$. De même soit $W(y_1,...,y_m)$ l'ensemble des formules atomiques écrites en fonction des variables $y_1,...,y_m$. Alors on voit que les ensembles $W(x_1,...,x_n)$ et $W(y_1,...,y_m)$ sont récursivement énumérables. Avec un codage approprié, on peut identifier $W(x_1,...,x_n)$ à ω et $W(y_1,...,y_m)$ à ω d'une manière récursive. Comme $b_1,...b_m \in H$, il existe des termes $t_1,...,t_m$ tels que : $t_1(a_1,..,a_n) = b_1,....,t_m(a_1,...,a_n) = b_m$.

Soit $f : W(y_1,...,y_m) \to W(x_1,...,x_n)$ définie par :

$$f(\psi(y_1,...,y_m)) = \psi(t_1(x_1,..,x_n),....,t_m(x_1,...,x_n))$$

Alors f est injective, car deux formules sont identiques si tous les symboles qui apparaissent sont identiques.

Si $\psi \in \triangle^+(b_1,...,b_m,K)$, alors il est clair que $f(\psi) \in \triangle^+(a_1,...,a_n,H)$, car $K \models \psi(b_1,..,b_m)$ et donc $H \models \psi(b_1,..,b_m)$ et donc $H \models \psi(t_1(a_1,..,a_n),..,t_m(a_1,..,a_n))$.

Si $f(\psi) \in \triangle^+(a_1,...,a_n,H)$, on a $H \models \psi(t_1(a_1,..,a_n),..,t_m(a_1,..,a_n))$ et donc $K \models \psi(b_1,..,b_m)$, car ψ est atomique. Donc $\triangle^+(b_1,...,b_m,K) \leq_1 \triangle^+(a_1,...,a_n,K)$.

□

Corollaire 3.3.3.

Si $H =< a_1, ..., a_n >=< b_1, ..., b_m >$, alors $\triangle^+(b_1, ..., b_m, H) \equiv_1 \triangle^+(a_1, ..., a_n, H)$. Donc on a aussi $\triangle^+(b_1, ..., b_m, H) \equiv_e \triangle^+(a_1, ..., a_n, H)$ (cf. la propriété (7) à la page 30 de cette thèse). Par conséquent cela justifie la définition donnée plus haut.

□

Rappelons un théorème classique de Fraïssé :

Théorème (Fraïssé) [13]. *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et $\mathcal{K}$ une classe dénombrable de $\mathcal{L}$-structures de type fini ayant la PP, la PA et la HP. Alors il existe une unique $\mathcal{L}$-structure dénombrable $\mathcal{D}$ ultrahomogène telle que $\mathcal{A}ge(\mathcal{D}) = \mathcal{K}$. Ce modèle sera appelé* ***la limite de Fraïssé*** *de la classe $\mathcal{K}$.*

Proposition 3.3.4. *Soit T une théorie universelle. Soit K une classe dénombrable de modèles de T de type fini, ayant la PP, la PA et la HP. Supposons en plus que K vérifie :*

(AC) *Pour tout $F \in K$, pour tout système fini δ de formules primitives sans quantificateurs, à paramètres dans F, si δ est satisfaisable dans une extension de F qui est modèle de T, alors δ est satisfaisable dans une extension F' de F, telle que $F' \in K$.*

Alors D, la limite de Fraïssé de la classe K, est un modèle e.c. de T.

Démonstration. Etant donné que T est universelle, il est clair que $D \models T$. Soient $D' \models T$, et $\delta(\overline{a}, \overline{x})$ un ensemble fini de formules primitives sans quantificateurs à paramètres dans D, tels que $D \hookrightarrow D'$ et $D' \models \exists \overline{x}(\delta(\overline{a}, \overline{x}))$. D'après (AC), il existe $F' \in K$ et $\overline{b} \in F'$ tel que $F' \models \delta(\overline{a}, \overline{b})$ et $< \overline{a} > \subseteq F'$. Comme $F' \in K$ et $\mathcal{A}ge(D) = K$ il existe $F'' \subseteq D$ tel que $F' \cong F''$. Donc il existe $\overline{c}, \overline{d} \in D$ tel que : $< \overline{a} > \cong < \overline{c} >$ et $D \models \delta(\overline{c}, \overline{d})$. Comme D est ultrahomogène, on peut compléter la suite $\overline{a}$ par des éléments $\overline{e}$ tels que $D \models \delta(\overline{a}, \overline{e})$.

□

Proposition 3.3.5.

Soit T une quasi-variété récursivement énumérable dans un langage dénombrable, ayant PP et la PA. Soit J un idéal de $(\mathcal{P}(\omega)/\equiv_e, \leq_e)$, et soit $H(J)$ la classe des modèles de type fini K de T tels que $d(K) \in J$.

Alors $H(J)$ satisfait HP, PP, PA et AC.

Lemme 3.3.6. *Soient $K =< a_1, .., a_n >$ un modèle de T et $P(a_1, .., a_n)$ une présentation de K. Alors $\triangle^+(a_1, ..., a_n, K) \leq_e P(a_1, .., a_n)$.*

Démonstration.

On a $\psi(x_1, ..., x_n) \in \triangle^+$ si et seulement si il existe un ensemble fini de formules $\varphi_1, .., \varphi_m$ de $P(a_1, ..., a_n)$ telles que $T \vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m \Longrightarrow \psi$

Comme T est récursivement énumérable alors l'ensemble

$$U = \{(\psi, \{\varphi_1, .., \varphi_m\}) \mid T \vdash \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m \Longrightarrow \psi\}$$

est récursivement énumérable.

Donc

$$\psi(x_1, ..., x_n) \in \triangle^+$$

si et seulement si

il existe $\varphi_1, .., \varphi_m \in P(a_1, ..., a_n)$ telles que $(\psi, \{\varphi_1, .., \varphi_m\}) \in U$.

Donc $\triangle^+(a_1, ..., a_n, K) \leq_e P(a_1, .., a_n)$.

□

Démonstration de la proposition 3.3.5.

(I) $H(J)$ a la HP.

On a si $H =< a_1, ..., a_n >$ et $b_1, ...b_m \in H$, $K =< b_1, ..., b_m >$ alors d'après le lemme 3.3.2, $\triangle^+(b_1, ..., b_m, K) \leq_1 \triangle^+(a_1, ..., a_n, H)$. Donc cela implique $\triangle^+(b_1, ..., b_m, K) \leq_e \triangle^+(a_1, ..., a_n, H)$. Comme J est un idéal on a $K \in H(J)$.

(II) $H(J)$ a la PP.

Soient $H_1, H_2 \in H(J)$ avec $H_1 =< a_1, ..., a_n >$ et $H_2 =< b_1, ..., b_m >$. On a $H_1 * H_2$ est présenté par $\triangle^+(a_1, ..., a_n, H_1) \cup \triangle^+(b_1, ..., b_m, H_2)$, donc d'après le lemme 3.3.6 on a

$$d(H_1 * H_2) \leq_e \triangle^+(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m, H_1 * H_2) \leq_e \triangle^+(a_1, ..., a_n, H_1) \cup \triangle^+(b_1, ..., b_m, H_2)$$

On a aussi

$$\triangle^+(a_1, ..., a_n, H_1) \cup \triangle^+(b_1, ..., b_m, H_2) \leq_e d(H_1) \vee d(H_2)$$

D'où $d(H_1 * H_2) \leq_e d(H_1) \vee d(H_2)$ et comme J est un idéal alors $d(H_1 * H_2) \in J$, donc $H_1 * H_2 \in H(J)$.

(III) $H(J)$ a la PA.

Soient $H_1, H_2 \in H(J)$, avec $A \subseteq H_1$, $B \subseteq H_2$ et $\phi : A \cong B$, A et B de type fini. Le modèle $H_1 *_{A,B} H_2$ est présenté par $\triangle^+(H_1) \cup \triangle^+(H_2) \cup \{a_1 = \phi(a_1), ..., a_n = \phi(a_n)\}$.

Donc d'après le lemme 3.3.6, on a

$\triangle^+(H_1 *_{A,B} H_2) \leq_e \triangle^+(H_1) \cup \triangle^+(H_2) \cup \{a_1 = \phi(a_1), ...a_n = \phi(a_n)\}$

On a $\triangle^+(H_1), \triangle^+(H_2) \in J$, comme J est un idéal alors $\triangle^+(H_1) \vee \triangle^+(H_2) \in J$. Comme $\triangle^+(H_1) \leq_e \triangle^+(H_1) \vee \triangle^+(H_2)$ et $\triangle^+(H_2) \leq_e \triangle^+(H_1) \vee \triangle^+(H_2)$, alors

$$\triangle^+(H_1) \cup \triangle^+(H_2) \leq_e \triangle^+(H_1) \vee \triangle^+(H_2)$$

Comme $\{a_1 = \phi(a_1), ...a_n = \phi(a_n)\}$ est fini, il est récursif, et donc on a

$$\{a_1 = \phi(a_1), ...a_n = \phi(a_n)\} \leq_e X, \text{ pour tout } X \subseteq \omega,$$

donc en particulier $\{a_1 = \phi(a_1), ...a_n = \phi(a_n)\} \leq_e \triangle^+(H_1) \vee \triangle^+(H_2)$.

Donc finalement on a $\triangle^+(H_1) \cup \triangle^+(H_2) \cup \{a_1 = \phi(a_1), ...a_n = \phi(a_n)\} \leq_e \triangle^+(H_1) \vee \triangle^+(H_2)$. Donc on a $d(H_1 *_{A,B} H_2) \leq_e d(H_1) \vee d(H_2)$.

Puisque J est un idéal et $d(H_1) \vee d(H_2) \in J$, alors $d(H_1 *_{A,B} H_2) \in J$, d'où $H_1 *_{A,B} H_2 \in H(J)$.

(IV) $H(J)$ vérifie AC.

Soient $H \in H(J)$ avec $H =< \overline{a} >$ et $\delta(\overline{a}, \overline{x})$ un ensemble fini de formules primitives sans quantificateurs à paramètres dans H, satisfaisable dans une extension de H qui est modèle de T.

Alors le modèle $R =< \overline{a}, \overline{b} \mid \delta^+(\overline{a}, \overline{b}), \triangle^+(\overline{a}, H) >$, satisfait $\delta^-(\overline{a}, \overline{b})$ où $\delta^+(\overline{a}, \overline{b})$ désigne l'ensemble des formules atomiques qui sont dans $\delta(\overline{a}, \overline{x})$ et $\delta^-(\overline{a}, \overline{b})$ désigne l'ensemble des négations des formules atomiques qui sont dans $\delta(\overline{a}, \overline{x})$. On voit aussi que H se plonge dans R.

D'après le lemme 3.3.6 on a $\triangle^+(\overline{a}, \overline{b}, R) \leq_e \delta^+(\overline{a}, \overline{b}) \cup \triangle^+(\overline{a}, H)$.

Comme $\delta^+(\overline{a}, \overline{b}) \cup \triangle^+(\overline{a}, H) \equiv_e \triangle^+(\overline{a}, H)$ car $\delta^+(\overline{a}, \overline{b})$ est fini et comme $d(H) \in J$, et J est un idéal, alors $d(R) \in J$, d'où $R \in H(J)$.

□

Proposition 3.3.6.

Soit J un idéal dénombrable de $(\mathcal{P}(\omega)/\equiv_e, \leq_e)$, tel que $H(J)$ n'est pas vide. Alors il existe un unique modèle D dénombrable de T e.c. et ultrahomogène tel que $\mathcal{A}ge(D) = H(J)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $H(J)$ est dénombrable et d'appliquer la propositions 3.3.5, le théorème de Fraïssé et la proposition 3.3.4. Comme toute classe d'équivalence est dénombrable et J est dénombrable alors $H(J)$ est dénombrable.

□

Démonstration du théorème 3.3.1.

Soit $\gamma = d(T)$ le cardinal de $X = \{d(H) \mid H \models T$ et H de type fini $\}$. Soit $\beta \in X$ et soit J_β l'idéal principal engendré par β. Alors $H(J_\beta)$ n'est pas vide et il est dénombrable donc d'après la proposition 3.3.4 il existe un unique modèle D_β dénombrable de T, e.c. et ultrahomogène tel que $\mathcal{A}ge(D) = H(J_\beta)$. Soient $\alpha, \beta \in X$, tel que $\neg(\alpha \equiv_e \beta)$. Supposons que $D_\alpha \cong D_\beta$, alors $\mathcal{A}ge(D_\alpha) = \mathcal{A}ge(D_\beta)$. Comme il existe H_1 et H_2 tels que $d(H_1) = \alpha$, et $d(H_2) = \beta$, alors $H_1, H_2 \hookrightarrow D_\alpha$ et $H_1, H_2 \hookrightarrow D_\beta$. Donc $\alpha \leq_e \beta$ et $\beta \leq_e \alpha$, doù $\alpha \equiv_e \beta$. Contradiction.

Pour conclure il suffit de montrer que D_β est fortement existentiellement clos. Soit M tel que $D_\beta \subseteq M$ et M vérifie un système de la forme

(S) $\{\varphi_1(\overline{x}, \overline{a}), ..., \varphi_n(\overline{x}, \overline{a}), \neg\phi_i(\overline{x}, \overline{a})\,;\, i \in \omega$, φ_i, ϕ_j des formules atomiques, $\overline{a} \in D_\beta$,$|\overline{x}| < \infty\}$

où $\overline{a}$ est un uplet fini de D_β. Il existe $\overline{d}$ dans M qui vérifie le système (S). Soit $A =< \overline{a} >$ la structure engendrée par $\overline{a}$. Donc M vérifie le système :

(S*) $T \cup \{\varphi_1(\overline{d}, \overline{a}), ..., \varphi_n(\overline{d}, \overline{a}),\ \neg\phi_i(\overline{d}, \overline{a})\ ;\ i \in \omega\ \} \cup \{\varphi(\overline{a}) \mid \varphi \in \triangle(\overline{a}, A)\}$

Comme $< \overline{a} > \subseteq D_\beta$, alors $d(A) \leq \beta$, d'où :

$$d(\{\varphi_1(\overline{d}, \overline{a}), ..., \varphi_n(\overline{d}, \overline{a})\} \cup \{\varphi(\overline{a}) \mid \varphi \in \triangle^+(\overline{a}, A)\}\ ) \leq \beta$$

Soit K le modèle de T présenté par $\{\varphi_1(\overline{b}, \overline{c}), ..., \varphi_n(\overline{b}, \overline{c})\} \cup \{\varphi(\overline{c}) \mid \varphi \in \triangle^+(\overline{a}, A)\}$.

Alors $K \subseteq D_\beta$. Comme (S*) est consistant alors $< \overline{a} > \cong < \overline{b} >$ et K vérifie :

(S**) $T \cup \{\varphi_1(\overline{b}, \overline{c}), ..., \varphi_n(\overline{b}, \overline{c}),\ \neg\phi_i(\overline{b}, \overline{c})\ \} \cup \{\varphi(\overline{c}) \mid \varphi \in \triangle(\overline{a}, A)\}$

Comme D_β est ultrahomogène on peut compléter la suite $\overline{a}$ par des éléments $\overline{f}$ de telle sorte qu'on ait :

$$\{\varphi_1(\overline{a},\overline{f}),....,\varphi_n(\overline{a},\overline{f}),\ \neg\phi_i(\overline{a},\overline{f})\ \}$$

D'où (S) possède une solution dans D_β.

□

Nous nous proposons maintenant de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.3.7. *Soit T une quasi-variété ayant la PP et la PA dans un langage dénombrable. Soit F un modèle de T de type fini. Alors on a : F se plonge dans un modèle de présentation finie de T si et seulement si F se plonge dans tous les modèles fortement existentiellement clos et ultrahomogènes de T.*

On aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 3.3.8. *Soit T une quasi-variété dans un langage dénombrable ayant la PP et la PA. Soit $\mathcal{K}$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de tous les modèles de type fini de T qui se plongent dans un modèle de présentation finie de T. Alors $\mathcal{K}$ est dénombrable et vérifie HP, PP, PA, AC.*

Démonstration.

(I) $\mathcal{K}$ est dénombrable.

L'ensemble des sous-structures de type fini d'un modèle de type fini est dénombrable. Donc K est dénombrable.

(II) $\mathcal{K}$ vérifie par définition HP.

(III) $\mathcal{K}$ vérifie PP.

Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{K}$, alors il existe $H_1, H_2 \in \mathcal{K}$ de présentation finie tels que $A_1 \hookrightarrow H_1$ et $A_2 \hookrightarrow H_2$. Comme T a la PP alors $H_1 \hookrightarrow H_1 * H_2$ et de même $H_2 \hookrightarrow H_1 * H_2$ et $H_1 * H_2$ est de présentation finie. Donc finalement on a $A_1 \hookrightarrow H_1 * H_2$ et $A_2 \hookrightarrow H_1 * H_2$.

(IV) $\mathcal{K}$ vérifie PA.

La démonstration est analogue à la précédente.

(V) $\mathcal{K}$ vérifie AC.

Soient $F \in \mathcal{K}$ et $\delta(\overline{a},\overline{x})$ un ensemble fini de formules atomiques et de négations de formules atomiques à paramètres dans F, possédant une solution dans une extension F_1 de F qui est modèle de T. Comme $F \in \mathcal{K}$ alors F se plonge dans un modèle de présentation finie H de T. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F & \rightarrow & H \\ \downarrow & & \\ F_1 & & \end{array}$$

et appliquons la propriété d'amalgamation. Nous sommes ramener à prouver que si H est un modèle de T et de présentation finie $< \overline{a}, \overline{b} \mid w(\overline{a}, \overline{b}) >$ et si $\delta(\overline{a}, \overline{z})$ est un ensemble fini de formules atomiques et de négations de formules atomiques :

$$\{\varphi_1(\overline{a}, \overline{z}), ..., \varphi_n(\overline{a}, \overline{z}),\ \neg\phi_1(\overline{a}, \overline{z}), ...,\ \neg\phi_m(\overline{a}, \overline{z})\,;\ \varphi_i,\ \phi_j \text{ des formules atomiques}\}$$

à paramètres dans H satisfaisable dans une extension K de H, qui est un modèle de T, alors $\delta(\overline{a}, \overline{z})$ est satisfaisable dans une extension H_1 de H, de présentation finie, qui est modèle de T.

On obtient H_1 en prenant le modèle de présentation finie $< \overline{c}, \overline{d}, \overline{g} \mid w(\overline{c}, \overline{d}), \varphi_1(\overline{c}, \overline{g}), ..., \varphi_n(\overline{c}, \overline{g}) >$.

Comme $H_1 \models w(\overline{c}, \overline{d})$, il existe un homomorphisme $\pi : H \to H_1$ tels que $\pi(a_i) = c_i$ et $\pi(b_i) = d_i$.

Comme $\delta(\overline{a}, \overline{z})$ est satisfait dans K et comme le plongement de H dans K se factorise à travers H_1, on voit (c'est essentiellement l'adaptation à notre contexte de la remarque de la page 14) que π est un plongement et que l'on a $H_1 \models \delta(\overline{c}, \overline{g})$.

□

Démonstration du Théorème 3.3.7.

Soit M un modèle de type fini de T qui se plonge dans un modèle de présentation finie de T. Alors il est clair qu'il se plonge dans tous les modèles fortement e.c. de T.

Montrons la réciproque.

Montrons qu'il existe un modèle D dénombrable de T vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $D \models T$ et D ultrahomogène.

(2) Si $F \subseteq D$, avec F de type fini alors $F \subseteq P \subseteq D$, avec P de présentation finie.

Soit K la classe de représentants des classes d'isomorphisme de tous les modèles de type fini de T qui se plongent dans un modèle de présentation finie de T. Alors d'après la proposition 3.3.8, K est dénombrable et vérifie HP, PP, PA et AC. D'après la proposition 3.3.4 il existe D modèle de T ultrahomogène et e.c. tel que $\mathcal{A}ge(D) = K$. Montrons donc la propriété (2).

Soit $F =< \overline{a} > \subseteq D$, avec F de type fini, alors $F \hookrightarrow H$ avec H de présentation finie et $H \in K$. Donc il existe $H' \cong H$ tel que $H' \subseteq D$. Comme D est ultrahomogène alors, il existe $H'' \subseteq D$ et $F \subseteq H''$ et $H'' \cong H'$. Donc H'' et aussi de présentation finie.

Montrons maintenant que D est fortement existentiellement clos.

Soit M tel que $D \subseteq M$ et M vérifie un système de la forme

(S) $\{\varphi_1(\overline{x}, \overline{a}), ..., \varphi_n(\overline{x}, \overline{a}),\ \neg\phi_i(\overline{x}, \overline{a})\,;\ i \in \omega,\ \varphi_i,\ \phi_j$ *des formules atomiques,* $\overline{a} \in D, |\overline{x}| < \infty\}$

Où $\overline{a}$ est un uplet fini de paramètres de D.

D'après la propriété (2) la sous-structure$< \overline{a} >$ se plonge dans un modèle de T de présentation finie $P =< \overline{a}, \overline{b} \mid W(\overline{a}, \overline{b}) >$. Il existe $\overline{d}$ dans M, qui vérifie le système (S). Donc M vérifie le système :

(S*) $\{\varphi_1(\overline{d}, \overline{a}), ..., \varphi_n(\overline{d}, \overline{a}),\ \neg\phi_i(\overline{d}, \overline{a})\ W(\overline{a}, \overline{b}) \mid i \in \omega,\ \varphi_i,\ \phi_j$ *des formules atomiques,* $\overline{a} \in D\ \}$

Il existe un modèle H de T de présentation finie $\{\varphi_1(\overline{c}, \overline{\alpha}), ..., \varphi_n(\overline{c}, \overline{a}), W(\overline{\alpha}, \overline{e})\ \}$. Montrons que $< \overline{a} > \hookrightarrow H$, par l'application $\overline{a} \to \overline{\alpha}$. Soit χ une formule atomique telle que $< \overline{a} > \models \chi(\overline{a})$, alors $\chi(\overline{a})$ est une conséquence de $W(\overline{a}, \overline{b})$. Comme $H \models W(\overline{\alpha}, \overline{e})$, alors $H \models \chi(\overline{\alpha})$. Donc $\overline{a} \to \overline{\alpha}$

est un homomorphisme. Soit χ atomique telle que $< \overline{a} > \models \neg\chi(\overline{a})$, alors (S*)$\wedge\neg\chi(\overline{a})$ est consistant donc $\{\varphi_1(\overline{c},\overline{\alpha}),....,\varphi_n(\overline{c},\overline{a}),W(\overline{\alpha},\overline{e})\ \}\wedge\neg\chi(\overline{a})$ est aussi consistant d'où $H \models \neg\chi(\overline{\alpha})$. On a aussi que H vérifie le système (S) (en remplaçant $\overline{a}$ par $\overline{\alpha}$).

Comme H est de présentation finie, alors $H \hookrightarrow D$. Donc il existe $H' \cong H$ tel que $H' \subseteq D$. Comme $< \overline{a} > \cong < \overline{\alpha} >$ et D ultrahomogène, il existe $H'' \subseteq D$ et $< \overline{a} > \subseteq H''$ et $H'' \cong H'$. Comme H'' vérifie (S), alors D vérifie aussi (S).

Si M est un modèle de type fini qui se plonge dans tous les modèles fortement e.c. et ultrahomogène de T alors il se plonge dans D et par conséquent il se plonge dans un modèle de présentation finie de T.

□

3.4 Les modèles d-fortement existentiellement clos.

Dans cette section on s'intéresse à une généralisation des modèles fortement existentiellement clos.

Définition. *Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T. On dit que $\mathcal{M}$ est d-fortement existentiellement clos* si *tout ensemble de formules de la forme*

$$\{\varphi_i(\overline{x},\overline{a}),\ \neg\phi_i(\overline{x},\overline{a})\ ;\ i \in \omega,\ \varphi_i\ ,\ \phi_j \text{ des formules atomiques, } \overline{a} \in \mathcal{M}\ ,|\overline{a}| < \infty,\ |\overline{x}| < \infty\}$$

avec $d(\{\varphi_i(\overline{x},\overline{a}) : i \in \omega\}) \leq_e d$, qui possède une solution dans une extension de $\mathcal{M}$, qui est modèle de T, possède une solution dans $\mathcal{M}$.

On suppose qu'il existe au moins un modèle de type fini H de T tel que $d(H) \leq d$.
Alors on a :

Théorème 3.4.1.
Soit T une quasi-variété récursivement énumérable dans un langage dénombrable, ayant la PP et la PA. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de type fini de T alors on a : $d(\mathcal{M}) \leq_e d$ si et seulement si $\mathcal{M}$ se plonge dans tous les modèles d-fortement existentiellement clos de T.

Démonstration.
Si $d(\mathcal{M}) \leq_e d$ alors il est clair que $\mathcal{M}$ se plonge dans tous les modèles d-fortement existentiellement clos de T car T a la PP.

Supposons que $\mathcal{M}$ se plonge dans tous les modèles d-fortement existentiellement clos de T. Soit J_d l'idéal principal engendré par d. Alors d'après la définition précédente $H(J_d)$ n'est pas vide. Par conséquent d'après la proposition 3.3.6 il existe un modèle D dénombrable e.c. et ultrahomogène tel que $\mathcal{A}ge(D) = H(J_d)$.

Montrons que D est d-fortement existentiellement clos. La démonstration est presque identique à celle du théorème 3.3.1. Soit $\mathcal{N}$ tel que $D \subseteq \mathcal{N}$ et $\mathcal{N}$ possède une solution d'un système de la forme

$$\text{(S) } \{\varphi_i(\overline{x},\overline{a})\ \neg\phi_i(\overline{x},\overline{a})\,;\, i\in\omega,\ \varphi_i,\ \phi_j \text{ des formules atomiques, } \overline{a}\in D, |\overline{x}|<\infty\}$$

avec $d(\{\varphi_i(\overline{x},\overline{a}) : i\in\omega\}) \leq_e d$ et $\overline{a}$ est un uplet fini de D. Il existe $\overline{d}$ dans $\mathcal{N}$ qui vérifie le système (S). Soit $A =< \overline{a} >$ la structure engendrée par $\overline{a}$. Donc $\mathcal{N}$ vérifie le système :

$$\text{(S*) } T\cup\{\varphi_i(\overline{d},\overline{a}),\ \neg\phi_i(\overline{d},\overline{a})\ ;\ i\in\omega\ \}\cup\{\varphi(\overline{a})\,|\varphi\in\triangle(\overline{a},A)\,\}$$

Comme $< \overline{a} >\subseteq D$, alors $d(A)\leq d$ et comme $d(\{\varphi_i(\overline{x},\overline{a}) : i\in\omega\}) \leq_e d$, *alors*

$$d(\{\varphi_i(\overline{d},\overline{a}) : i\in\omega\}\cup\{\varphi(\overline{a})\,|\varphi\in\triangle^+(\overline{a},A)\,\})\leq_e d$$

Soit K le modèle de T présenté par $\{\varphi_i(\overline{b},\overline{c}) : i\in\omega\}\cup\{\varphi(\overline{c})\,|\varphi\in\triangle^+(\overline{a},A)\,\}$. Alors $K\subseteq D$. Comme (S*) est consistant alors $< \overline{a} >\cong< \overline{c} >$ et K vérifie :

$$\text{(S**) } T\cup\{\varphi_i(\overline{b},\overline{c}),\ \neg\phi_i(\overline{b},\overline{c})\ ;\ i\in\omega\ \}\cup\{\varphi(\overline{c})\,|\varphi\in\triangle(\overline{a},A)\,\}$$

Comme D est ultrahomogène on peut compléter la suite $\overline{a}$ par des éléments $\overline{f}$ de telle sorte qu'on ait :

$$\{\varphi_i(\overline{f},\overline{a}),\ \neg\phi_i(\overline{f},\overline{a})\,;\, i\in\omega\ \}\cup\{\varphi(\overline{a})\,|\varphi\in\triangle(\overline{a},A)\,\}$$

D'où (S) possède une solution dans D.

Comme $\mathcal{M}$ se plonge dans tous les modèles d-fortement e.c., alors $\mathcal{M}$ se plonge dans D et par conséquent $d(\mathcal{M})\leq_e d$.

□

3.5 Les groupes fortement existentiellement clos

Nous revenons maintenant sur les groupes fortement e.c. Donnons tout de suite le résultat annoncé dans l'introduction de ce chapitre. La combinaison du théorème de plongement de Higman et du théorème 3.3.7 donne :

Proposition 3.5.1. *Soit G un groupe de type fini, alors on a :*

G est récursivement présenté si et seulement si il se plonge dans tous les groupes fortement e.c.

Démonstration Les groupes e.c. sont ultrahomogènes.

□

Définition. Soient G et H deux groupes de type fini avec $G\leq H$. On dit que H est ***finiment présenté*** au-dessus de G si H possède une présentation qui peut s'obtenir en ajoutant un nombre fini de relations à celle de G.

Proposition 3.5.2. *Soit G un groupe, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *G est fortement e.c.*

(2) *G est d-fortement e.c. où d désigne la classe des ensembles récursivement énumérable par rapport à la relation $\equiv_e$.*

(3) *Tout diagramme de la forme :*

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & P \\ \downarrow & & \\ G & & \end{array}$$

avec A de type fini, P finiment présenté au-dessus de G, et les flèches désignent des plongements, peut être complété de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & P \\ \downarrow & \swarrow & \\ G & & \end{array}$$

où la nouvelle flèche désigne aussi un plongement.

Démonstration.

(1)⇒(2). Soit G un groupe fortement e.c. Soit $\overline{a}$ une suite finie d'éléments de G. Soit (S) un système de la forme

$$\{\varphi_i(\overline{x},\overline{a}),\ \neg\phi_j(\overline{x},\overline{a})\ ;\ i,j\in\omega\ ,\ \varphi_i\ ,\ \phi_j\ \textit{des formules atomique},\ |\overline{x}|<\infty\},$$

avec $\{\varphi_i(\overline{x},\overline{a}) : i\in\omega\}$ récursivement énumérable, ayant une solution dans une extension de G. Soit $A =< \overline{a} >$. Soit R le groupe engendré par $\overline{b}$, $\overline{d}$ et de présentation

$$\{\varphi_i(\overline{d},\overline{b})\ \mid\ i\in\omega\ \}\cup\big\{\varphi(\overline{b})\mid\varphi\in\triangle^+(\overline{a},A)\big\}$$

Comme le système suivant

$$\{\varphi_i(\overline{d},\overline{b})\ ,\ \neg\phi_j(\overline{d},\overline{b})|\ i,j\in\omega\ \}\cup\big\{\varphi(\overline{b})\mid\varphi\in\triangle(\overline{a},A)\big\}$$

est consistant alors l'homomorphisme f canonique de A dans $B =< \overline{b} >$, qui vérifie $f(a_i) = b_i$, est un plongement et $R\models\neg\phi_j(\overline{d},\overline{b})$, pour tout $j\in\omega$.

On va utiliser la version générale du théorème de plongement de Higman. (voir [11] p. 71 ou [21] p. 145).

Comme $\{\varphi_i(\overline{x},\overline{a}) : i\in\omega\}$ est récursivement énumérable, d'après ce théorème R est un sous-groupe d'une groupe F de type fini engendré par $\overline{b}$, $\overline{d}$, $\overline{g}$ et ayant une présentation de la forme

$$\big\{\upsilon_i(\overline{d},\overline{b},\overline{g})\mid i=1,...,n\big\}\cup\big\{\varphi(\overline{b})\mid\varphi\in\triangle(\overline{a},A)\big\}$$

Soit $M = G *_{A,B} F$. Alors on voit que $M\models\upsilon_i(\overline{d},\overline{a},\overline{g})$, $i=1,...,n$, et $M\models\neg\phi_j(\overline{d},\overline{a})$ pour tout $j\in\omega$.

Comme G est fortement e.c., il existe dans G des suites d'éléments $\overline{h}$, $\overline{k}$ telles que G vérifie

$$\big\{\upsilon_i(\overline{h},\overline{a},\overline{k})\mid i=1,...,n\big\}\cup\big\{\neg\phi_j(\overline{h},\overline{a})\mid j\in\omega\big\}$$

Comme

$$T_{gp} \cup \{v_i(\overline{d}, \overline{b}, \overline{g}) \mid i = 1, ..., n\} \cup \{\varphi(\overline{b}) \mid \varphi \in \triangle(\overline{a}, A)\} \vdash \varphi_i(\overline{d}, \overline{b}), \text{ pour tout } i \in \omega$$

alors $G \models \varphi_i(\overline{h}, \overline{a})$ et par conséquent le système (S) a une solution dans G.

(2)⇒(1) : il n'y a rien à démontrer.

(1)⇒(3). Soient A un groupe de type fini et P un groupe finiment présenté au-dessus de G tels que

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & P \\ \downarrow & & \\ G & & \end{array}$$

Posons $A =< \overline{a} >$ et $P =< \overline{a}, \overline{b} \mid \{\varphi(\overline{a}) \mid \varphi \in \triangle^+(\overline{a}, A)\} \cup W(\overline{a}, \overline{b}) >$ où $W(\overline{a}, \overline{b})$ est un ensemble fini de relations. Soit $M = G *_A P$. Alors M vérifie le système

$$W(\overline{a}, \overline{b}) \cup \{v(\overline{a}, \overline{b}) \neq e \mid v(\overline{a}, \overline{b}) \neq e \in \triangle^-(\overline{a}\widehat{\ }\overline{b}, P)\}$$

Comme G est fortement e.c., alors G a une suite finie d'éléments $\overline{d}$ telle que G vérifie

$$W(\overline{a}, \overline{d}) \cup \{v(\overline{a}, \overline{d}) \neq e \mid v(\overline{a}, \overline{d}) \neq e \in \triangle^-(\overline{a}\widehat{\ }\overline{b}, P)\}$$

Par conséquent il existe un plongement canonique f de P dans $< \overline{a}, \overline{d} >$ tel que $f(a_i) = a_i$.

(3)⇒(1). La démonstration est simple et est laissée au lecteur.

□

3.6 Remarques

(1) La proposition 3.2.2 suggère le problème suivant :

Problème. *La classe des groupes de type fini ayant un problème des mots résoluble a-t-elle la propriété d'amalgamation ?*

L'exemple suivant montre qu'il faut se restreindre au cas où le sous-groupe amalgamé est de type fini : soient $< a, b \mid >$ et $< c, d \mid >$ deux copies du groupe libre $\mathbb{F}_2$. Soient X, Y deux ensembles récursivement énumérables et créatifs (pour la définition voir [11]). Soit A le sous-groupe engendré par $\{a^{-i}ba^i, a^{-j}b^2a^j \mid i \in X, j \in Y\}$ dans $< a, b \mid >$ et soit B le sous-groupe engendré par $\{c^{-i}dc^i, c^{-j}dc^j \mid i \in X, j \in Y\}$ dans $< c, d \mid >$. Alors on voit que les ensembles précédents sont des bases de groupe libre. Soit $K =< a, b \mid > *_{A,B} < c, d \mid >$. S'il existe un groupe qui amalgame $< a, b \mid >$ et $< c, d \mid >$ au-dessus de A et B ayant un problème des mots résoluble, alors il existerait un sous-groupe normal N de K tel que K/N ait un problème des mots résoluble et tel que $N \cap < a, b >= N \cap < c, d >= \{e\}$. Soit $R = \{k \mid a^{-k}ba^k = c^{-k}dc^k \ \ dans\ K/N\}$. Alors on voit que $X \subseteq R$. Soit $l \in Y \cap R$, alors on a :

$$a^{-l}ba^l = c^{-l}dc^l$$
$$a^{-l}b^2a^l = c^{-l}dc^l$$

dans K/N. Il en résulte que b appartient à N, ce qui est une contradiction. D'où $Y \cap R = \emptyset$.

Comme K/N a un problème des mots résoluble il est clair que R est récursif. Mais cela contredit le fait que X, Y sont créatifs.

Par conséquent tout quotient de K a un problème des mots non résoluble.

(2) Dans [5], O.Belegradek a posé le problème suivant : *si $\mathcal{V}$ est une variété de groupes telle que tous ses groupes qui ont (*) sont fini, est-il vrai que tout groupe finiment présenté dans $\mathcal{V}$ est résiduellement fini ?*

Observons, à ce sujet, le fait suivant : *tout groupe finiment présenté dans $\mathcal{V}$ est résiduellement fini si et seulement si $\mathcal{V}$ possède un groupe $\mathcal{V}$-e.c. localement fini.* (μ).

On peut démontrer cette propriété en utilisant le corollaire 2.4 dans [16] et le fait que tout modèle générique dans ce cas est e.c.

On a la proposition plus générale suivante :

Proposition 3.6.1. *Soit T une théorie universelle ayant la PP dans un langage dénombrable. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Tout énoncé existentiel consistant avec T est vrai dans un modèle de $\Sigma_0(T)$.*

(2) *T a un modèle e.c. tel que toutes ses sous-structures de type fini sont dans $\Sigma_0(T)$.*

Démonstration.

(1)⇒(2). Cela découle de la remarque qui suit la démonstration de la proposition 3.2.2.

(2)⇒(1). Cela découle de ce que T a la PP.

□

La propriété (μ) découle de la proposition 3.6.1 de la façon suivante : si tout groupe finiment présenté dans $\mathcal{V}$ est résiduellement fini alors tout énoncé existentiel consistant avec $\mathcal{V}$ est vrai dans un groupe fini de $\mathcal{V}$. Par conséquent les groupes de type fini de $\mathcal{V}$ qui se plongent dans tous les groupes $\mathcal{V}$-e.c. sont finis. Comme $\mathcal{V}$ est close par produit cartésien $\mathcal{V}$ a la PP et par conséquent les groupes finis de $\mathcal{V}$ se plongent dans tous les groupes $\mathcal{V}$-e.c. Il en résulte que la classe des groupes de type fini de $\mathcal{V}$ qui se plongent dans tous les groupes $\mathcal{V}$-e.c. est la classe des groupes finis de $\mathcal{V}$. D'où d'après la proposition 3.6.1 il existe un groupe $\mathcal{V}$-e.c. localement fini.

Si $\mathcal{V}$ possède un groupe $\mathcal{V}$-e.c. localement fini G, comme $\mathcal{V}$ a la PP, alors tout énoncé existentiel consistant avec $\mathcal{V}$ est vrai dans G et donc tout énoncé existentiel consistant avec $\mathcal{V}$ est vrai dans un groupe fini de $\mathcal{V}$.

Chapitre 4

Les propriétés de la classe $\sum(T_{gp})$.

Ce chapitre contient 4 sections. Dans la première section nous étudions les groupes de type fini ayant un problème des mots résoluble et nous donnons quelques nouvelles propriétés. La seconde section est consacrée à l'étude des groupes qui se plongent dans tous les groupes e.c., en fait on étudie une classe plus générale définie plus bas et les groupes e.c. de cette classe. Nous donnons quelques propriétés des modèles e.c. de cette classe et montrons qu'ils sont simples et ressemblent aux groupes e.c. habituels.

Quelques propriétés des groupes ayant $\mathcal{P}$ sont données dans la section 3. Dans la section 4 nous étudions les groupes ayant $\mathcal{P}$ relativement à la théorie des groupes commutatifs. Nous caractérisons simplement ces groupes.

Dans ce chapitre théorie signifie théorie de groupes dans le langage des groupes.

4.1 Les groupes de type fini

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.1.1. *Soit G un groupe de type fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *G a un problème des mots résoluble.*

(2) *G se plonge dans tous les groupes e.c.*

(3) *G a la propriété (*).*

(4) *G a la propriété (**).*

(5) *Il existe une formule ψ (pas nécessairement existentielle) consistante avec la théorie des groupes telle que G se plonge dans tout groupe qui vérifie ψ.*

(6) *Il existe un groupe de présentation finie H SQ-universel[1] et ayant un problème des mots résoluble tel que G se plonge dans tout quotient non trivial de H.*

(7) *Il existe un groupe dénombrable K récursivement présenté tel que G se plonge dans tout quotient non trivial de K.*

(8) *Il existe un groupe de présentation finie H vérifiant les propriétés suivantes :*

[1] Rappelons qu'un groupe G est dit SQ-universel si tout groupe dénombrable se plonge dans un quotient de G.

il existe un plongement $\varphi : G \hookrightarrow H$, une suite finie $(\alpha_i)_{i=1,...,n}$, $\alpha_i \neq e$, d'éléments de H vérifiant : pour tout groupe X pour tout homomorphisme $\phi : H \to X$, s'il existe $a \in G$, $a \neq e$, tel que $\phi\varphi(a)=e$, alors il existe i_0 tel que $\phi(\alpha_{i_0}) = e$.

(9) *Il existe un groupe de présentation finie H vérifiant les propriétés suivantes :*

il existe un plongement $\varphi : G \hookrightarrow H$, une suite $(\alpha_i)_{i\in\omega}$ récursivement énumérable, $\alpha_i \neq e$, d'éléments de H vérifiant : pour tout groupe X, pour tout homomorphisme $\phi : H \to X$, s'il existe $a \in G$, $a \neq e$ tel que $\phi\varphi(a)=e$, alors il existe i_0 tel que $\phi(\alpha_{i_0}) = e$.

Bien sûr l'équivalence (1) $\iff$ (2) n'est rien d'autre que le théorème de Neumann-Macintyre.

Pour commencer nous allons étudier la satisfaction des théories existentielles dans les groupes de présentation finie. Les résultats obtenus sont intrinsèquement intéressants et seront utilisés pour établir que la condition (1) entraîne la condition (6).

4.1.1 Satisfaction des théories existentielles dans les groupes de présentation finie

On démontre facilement, et nous avons déjà utilisé le fait, vrai dans toutes les quasi-variété, que pour toute formule existentielle consistante ψ il existe un groupe de présentation finie H tel que ψ est vraie dans H. Dans le cas des groupes on a un résultat plus fort :

Théorème 4.1.1.1. *Pour toute théorie existentielle Γ consistante et récursivement énumérable il existe un groupe de présentation finie H, SQ-universel, tel que Γ est vraie dans tout quotient non trivial de H.*

La démonstration se base sur les 8 lemmes suivants :

Lemme 4.1.1.2. *Pour tout groupe G et pour toute suite d'éléments α_i, $i = 1, ..., n$ de G et tout élément g de G, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) $G \models \bigwedge_{i=1,...,n} \alpha_i = e \Longrightarrow g = e)$.

(2) *Les équations $t_i^{-1}\alpha_i t_i z_i^{-1}\alpha_i z_i = g$ sont résolubles dans une extension de G.*

Démonstration.

(1)⇒(2). Par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le lemme n'est rien d'autre que le lemme 1.5 page 4, du livre de Higman-Scott *Existentially closed groups* [11].

Pour $n + 1$, les équations $t_i^{-1}\alpha_i t_i z_i^{-1}\alpha_i z_i = g$, $i = 1, ..., n$, sont résoluble dans une extension G_n de G. Le groupe G_n vérifie aussi $(\alpha_{n+1} = e \Longrightarrow g = e)$, donc d'après le cas $n = 1$ l'équation $t_{n+1}^{-1}\alpha_{n+1}t_{n+1}z_{n+1}^{-1}\alpha_{n+1}z_{n+1} = g$ est résoluble dans une extension de G_n donc de G.

(2)⇒(1). Evidente.

□

Lemme 4.1.1.3. *Soit* Γ *une théorie existentielle consistante et récursivement énumérable. Alors il existe une théorie* Γ^* ***récursivement énumérable*** *consistante et existentielle primitive telle que* $T_{gp} \cup \{\Gamma^*\} \vdash \Gamma$.

Démonstration.

Soit $\Gamma = \{\psi_i \mid i \in \omega\}$. Il est clair qu'on peut déterminer de manière effective une forme normale disjonctive de ψ_i. Comme Γ est r.e, l'ensemble $\Gamma_0 = \left\{\psi_i^0 \mid i \in \omega\right\}$ est aussi r.e, où ψ_i^0 est une forme normale disjonctive de ψ_i. On a aussi $T_{gp} \vdash \Gamma_0 \Longleftrightarrow \Gamma$.

L'idée de la démonstration sera claire à travers un exemple simple. Supposons que ψ est de la forme :

$$(w_1(\overline{x}) = e \wedge v_1(\overline{x}) \neq e) \bigvee (w_2(\overline{y}) = e \wedge v_2(\overline{y}) \neq e)$$

Où w_i et v_i sont des mots. On introduit des nouvelles variables t_1, z_1, y_1 et t_2, z_2, y_2 et on considère la formule ψ^*

$$(w_1(\overline{x}) = e \wedge t_1^{-1} v_1 t_1 z_1^{-1} v_1 z_1 = y_1) \wedge (w_2(\overline{y}) = e \wedge t_2^{-1} v_2 t_2 z_2^{-1} v_2 z_2 = y_2) \wedge (y_1 . y_2 \neq e)$$

Alors on voit que ψ^* est primitive. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que ψ^* est consistante et que $T_{gp} \vdash \psi^* \Rightarrow \psi$.

Revenons au cas général.

On peut écrire ψ_i^0 comme suit :

$$\psi_i^0 = \bigvee_{j=1,\ldots,n_i} \exists \overline{x_{i,j}} [\bigwedge_{w \in W_j^i} w(\overline{x_{i,j}}) = e \wedge \bigwedge_{k=1,\ldots,p_{ij}} v_{i,j,k}(\overline{x_{i,j}}) \neq e]$$

On peut supposer sans perte de généralité que $\overline{x_{i,j}} \cap \overline{x_{i,l}} = \emptyset$, pour $j \neq l$ et $j, l \in \{1, ..., n_i\}$.

S'il existe j tel que le morceau $\bigwedge_{k=1,\ldots,p_{ij}} v_{i,j,k}(\overline{x_{i,j}}) \neq e$ ne figure pas alors on pose $\psi_i^* = \exists x (x = x)$.

Sinon soient

$$(y_{i,j}\ , j = 1, ..., n_i),$$

$$(t_{i,j,k}\ , j = 1, ..., n_i\ , k = 1, ..., p_{ij}),$$

$$(z_{i,j,k}\ , j = 1, ..., n_i\ , k = 1, ..., p_{ij})$$

des suites de nouvelles variables. Soit :

$$\varphi_{i,j}(\overline{x_{i,j}}) = [\bigwedge_{w \in W_j^i} w(\overline{x_{i,j}}) = e \wedge \bigwedge_{k=1,,\ldots,p_{ij}} t_{i,j,k}^{-1} v_{i,j,k} t_{i,j,k} z_{i,j,k}^{-1} v_{i,j,k} z_{i,j,k} = y_{i,j}]$$

Et soit :

$$\psi_i^* = \exists_{j=1,\ldots,n_i} \overline{x_{i,j}} \exists_{j=1,\ldots,n_i; k=1,\ldots,p_{ij}} t_{i,j,k} \exists_{j=1,\ldots,n_i; k=1,\ldots,p_{ij}} z_{i,j,k} [\bigwedge_{j=1,\ldots,n_i} \varphi_{i,j}(\overline{x_{i,j}}) \bigwedge y_{i,1} ... y_{i,n_i} \neq e]$$

Alors ψ_i^* est existentielle primitive. Comme Γ_0 est r.e, alors la théorie $\Gamma^* = \{\psi_i^* \mid i \in \omega\}$ est aussi r.e. Il suffit de montrer que Γ^* est consistante et que $T_{gp} \vdash \psi_i^* \Rightarrow \psi_i^0$. Comme T_{gp} a la PP, pour montrer que Γ^* est consistante il suffit de montrer que pour tout i, ψ_i est consistante.

Comme ψ_i^0 est consistante il existe un groupe $G \models \psi_i^0$. Par conséquent il existe j_0 et $\overline{a} \in G$ tels que :

$$G \models \bigwedge_{w \in W_{j_0}^i} w(\overline{a}) = e \wedge \bigwedge_{k=1,\dots,p_{ij_0}} v_{i,j_0,k}(\overline{a}) \neq e$$

Soit $g \in G$ tel que $g \neq e$. D'après le lemme 4.1.1.2, il existe une extension H de G telle que :

$$H \models \bigwedge_{k=1,p_{ij_0}} t_{i,j_0,k}^{-1} v_{i,j_0,k}(\overline{a}) t_{i,j_0,k} z_{i,j_0,k}^{-1} v_{i,j_0,k}(\overline{a}) z_{i,j_0,k} = g$$

Donc on a :

$$H \models \varphi_{i,j_0}(\overline{a})$$

Si on pose : $\overline{x_{i,j_0}} = \overline{a}$, $y_{i,j_0} = g$, et $\overline{x_{i,j}} = t_{i,j,k} = z_{i,j,k} = y_{i,j} = e$ pour $j \neq j_0$, alors on voit que $H \models \psi_i^*$.

Montrons maintenant que $T_{gp} \vdash \psi_i^* \Rightarrow \psi_i^0$. Soit $G \models \psi_i^*$. Donc il existe $y_{i,j_0} \in G$ tel que $y_{i,j_0} \neq e$ et aussi $\overline{x_{i,j_0}} \in G$ tel que $G \models \bigwedge_{w \in W_{j_0}^i} w(\overline{x_{i,j_0}}) = e$. D'après le lemme 4.1.1.2, on a finalement :

$$G \models \bigwedge_{w \in W_{j_0}^i} w(\overline{x_{i,j_0}}) = e \wedge \bigwedge_{k=1,\dots,p_{ij_0}} v_{i,j_0,k}(\overline{x_{i,j_0}}) \neq e$$

Donc $G \models \psi_i^0$.

□

Lemme 4.1.1.4. *Soit Γ une théorie existentielle primitive consistante et récursivement énumérable. Alors il existe une formule existentielle ψ consistante telle que $T_{gp} \cup \{\psi\} \vdash \Gamma$.*

Démonstration. Soit $\Gamma = \{\psi_i \mid i \in \omega\}$. On peut écrire ψ_i comme suit :

$$\psi_i = \exists \overline{x_i} [\bigwedge_{w \in W_i} w(\overline{x_i}) = e \wedge \bigwedge_{k=1,\dots,p_i} v_{i,k}(\overline{x_i}) \neq e]$$

On peut supposer sans perte de généralité que $\overline{x_i} \cap \overline{x_j} = \emptyset$, pour $j \neq i$.

Soient y, $(t_{i,k} \ , k = 1, ..., p_i)$, $(z_{i,k} \ , k = 1, ..., p_i)$ des suites de nouvelles variables. Soit :

$$\varphi_i(\overline{x_i}, y, t_{i,1}, ..., t_{i,p_i}, z_{i,1}, ..., z_{i,p_i}) = [\bigwedge_{w \in W_i} w(\overline{x_i}) = e \wedge \bigwedge_{k=1,\dots,p_i} t_{i,k}^{-1} v_{i,k} t_{i,k} z_{i,k}^{-1} v_{i,k} z_{i,k} = y]$$

Et soit :

$$P = \{\varphi_i(\overline{x_i}, y, t_{i,1}, ..., t_{i,p_i}, z_{i,1}, ..., z_{i,p_i}) \mid i \in \omega\}$$

Comme Γ est r.e, alors P est r.e . Il est clair que $P \wedge y \neq e$ est consistante. Soit G le groupe présenté par P. D'après le théorème de Higman G se plonge dans un groupe H de présentation finie $V(\overline{a})$. Donc $y \in H$, donc soit $y = w_0(\overline{a})$. Soit $\psi = \exists \overline{x}(V(\overline{x}) \wedge w_0(\overline{x}) \neq e)$, alors il est clair que $T_{gp} \cup \{\psi\} \vdash \Gamma$.

□

Lemme 4.1.1.5. (*Voir par exemple Combinatorial group theory* [17])

Soient G_1, G_2 deux groupes, $A \leq G_1$, $B \leq G_2$, avec $\phi : A \cong B$. Si les conditions suivantes, sont satisfaites :

(1) *G_1 et G_2 ont un problème des mots résoluble.*

(2) *A (resp. B) a un problème généralisé des mots résoluble dans G_1(resp. G_2) .*

(3) *ϕ et ϕ^{-1} sont calculables.*

Alors le groupe $G_1 *_{A,B} G_2$ a un problème des mots résoluble.

Les démonstrations des deux lemmes qui suivent sont semblables. Le lecteur pressé pourra aller directement au lemme 4.1.1.7.

Lemme 4.1.1.6. *Soit $\mathbb{F}_2$ le groupe libre de rang 2 et de base $\{b, c\}$. Soit C le groupe engendré par : b, $c^{-1}b^{-1}cbc$, $c^{-2}b^{-1}cbc^2$, $c^{-3}bc^3$, $c^{-(3+i)}bc^{(3+i)}$, $i \in \mathbb{N}^*$.*

Alors C est libre sur les générateurs indiqués et C a un problème généralisé des mots résoluble dans $\mathbb{F}_2$.

Démonstration.

Posons $X = \left\{b,\ c^{-1}b^{-1}cbc,\ c^{-2}b^{-1}cbc^2,\ c^{-3}bc^3,\ c^{-(3+i)}bc^{(3+i)},\ i \in \mathbb{N}^*\right\}$. Pour chaque $x \in \mathbb{F}_2$, soit $|x|$ la longueur de x par rapport à la base $\{b, c\}$ (la longueur de la suite réduite qui représente x). On dit d'une suite $(x_1, ..., x_n)$ de $X \cup X^{-1}$ qu'elle est X-réduite si elle vérifie $x_i x_{i+1} \neq e$, $x_i \neq e$. Alors on voit que X vérifie : si (x_1, x_2) est X-réduite alors $|x_1 x_2| > |x_1|, |x_2|$. Cela implique, en utilisant les résultats de [18], que si $(x_1, ..., x_n)$ est X-réduite, alors $|x_1...x_n| \geq |x_i|$ et $|x_1...x_n| = \sum_{i=1,n} |x_i| - 2\sum_{i=1,n-1} d(x_i, x_{i+1}^{-1})$, où $d(x, y) = \frac{1}{2}(|x| + |y| - |xy^{-1}|)$. D'où finalement on a les propriétés :

$$|x_1...x_n| \geq |x_i|, \qquad |x_1...x_n| \geq n$$

Par conséquent si $(x_1, ..., x_n)$ est une suite X-réduite, alors $x_1...x_n \neq e$. Donc C est libre de base X.

On a : si $w \in < X >$, alors il existe une suite X-réduite $(x_1, ..., x_n)$ telle que $w = x_1...x_n$ et avec $n \leq |w|$ et $|x_i| \leq |w|$. On voit que la fonction $w \mapsto |w|$ est calculable et que l'ensemble $\left\{x \in X \cup X^{-1} \mid |x| \leq |w|\right\}$ est fini. Par conséquent pour savoir si $w \in < X >$ ou non, on calcule $|w|$ et toutes les suites $(x_1, ..., x_n)$ X-réduites qui vérifient $|x_i| \leq |w|$ et $n \leq |w|$ et on regarde s'il en existe une telle que son produit est égal à w. S'il y en a une alors $w \in < X >$, sinon $w \notin < X >$.

□

Lemme 4.1.1.7. *Soit K un groupe dénombrable engendré par $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$. Supposons que K a un problème des mots résoluble par rapport au système $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$. Soit $\mathbb{F}_2$ le groupe libre de rang 2 et de base $\{a, b\}$. Soit $M = K * \mathbb{F}_2$ et soit $w \in K$ non trivial. Considérons le groupe A engendré par b , $a^{-1}ba$, $a^{-2}b^{-1}aba^2$, $a^{-3}[w, b]a^3$, $a^{-(3+i)}x_i ba^{(3+i)}$ $i \in \mathbb{N}^*$.*

Alors A est libre sur les générateurs indiqués et A a un problème généralisé des mots résoluble dans M.

Démonstration.

La démonstration est presque identique à celle du lemme précédent.

Posons $X = \left\{b,\ a^{-1}ba,\ a^{-2}b^{-1}aba^2,\ a^{-3}[w,b]a^3,\ a^{-(3+i)}x_iba^{(3+i)}\ \ i \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Pour chaque $x \in M$, soit $|x|$ la longueur de x par rapport à la structure du produit libre de M (la longueur de la suite réduite qui représente x). On dit d'une suite $(x_1, ..., x_n)$ de $X \cup X^{-1}$ qu'elle est X-réduite si elle vérifie $x_ix_{i+1} \neq e$, $x_i \neq e$. Alors, comme dans le lemme précédent, il n'est pas très difficile de voir que X vérifie : si (x_1, x_2) est X-réduite alors $|x_1x_2| > |x_1|, |x_2|$. Cela implique, en utilisant toujours les résultats de [18], que si $(x_1, ..., x_n)$ est $X-$réduite, alors $|x_1...x_n| \geq |x_i|$ et $|x_1...x_n| = \sum_{i=1,n} |x_i| - 2\sum_{i=1,n-1} d(x_i, x_{i+1}^{-1})$, où $d(x, y) = \frac{1}{2}(|x| + |y| - \left|xy^{-1}\right|)$. D'où finalement on a les propriétés principales suivantes :

$$|x_1...x_n| \geq |x_i|, \qquad |x_1...x_n| \geq n$$

Par conséquent si $(x_1, ..., x_n)$ est une suite X-réduite, alors $x_1...x_n \neq e$. Donc A est libre de base X.

On a : si $w \in < X >$, alors il existe une suite X-réduite $(x_1, ..., x_n)$ telle que $w = x_1...x_n$ et avec $n \leq |w|$ et $|x_i| \leq |w|$. On voit que la fonction $w \mapsto |w|$ est calculable car M a un problème des mots résoluble, et que l'ensemble $\left\{x \in X \cup X^{-1} \mid |x| \leq |w|\right\}$ est fini. Par conséquent pour savoir si $w \in < X >$ ou non, on calcule $|w|$ et toutes les suites $(x_1, ..., x_n)$ X-réduites qui vérifient $|x_i| \leq |w|$ et $n \leq |w|$ et on regarde s'il en existe une telle que son produit est égale à w (cela est possible aussi car M a un problème des mots résoluble). S'il y en a une alors $w \in < X >$, sinon $w \notin < X >$.

□

On trouve, pour l'essentiel, le lemme suivant dans C.F.Miller III *Decision problems for groups-survey and reflections* [23] (Main Technical Lemma). On le redémontre ici car les propriétés (3) et (5) ne sont pas explicites dans [24].

Lemme 4.1.1.8. *Soit K un groupe dénombrable avec $K = < x_1, x_2, ... \mid R_1 = e, R_2 = e, ... >$. Pour tout mot w écrit en fonction des générateurs $x_1, x_2, ...$ le groupe $L(K, w)$ qui a comme système de générateurs $x_1, x_2, ...; a, b, c$ et comme présentation la présentation de K et les relations :*

$$a^{-1}ba = c^{-1}b^{-1}cbc$$

$$a^{-2}b^{-1}aba^2 = c^{-2}b^{-1}cbc^2$$

$$a^{-3}[w,b]a^3 = c^{-3}bc^3$$

$$a^{-(3+i)}x_iba^{(3+i)} = c^{-(3+i)}bc^{(3+i)},\ \ i = 1, 2, ...$$

vérifie les propriétés suivantes :

(1) *Si $K \models w \neq e$ alors K se plonge dans $L(K, w)$ par $x_i \longrightarrow x_i$.*

(2) *La clôture normale de w dans $L(K, w)$ est tout $L(K, w)$; en particulier si $L(K, w) \models w = e$ alors $L(K, w) \cong 1$.*

(3) *Si $K \models w \neq e$ alors : soit B un sous-groupe distingué de K tel que $w \notin B$, et soit $N(B)$ le sous-groupe distingué engendré par B dans $L(K,w)$, alors on a $L(K/B,w) \cong L(K,w)/N(B)$.*

(4) *$L(K,w)$ est engendré par b, ca^{-1}.*

(5) *Si K a un problème des mots résoluble par rapport au système de générateur $x_1, x_2, ...$ alors $L(K,w)$ a un problème des mots résoluble.*

Démonstration.

Soit $\mathbb{F}_2$ le groupe libre de base $\{b,c\}$. Soit C le groupe engendré par : b, $c^{-1}b^{-1}cbc$, $c^{-2}b^{-1}cbc^2$, $c^{-3}bc^3$, $c^{-(3+i)}bc^{(3+i)}$, $i = 1, 2, ..$

D'après le lemme 4.1.1.6, C est un groupe libre ayant comme base l'ensemble des générateurs précédents.

D'une manière similaire, dans le produit libre $K* < a, b |>$, considérons le groupe A engendré par b , $a^{-1}ba$, $a^{-2}b^{-1}aba^2$, $a^{-3}[w,b]a^3$, $a^{-(3+i)}x_iba^{(3+i)}$ $i = 1, 2, ...$

Comme $w \neq e$, d'après le lemme 4.1.1.7 A est libre ayant comme base l'ensemble des générateurs précédents.

Par conséquent la présentation exhibée dans le lemme n'est rien d'autre que la présentation du produit amalgamé : $(K* < a, b |> *_{A=C} < b, c |>)$. Donc si $K \models w \neq e$ alors K se plonge dans $L(K,w)$ par $x_i \longrightarrow x_i$. Cela prouve l'assertion (1).

Soit N_w la clôture normale de w dans $L(K,w)$. On a $[w,b] \in N_w$, donc par la relation $a^{-3}[w,b]a^3 = c^{-3}bc^3$, on a $b \in N_w$. Les relations $a^{-1}ba = c^{-1}b^{-1}cbc$, $a^{-2}b^{-1}aba^2 = c^{-2}b^{-1}cbc^2$, nous montrent que $a, c \in N_w$. Finalement les relations $a^{-(3+i)}x_iba^{(3+i)} = c^{-(3+i)}bc^{(3+i)}$, $i = 1, 2, ...$, nous montrent que $x_i \in N_w$. Donc $N_w = L(K,w)$. Cela prouve l'assertion (2).

Soit B un sous-groupe distingué de K tel que $w \notin B$. Alors $L(K,w)/N(B)$ a comme présentation la présentation de $L(K,w)$ union l'ensemble $\{b = e \mid b \in B\}$, qui est une présentation du groupe $L(K/B,w)$. Donc $L(K/B,w) \cong L(K,w)/N(B)$. Cela prouve l'assertion (3).

Soit M le sous-groupe engendré par b, ca^{-1}. La relation $a^{-1}ba = c^{-1}b^{-1}cbc$ peut être écrite sous la forme $b(ca^{-1})b(ca^{-1})^{-1}b^{-1} = c$ donc $c \in M$. Comme $ca^{-1} \in M$, on déduit $a \in M$. Comme les x_i s'écrivent en fonction de a, b, c on voit que $M = L(K,w)$. Cela prouve l'assertion (4).

Si K a un problème des mots résoluble par rapport au système de générateur $x_1, x_2, ...$ alors d'après le lemme 4.1.1.7, A a un problème généralisé des mots résoluble dans $K* < a, b| >$. D'après le lemme 4.1.1.6, C a un problème généralisé des mots résoluble dans $\mathbb{F}_2$. D'où d'après le lemme 4.1.1.5, $L(K,w)$ a un problème des mots résoluble. Cela prouve l'assertion (5).

□

Lemme 4.1.1.9. *Pour toute formule existentielle ψ consistante il existe un groupe de présentation finie H, SQ-universel, tel que ψ est vraie dans tout quotient non trivial de H. Si ψ est vraie dans un groupe ayant un problème des mots résoluble alors on peut choisir H ayant un problème des mots résoluble.*

Démonstration.

Soit ψ une formule existentielle consistante. On peut supposer sans perte de généralité que ψ est primitive. Posons $\psi \equiv \bigwedge_{i=1,...,m} p_i(x_1,...,x_n) = e \wedge \bigwedge_{i=1,...,r} \alpha_i(x_1,...,x_n) \neq e$.

Soit $M =< x_1,...,x_n \mid p_i(x_1,...,x_n) = e, i = 1,...,m >$. Soit $w_0 \in M$ non trivial. On a $M \models \bigwedge_{i=1,...,r} \alpha_i(x_1,...,x_n) \neq e$. D'après le lemme 4.1.1.2, les équations $t_i^{-1}\alpha_i t_i z_i^{-1}\alpha_i z_i = w_0$ sont résolubles dans une extension de M. Soit M_0 le groupe qui a comme générateurs $x_1,...,x_n, t_i, z_i$, $i = 1,...,r$ et comme présentation :

$$p_i(x_1,...,x_n) = e,\ i = 1,...,m, \quad t_j^{-1}\alpha_j t_j z_j^{-1}\alpha_j z_j = w_0, \quad j = 1,...,r$$

Il est clair que M se plonge dans M_0 et par conséquent $M_0 \models \psi$. Soit $K = M_0 \times \mathbb{F}_2$ où $\mathbb{F}_2$ est le groupe libre de rang 2.

On applique la construction du lemme 4.1.1.8 au groupe K qui est de type fini et on obtient un groupe $L(K, w_0)$ de présentation finie dans lequel K se plonge. La clôture normale de w_0 dans $L(K, w_0)$ est tout $L(K, w_0)$. Montrons que $L(K, w_0)$ vérifie la propriété voulue. Soit N un sous-groupe distingué propre de $L(K, w_0)$. On a $w_0 \notin N$, par conséquent $\alpha_i \neq e$, $i = 1,...,r$. Donc $L(K, w_0)/N \models \psi$. Montrons maintenant que $L(K, w_0)$ est SQ-universel. Soit G un groupe dénombrable, comme $\mathbb{F}_2$ est SQ-universel, alors il existe un groupe distingué B de $\mathbb{F}_2$ tel que G se plonge dans $\mathbb{F}_2/B$. On voit que $w_0 \notin B$, et que B est distingué dans K. D'après le lemme 4.1.1.8, on a $L(K/B, w_0) \cong L(K, w_0)/N(B)$. Comme K/B se plonge dans $L(K/B, w_0)$ et comme $K/B = M_0 \times (\mathbb{F}_2/B)$, le groupe G se plonge dans $L(K/B, w_0)$ et donc G se plonge dans un quotient de $L(K, w_0)$.

Si ψ est vraie dans un groupe ayant un problème des mots résoluble G, alors d'après le théorème de Boone-Higman $G \hookrightarrow S \hookrightarrow H$, avec S simple et H de présentation finie. Soit $W(\overline{x})$ une présentation finie de H et $\alpha(\overline{x}) \in S$ avec $\alpha(\overline{x}) \neq e$.

Alors on voit que $T_{gp} \vdash \exists \bar{x}(W(\overline{x}) \wedge \alpha(\overline{x}) \neq e) \Rightarrow \psi$. Soit $K = H \times \mathbb{F}_2$. De la même façon on voit que $L(K, \alpha(\overline{x}))$ vérifie les propriétés voulues et d'après le lemme 4.1.1.8 $L(K, \alpha(\overline{x}))$ a un problème des mots résoluble.

□

Démonstration du Théorème 4.1.1.1.

Soit Γ une théorie existentielle consistante et récursivement énumérable. D'après le lemme 4.1.1.3, il existe une théorie Γ^* consistante et existentielle primitive et récursivement énumérable telle que $T_{gp} \cup \{\Gamma^*\} \vdash \Gamma$. D'après le lemme 4.1.1.4, il existe une formule existentielle ψ consistante telle que $T_{gp} \cup \{\psi\} \vdash \Gamma^*$, par conséquent $T_{gp} \cup \{\psi\} \vdash \Gamma$. D'après le lemme 4.1.1.9, il existe un groupe de présentation finie H, SQ-universel, tel que ψ est vraie dans tout quotient non trivial de H. Par conséquent Γ est vraie dans tout quotient non trivial de H.

□

Démonstration du Théorème 4.1.1. Le schéma de la démonstration est le suivant :

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (1) \Rightarrow (8) \Rightarrow (9) \Rightarrow (1)$$

(1)⇒(2). (Théorème de Neumann)

(2)⇒(3). Découle du théorème 3.2.1.

(3)⇒(4). Evidente.

(4)⇒(5). Evidente.

(5)⇒(1). Soit $\Gamma = T_{gp} \cup \{\psi\}$. Posons $G =< a_1, .., a_n >$, alors tout modèle dénombrable de Γ réalise $\triangle(a_1, .., a_n, G)$.

D'après le théorème classique d'omission des types, il existe une formule $\chi(x_1, .., x_n)$ telle que $\Gamma \cup \{\exists x_1, .., x_n \chi(x_1, ..., x_n)\}$ est consistante et $\Gamma \models \chi(x_1, .., x_n) \Rightarrow \varphi(x_1, ..., x_n)$, pour tout $\varphi \in \triangle(a_1, .., a_n, G)$. Donc $\Gamma \cup \{\chi(c_1, ..., c_n\} \vdash \varphi(c_1, ..., c_n)$ ou $\Gamma \cup \{\chi(c_1, ..., c_n\} \vdash \neg\varphi(c_1, ..., c_n)$, pour tout $\varphi \in \triangle^+(a_1, .., a_n, G)$. Comme $\Gamma \cup \{\chi(c_1, ..., c_n\}$ est une théorie récursive, alors $\triangle(a_1, .., a_n, G)$ est récursif. Donc G a un problème des mots résoluble.

(1)⇒(6). Avec la même méthode que celle utilisée à la fin de la démonstration du lemme 4.1.1.9, il existe une formule existentielle φ vraie dans un groupe ayant un problème des mots résoluble telle que G se plonge dans tout groupe qui vérifie φ. D'après le lemme 4.1.1.9, il existe un groupe de présentation finie SQ-universel ayant un problème des mots résoluble tel que φ est vraie dans tout quotient non trivial de H. Par conséquent G se plonge dans tout quotient non trivial de H.

(6)⇒(7). Evidente.

(7)⇒(1). Posons $G =< a_1, .., a_n >$. Soit $P(x_i \mid i \in \omega)$ une présentation récursivement énumérable de K avec $x_1 \neq e$. Alors on voit que G se plonge dans tout modèle dénombrable de la théorie $\Gamma = T \cup \{P(x_i \mid i \in \omega)\} \cup \{x_1 \neq e\}$. Par conséquent d'après le théorème d'omission des types classique il existe une formule $\chi(x_1, .., x_n)$ telle que $\Gamma \cup \{\exists x_1, .., x_n \chi(x_1, ..., x_n)\}$ est consistante et $\Gamma \models \chi(x_1, .., x_n) \Rightarrow \varphi(x_1, ..., x_n)$, pour tout $\varphi \in \triangle(a_1, .., a_n, G)$. Donc

$$\Gamma \cup \{\chi(c_1, ..., c_n\} \vdash \varphi(c_1, ..., c_n) \text{ ou } \Gamma \cup \{\chi(c_1, ..., c_n\} \vdash \neg\varphi(c_1, ..., c_n), \text{ pour tout } \varphi \in \triangle^+(a_1, .., a_n, G)$$

Comme $\Gamma \cup \{\chi(c_1, ..., c_n)\}$ est une théorie récursivement énumérable, alors $\triangle(a_1, .., a_n, G)$ est récursif. Par conséquent G a un problème des mots résoluble.

(1)⇒(8). On a (1) ⇒ (2), par conséquent d'après le théorème 3.2.1, on a (1)⇒(8).

(8)⇒(9). Evidente.

(9)⇒(1). Soit $H =< \overline{a} \mid w(\overline{a}) >$, on peut supposer sans perte de généralité que $G \subseteq H$. Soit $\alpha_i = w_i(\overline{a})$ et supposons que $G =< b_1, ..., b_n >$ avec $b_i = t_i(\overline{a})$. Il suffit alors de montrer que l'ensemble des mots $s(v_1, ..., v_n)$ tels que $s(b_1, ..., b_n)$ est distinct de e dans G est récursivement énumérable. Or $s(b_1, ..., b_n) \neq e$ dans G si et seulement si dans le groupe finiment présenté obtenu en adjoignant à la présentation de H la relation $s(t_1(\overline{a}), ..., t_n(\overline{a})) = e$ l'un des $w_i(\overline{a})$ vaut e.

□

Remarque. Le théorème 4.1.1 reste vrai si on supprime de la condition (6) les mots " SQ-universel" et " ayant un problème des mots résoluble".

4.1.2 Remarques

(I) On ne peut pas supprimer la condition "Γ *est récursivement énumérable* " dans le théorème 4.1.1.1. En effet, soit Γ l'ensemble des formules existentielles consistantes. Supposons qu'il existe un groupe H de présentation finie $W(\overline{a})$, $\overline{a} = (a_1, ..., a_n)$, tel que Γ est vraie dans tout quotient non trivial de H. Alors la formule $\psi = \exists\overline{a}(W(\overline{a}) \wedge (a_1 \neq e \vee ... \vee a_n \neq e))$ vérifie $T_{gp} \cup \{\psi\} \vdash \Gamma$, par conséquent Γ serait récursivement énumérable et cela contredit la proposition 1.3.2.

(II) Dans [14], B.M.Hurley a démontré le théorème suivant : *soit G un groupe de type fini récursivement présenté, alors G a un problème des mots résoluble si et seulement si il existe un groupe de présentation finie H tel que G se plonge dans tout quotient simple non trivial de H.*

En lisant la démonstration on découvre que B.M.Hurley a démontré les deux propriétés suivantes

(i) Si G a un problème des mots résoluble alors il existe un groupe de présentation finie H tel que G se plonge dans tout quotient non trivial de H.

(ii) Si $G =< \overline{a} >$ et s'il existe un groupe de présentation finie H tel que G se plonge dans tout quotient simple non trivial de H, alors $\triangle^-(\overline{a}, G)$ est récursivement énumérable où $\triangle^-(\overline{a}, G)$ est l'ensemble $\{w(x_1, ..., x_n) \mid G \models w(a_1, ..., a_n) \neq e\}$.

Pour démontrer la propriété *(i),* Hurley utilise la théorie des petites simplifications. (Small Cancellation Theory).

Nous avons obtenu une autre démonstration de cette propriété. (cf. la remarque à la fin de la démonstration du théorème 4.1.1). Aussi, on a pu ajouter à la conclusion que le groupe de présentation finie en question a un problème des mots résoluble.

B.M.Hurley a posé le problème suivant : *peut-on enlever l'hypothèse que G soit récursivement présenté du théorème précédent ?*

Nous présentons dans ce qui suit un résultat qui est proche de la thématique précédente.

Proposition 4.1.2.1. *Soit G un groupe de type fini engendré par $\overline{a}$. Si $\triangle^-(\overline{a}, G)$ est récursivement énumérable alors il existe un groupe de présentation finie H vérifiant :*

(1) *G se plonge dans un quotient de H.*

(2) *Pour tout sous-groupe N distingué de H, il existe un sous-groupe $< b_1, ..., b_n > \subseteq H/N$, et un homomorphisme surjectif $\varphi :< b_1, ..., b_n > \longrightarrow G$.*

On va utiliser le théorème suivant :

Théorème de M.Ziegler [13][30]. *Soit $\Phi(\overline{x})$ un ensemble récursivement énumérable de formules sans quantificateurs et de Horn. Alors il existe une formule existentielle positive primitive $\psi(\overline{x})$ telle que $\Phi(\overline{x})$ est équivalente à Res_ψ modulo la théorie des groupes.*

Où :

(1) Res_ψ est l'ensemble des formules universelles $\varphi(\overline{x})$ telle que $T_{gp} \vdash \psi(\overline{x}) \Rightarrow \varphi(\overline{x})$.

(2) Une formule sans quantificateurs $\varphi(\overline{x})$ est dite de Horn si elle est équivalente à une formule de la forme $((\bigwedge_{i=1,...,n} \tau_i(\overline{x})) \Rightarrow \upsilon(\overline{x}))$ où $\tau_i(\overline{x}), \upsilon(\overline{x})$ sont des formules atomiques.

(3) Une formule existentielle $\psi(\overline{x})$ est dite positive primitive si elle est de la forme $\exists\overline{y}\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ où $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ est une conjonction de formules atomiques.

Lemme 4.1.2.2.

Soit G un groupe de type fini engendré par $\overline{a}$ et tel que $\triangle^-(\overline{a}, G)$ est récursivement énumérable. Alors il existe une formule $\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1})$ existentielle positive primitive vérifiant les deux conditions suivantes :

(1) *$T_{gp} \vdash (\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \wedge x_{n+1} \neq e \Rightarrow w(x_1, ..., x_n) \neq e)$ pour tout $w \in \triangle^-(\overline{a}, G)$.*

(2) *$\{\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \wedge x_{n+1} \neq e\} \cup \{w(x_1, ..., x_n) = e \mid w \in \triangle^+(\overline{a}, G)\}$ est consistante.*

Démonstration. Soit x_{n+1} une nouvelle variable et considérons l'ensemble suivant :

$$\Phi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = \{(w(x_1, ..., x_n) = e \Rightarrow x_{n+1} = e) \mid w \in \triangle^-(\overline{a}, G)\}$$

Etant donné que $\triangle^-(\overline{a}, G)$ est récursivement énumérable, Φ est aussi récursivement énumérable. Comme Φ est un ensemble de formules sans quantificateurs et de Horn, on peut appliquer le théorème de Ziegler, par conséquent il existe une formule $\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1})$ existentielle positive primitive telle que $\Phi(x_1, ..., x_n, x_{n+1})$ est équivalente à Res_ψ modulo la théorie des groupes.

Montrons d'abord que $\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \wedge x_{n+1} \neq e$ est consistante. Supposons le contraire. Alors $T_{gp} \vdash (\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \Rightarrow x_{n+1} = e)$. Donc la formule $(x_{n+1} = e) \in Res_\psi$. Soit $g \in G$ tel que $g \neq e$, alors G vérifie $\Phi(a_1, ..., a_n, g)$ car $G \models w(a_1, ..., a_n) \neq e$ pour tout $w \in \triangle^-(\overline{a}, G)$. Comme Φ est équivalente à Res_ψ, alors G vérifie Res_ψ.

Comme $(x_{n+1} = e) \in Res_\psi$, alors $G \models g = e$, contradiction.

Il est clair que

$$T_{gp} \vdash (\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \wedge x_{n+1} \neq e \Rightarrow w(x_1, ..., x_n) \neq e), \text{ pour tout } w \in \triangle^-(\overline{a}, G)$$

D'où la condition (1).

Montrons maintenant la condition (2).

De la même façon supposons que l'ensemble

$$\{\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \wedge x_{n+1} \neq e\} \cup \{w(x_1, ..., x_n) = e \mid w \in \triangle^+(\overline{a}, G)\}$$

n'est pas consistant.

Donc il existe $w_0, ..., w_m \in \triangle^+(\overline{a}, G)$, tels que

$$T_{gp} \vdash (\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \wedge x_{n+1} \neq e \Rightarrow \bigvee_i w_i(x_1, ..., x_n) \neq e).$$

Par conséquent $T_{gp} \vdash (\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \Rightarrow [\bigwedge_i w_i(x_1, ..., x_n) = e \Rightarrow x_{n+1} = e])$.

Donc la formule $[\bigwedge_i w_i(x_1, ..., x_n) = e \Rightarrow x_{n+1} = e]$ appartient à Res_ψ. De la même manière soit $g \in G$ tel que $g \neq e$, alors G vérifie $\Phi(a_1, ..., a_n, g)$ et comme Φ est équivalente à Res_ψ, alors G vérifie Res_ψ.

Comme $[\bigwedge_i w_i(x_1, ..., x_n) = e \Rightarrow x_{n+1} = e] \in Res_\psi$, alors $G \models [\bigwedge_i w_i(a_1, ..., a_n) = e \Rightarrow g = e]$, contradiction. D'où (2).

□

Démonstration de la proposition 4.1.2.1. Soit $\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1})$ la formule trouvée dans le lemme précédent. Comme ψ est existentielle positive primitive on peut écrire

$$\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = \exists y_1, ..., \exists y_m V(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, y_1, ..., y_m)$$

où V est une conjonction de formules atomiques.

Soit $K =< c_1, ..., c_n, c_{n+1}, d_1, ..., d_m >$ le groupe présenté par V.

Comme $\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \wedge x_{n+1} \neq e$ est consistante alors $K \models \psi(c_1, ..., c_n, c_{n+1}) \wedge c_{n+1} \neq e$.

Par conséquent $K \models w(c_1, ..., c_n) \neq e$, pour tout $w \in \triangle^-(\overline{a}, G)$.

Soit L le sous-groupe distingué engendré par $\{\ w(c_1, ..., c_n) \mid w(x_1, ..., x_n) \in \triangle^+(G)\ \}$. D'après la condition (2) du lemme 4.1.2.2 l'ensemble :

$$\{\psi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \wedge x_{n+1} \neq e\} \cup \{w(x_1, ..., x_n) = e \mid w \in \triangle^+(\overline{a}, G)\}$$

est consistant. Donc $L \neq K$ et $K/L \models \psi(\overline{c}_1, ..., \overline{c}_n, \overline{c}_{n+1}) \wedge \overline{c}_{n+1} \neq e$, où $\overline{c_i}$ désigne la classe de c_i. Par conséquent $K/L \models w(\overline{c}_1, ..., \overline{c}_n) \neq e$, pour tout $w \in \triangle^-(\overline{a}, G)$. Comme pour tout $w(x_1, ..., x_n) \in \triangle^+(\overline{a}, G)$, $w(c_1, ..., c_n) \in L$, alors $K/L \models w(\overline{c}_1, ..., \overline{c}_n) = e$, donc on a finalement $< \overline{c}_1, ..., \overline{c}_n > \cong G$.

D'après un théorème classique de P.Hall, tout groupe dénombrable se plonge dans un groupe de type fini simple S. Donc soit S un groupe simple de type fini tel que $(K/L) \hookrightarrow S$.

Ecrivons $S =< c_1, c_2, ..., c_n, c_{n+1}, d_1, ..., d_m, g_1, ..., g_l >$, avec $< c_1, ..., c_n > \cong G$ et

$$< c_1, c_2, ..., c_n, c_{n+1}, d_1, ..., d_m > \cong (K/L)$$

Soit $(\beta_i(\overline{c}, \overline{d}, \overline{g}))_{i\in\omega}$ une présentation de S. Comme S est simple on a :

$$T_{gp} \models [\bigwedge_{i\in\omega} \beta_i(\overline{c}, \overline{d}, \overline{g}) = e \wedge (\bigvee_{i=1,...,n+1} c_i \neq e \vee \bigvee_{i=1,...,m} d_i \neq e \vee \bigvee_{i=1,...,l} g_i \neq e))$$

$$\Longrightarrow \psi(c_1, ..., c_n, c_{n+1}) \wedge c_{n+1} \neq e]$$

D'après le théorème de compacité il existe $r \in \omega$ tel que :

$$T_{gp} \models [\bigwedge_{i=1,r} \beta_i(\overline{c}, \overline{d}, \overline{g}) = e \wedge (\bigvee_{i=1,...,n+1} c_i \neq e \vee \bigvee_{i=1,...,m} d_i \neq e \vee \bigvee_{i=1,...,l} g_i \neq e))$$

$$\Longrightarrow \psi(c_1, ..., c_n, c_{n+1}) \wedge c_{n+1} \neq e]$$

Finalement soit H le groupe présenté par $\bigwedge_{i=1,...,r} \beta_i(\overline{c}, \overline{d}, \overline{g}) = e$. H vérifie les propriétés énoncées.

En effet soit M un sous-groupe distingué de H tel que (H/M) est non trivial. On a :

$$H/M \models \bigwedge_{i=1,..,r} \beta_i(\widehat{c}, \widehat{d}, \widehat{g}) = e \wedge (\bigvee_{i=1,...,n+1} \overline{c_i} \neq e \vee \bigvee_{i=1,...,m} \overline{d_i} \neq e \vee \bigvee_{i=1,...,l} \overline{g_i} \neq e))$$

avec la notation : $\overline{\alpha}$ désigne une classe d'équivalence et $\widehat{\alpha}$ désigne un uplet de classes d'équivalences.

On a donc $H/M \models \psi(\overline{c}_1, ..., \overline{c}_n, \overline{c}_{n+1}) \wedge \overline{c}_{n+1} \neq e$, par conséquent pour tout $w \in \triangle^-(\overline{a}, G)$, $H/M \models w(\overline{c}_1, ..., \overline{c}_n) \neq e$.

□

(III) Nous donnons ici la première démonstration que nous avons trouvée de la propriété suivante : *pour toute formule existentielle consistante ψ il existe un groupe de présentation finie H telle que ψ est vraie dans tout quotient non trivial de H.*

Démonstration. Il existe un groupe dénombrable G qui vérifie ψ. D'après le théorème de P.Hall, tout groupe dénombrable se plonge dans un groupe de type fini simple S. Par conséquent S vérifie ψ. Ecrivons $S =< a_1, ..., a_n \mid (\beta_i(\overline{a}))_{i\in\omega} >$ où $(\beta_i(\overline{a}))_{i\in\omega}$ une présentation de S. Comme S est simple on a :

$$T_{gp} \vdash [\bigwedge_{i\in\omega} \beta_i(\overline{a}) = e \wedge (\bigvee_{i=1,...,n} a_i \neq e) \Longrightarrow \psi]$$

D'après le théorème de compacité il existe r tel que :

$$T_{gp} \vdash [\bigwedge_{i=1,...,r} \beta_i(\overline{a}) = e \wedge (\bigvee_{i=1,...,n} a_i \neq e) \Longrightarrow \psi]$$

Soit H le groupe engendré par $\overline{a}$ et ayant comme présentation $\bigwedge_{i=1,...,r} \beta_i(\overline{a}) = e$. Alors on voit que ψ est vraie dans tout quotient non trivial de H.

□

Ce résultat combiné avec la proposition 3.2.1 et un résultat de Ziegler permet de retrouver le résultat suivant, dû à C.F.Miller III [24] : *il existe un groupe de présentation finie H tel que tout quotient non trivial de H a un problème des mots non résoluble.*

En effet d'après un résultat de Ziegler [30] le groupe G e.c. ayant comme $\mathcal{A}ge(G)$ la classe des groupes de type fini récursivement présenté est minimal, i.e. tout groupe e.c. qui se plonge dans G est isomorphe à G. S'il existe un groupe K e.c. qui se plonge dans tous les groupes e.c. alors K serait isomorphe à G et par conséquent tout groupe de présentation finie aurait un problème des mots résoluble et cela contredirait le théorème de Novikov-Boone. Donc il n'existe pas de groupe e.c. qui se plonge dans tous les groupes e.c. et d'après la proposition 3.2.2 ((2)⇒(4)), il existe un énoncé existentiel ψ consistant avec la théorie des groupes tel que si $M \models \psi$ alors M a un problème des mots non résoluble. D'après la propriété précédente il existe un groupe de présentation finie H non trivial tel que ψ est vrai dans tout quotient non trivial de H. Par conséquent tout quotient non trivial de H a un problème des mots non résoluble.

4.2 Les groupes qui ne sont pas forcément de type fini

Dans cette partie, nous allons étudier quelques propriétés de la classe des groupes qui se plongent dans tous les groupes existentiellement clos d'une manière générale. Soit $\Sigma(T_{gp})$ la classe des groupes tels que tous leurs sous-groupes de types finis ont un problème des mots résoluble. Dans la suite $\Sigma(T_{gp})$ sera notée Σ, $\Sigma_1(T_{gp})$ sera notée Σ_1 et $\Sigma_0(T_{gp})$ sera notée Σ_0.

La classe Σ est strictement plus large que la classe des groupes qui se plongent dans tous les groupes existentiellement clos. On s'intéresse aussi aux groupes Σ-e.c. Le but de cette section est la démonstration des théorèmes suivants :

Théorème 4.2.1.

Σ a les propriétés suivantes :

(1) *Σ (resp. Σ_1) est close par réunion croissante (resp. réunion dénombrable croissante).*

(2) *Pour tout $G \in \Sigma$, il existe $G' \in \Sigma$ tel que :*

G' est Σ-e.c., $G \hookrightarrow G'$ et $|G| = max(\chi_0, |G'|)$

(3) *Σ (resp. Σ_1) est close par produit libre (resp. produit libre dénombrable).*

(4) *Σ et Σ_1 sont close par produit cartésien fini.*

(5) *Σ et Σ_1 n'ont pas la propriété d'amalgamation.*

(6) *Il existe une formule $\varphi \in L_{\omega_1\omega}$ telle que : $G \in \Sigma$ si et seulement si $G \models \varphi$.*

Théorème 4.2.2.

Soit G un modèle Σ-e.c., alors G a les propriétés suivantes :

(1) *Tout groupe ayant un problème des mots résoluble se plonge dans G.*

(2) *G vérifie la formule*

$$\forall u \forall v \exists x \exists t (u \neq e \wedge v \neq e \Rightarrow t^{-1}ux^{-1}uxt = vx^{-1}ux)$$

Par conséquent G est simple.

(3) *Pour tout $g \in G$, si g est d'ordre fini alors pour tout n l'équation $(x^n = g)$ a une solution dans G.*

(4) *Deux éléments de même ordre fini sont conjugués.*

(5) *G ne se plonge dans aucun groupe de présentation finie.*

Avant de démontrer ces théorèmes, déduisons-en un corollaire :

Corollaire 4.2.3.

(1) *Il existe un groupe dénombrable qui se plonge dans tous les groupes e.c. mais qui n'a pas la propriété (*).*

(2) *Pour tout cardinal infini λ il existe un groupe simple de cardinal λ qui contient une copie de chaque groupe de type fini ayant un problème des mots résoluble et tel que tous ses sous-groupes de type fini ont un problème des mots résoluble.*

(3) *Tout groupe qui se plonge dans tous les groupes e.c. se plonge dans un groupe simple qui se plonge dans tous les groupes e.c. et qui contient une copie de chaque groupe de type fini ayant un problème des mots résoluble.*

Démonstration.

(1) Soit G un groupe dénombrable Σ-e.c., alors G se plonge dans tous les groupes e.c. Supposons que G a (*). Alors G se plonge dans un groupe de présentation finie et cela contredit la propriété 5 du théorème 4.2.2.

(2) Il suffit de prendre un groupe Σ-e.c. de cardinal λ.

(3) Si G se plonge dans tous les groupes e.c. alors il est dénombrable et est dans Σ, d'après la propriété (2) du théorème 4.2.1 G se plonge dans un groupe dénombrable S qui est Σ-e.c. et donc S se plonge dans tous les groupes e.c. et est simple d'après la propriété (2) du théorème 4.2.2.

□

Remarque. Nous remercions A.Khelif qui nous a indiqué l'article [1] dans lequel on trouve un exemple d'un groupe dénombrable simple qui se plonge dans tous les groupes e.c. mais qui ne se plonge pas dans un groupe de présentation finie. L'étude cet article nous a été très utile.

Démonstration du théorème 4.2.1.

Nous ne montrerons pas la propriété (5), cette propriété sera démontrée à la fin de la section.

(1) Soit $(G)_{i\in\lambda}$ une suite croissante de Σ, pour montrer que $(\cup_{i\in\lambda}G_i)\in\Sigma$ il faut (et il suffit) de montrer que tout sous-groupe de type fini de $(\cup_{i\in\lambda}G_i)$ appartient à Σ_0. Mais cela découle du fait que pour chaque groupe de type fini H de $(\cup_{i\in\lambda}G_i)$, il existe i_0 tel que : $H\subseteq G_{i_0}$. Comme $G_{i_0}\in\Sigma$, alors $H\in\Sigma_0$. Donc $(\cup_{i\in\lambda}G_i)\in\Sigma$.

(2) Soit $G\in\Sigma$, et soit $(\psi_i)_{i\in\lambda}$ la liste de toutes les formules existentielles à paramètres dans G où $\lambda=|G|$. On construit un groupe $C(G)\in\Sigma$ par récurrence sur i, de la manière suivante :

(i) $G_0=G$

(ii) S'il existe un groupe $K\in\Sigma$, tel que $G_i\hookrightarrow K$ et $K\models\psi_i$, alors on pose $G_{i+1}=<G_i,\overline{a}>$ où $\overline{a}$ est un uplet qui vérifie ψ_i, sinon on pose $G_{i+1}=G_i$.

(iii) Si i est un ordinal limite on pose $G_i=\cup_{l<i}G_l$.

Alors on pose $C(G)=\cup_iG_i$, et on voit que $C(G)\in\Sigma$, car Σ est close par réunion croissante et il est clair que $|C(G)|=max(\chi_0,|G|)$. On refait la même chose pour $C(G)$ et on construit $C(C(G))$, qu'on note $C^2(G)$. On aboutit finalement à un groupe $\mathcal{M}=(\cup_nC^n(G))$. Alors $\mathcal{M}$ est Σ-e.c. et $|\mathcal{M}|=max(\chi_0,|G|)$.

(3) Soit $G=*_{i\in\lambda}G_i$, avec $G_i\in\Sigma$. Pour montrer que $G\in\Sigma$ il faut (et il suffit) de montrer que tout sous-groupe de type fini est dans Σ_0. Soit $H\leq G$ de type fini, alors il existe n tel que $H\leq *_{i=1,n}G_i$. Par récurrence on est ramené à démontrer que si $G_1\in\Sigma$, $G_2\in\Sigma$ alors $G_1*G_2\in\Sigma$. De même il faut (et il suffit) de montrer que tout sous-groupe de type fini de G_1*G_2 est dans Σ. Soit $H\leq G_1*G_2$, alors il existe deux sous-groupes de type fini $A\subseteq G_1$, $B\subseteq G_2$, tels que $H\subseteq K=<A,B>$. On a $A\cap B=\{e\}$ et $A\cup B$ engendre K. Soit $g_1,...,g_n$ avec $n>0$, une séquence réduite de K, alors c'est une séquence réduite de G_1*G_2, donc $g_1...g_n\neq e$. Donc toute séquence réduite de K est non nulle. Alors $K\cong A*B$. Comme A et B sont de type fini et sont dans Σ_0 car $G_1,G_2\in\Sigma$, alors ils ont un problème des mots résoluble, donc $A*B\in\Sigma_0$. Comme $H\hookrightarrow A*B$, alors H a aussi un problème de mots résoluble. Donc $H\in\Sigma_0$. Donc $G_1*G_2\in\Sigma$.

(4) Soit $G=G_1\times G_2\times....\times G_n$, avec $G_i\in\Sigma$. De la même façon il faut (et il suffit) de montrer que tout sous-groupe de type fini de G appartient à Σ_0. Soit $H\leq G_1\times G_2$, alors il existe deux sous-groupes de type fini $A\subseteq G_1$, $B\subseteq G_2$, tels que $H\subseteq K=A\times B$; comme A et B sont de type fini et sont dans Σ_0, car $G_1,G_2\in\Sigma$, alors ils ont un problème des mots résoluble.

Donc $A\times B\in\Sigma_0$. Comme $H\hookrightarrow A\times B$, alors H a aussi un problème de mots résoluble. Donc $H\in\Sigma_0$. Donc $G_1\times G_2\in\Sigma$.

(6) Pour chaque groupe de type fini $G=<a_1,...,a_n>$ de Σ_0, soit

$$\triangle(G,n)=\{\phi(x_1,...,x_n)\text{ primitive}|\ G\models\phi(a_1,...,a_n)\}$$

Alors l'ensemble

$\Lambda=\{(G,n)|\ \exists a_1,...\exists a_n$ *tels que* $G=<a_1,...,a_n>$ *et* G *a un problème de mots résoluble* $\}$

est dénombrable.

Soit

$$\varphi = T_{gp} \wedge (\bigwedge_{n\in\omega}[\forall x_1, ...\forall x_n(\bigvee_{(G,n)\in\Lambda}(\bigwedge_{\phi\in\triangle(G,n)} \phi(x_1, ..., x_n))])$$

Donc $\varphi \in L_{\omega_1\omega}$ et on voit que pour Σ on a $G \in \Sigma$ ssi $G \models \varphi$ et donc pour Σ_1 on a $G \in \Sigma_1$ ssi $G \models \varphi$ et $|G| \leq \omega$.

□

La démonstration du théorème 4.2.2 et de la propriété (5) du théorème 4.2.1 se base sur le travail préliminaire suivant :

Définition. Soit $w \in A * B$, écrit sous-forme normale $g_1, ..., g_n$. On dit que w est cycliquement réduit, si g_1 et g_n sont dans des facteurs différents.

Théorème 4.2.4. (Combinatorial group theory [17])

Tout élément $w \in A * B$ est conjugué à un élément cycliquement réduit. Si $u = g_1, ..., g_n$ et $v = h_1, ..., h_m$ sont cycliquement réduit et conjugués, alors $m = n$, et les deux suites $g_1, ..., g_n$ et $h_1, ..., h_m$ s'obtiennent l'une à partir de l'autre par permutation cyclique.

Lemme 4.2.5.

Soit G un groupe de type fini ayant un problème des mots résoluble. Soient $a, b \in G$, où $a \neq e$, $b \neq e$. Alors le groupe $G^* =< G, x, t \mid t^{-1}ax^{-1}axt = bx^{-1}ax >$ a un problème des mots résoluble.

Démonstration.

D'après le lemme 4.1.1.5, il suffit de vérifier les conditions suivantes :

(i) $< ax^{-1}ax >$ et $< bx^{-1}ax >$ ont un problème généralisé de mots résoluble dans G.

(ii) Les fonctions ϕ et ϕ^{-1} sont calculables.

Il est clair que la dernière condition est satisfaite. On va démontrer que $< ax^{-1}ax >$ a un problème généralisé des mots résoluble, le cas $< bx^{-1}ax >$ se traite de la même façon. Il est clair que $ax^{-1}ax$ et $bx^{-1}ax$ ont un ordre infini, donc la HNN extension est légitime.

Posons $G =< a, a_1, ..., a_n >$ et soit w un élément de $G* < x \mid >$. Comme $G* < x \mid >$ a un problème des mots résoluble alors on peut calculer d'une manière récursive la forme normale de w. Soit donc $w = g_1....g_m$ la forme normale de w. On a alors $w = g_m^{-1}.g_m.g_1.....g_{m-1}g_m$ et on voit que $g_m.g_1.....g_{m-1}$ est cycliquement réduit puisque g_m et g_{m-1} ne sont pas dans le même facteur. Si w appartient à $< ax^{-1}ax >$ il existe $p \in \omega$ tel que $w = (ax^{-1}ax)^p$. Donc $g_m.g_1.....g_{m-1}$ est cycliquement réduit et conjugué à $(ax^{-1}ax)^p$ qui est aussi cycliquement réduit. D'après le théorème 4.2.4, on a : $n = 4p$ et les suites $g_m.g_1.....g_{m-1}$, $(ax^{-1}ax)^p$ s'obtiennent l'une à partir de l'autre par permutation. Comme que le problème de savoir si $a = g_i$ est résoluble car G a un problème des mots résoluble, alors on peut savoir d'une manière récursive si $g_m.g_1.....g_{m-1}$ est une permutation de $(ax^{-1}ax)^p$ ou non. Donc $< ax^{-1}ax >$ a un problème généralisé de mots résoluble dans G.

□

Remarque. Ce lemme n'est que la démonstration d'une affirmation dans le livre *Combinatorial group theory* [17], page 216, dans la démonstration de la proposition 7.4.

Lemme 4.2.6.
Soit $G^* =< G, t \mid t^{-1}at = b >$ une HNN-extension. Soit $K \leq G$ tel que $a, b \in K$.
Alors le sous-groupe engendré par $K \cup \{t\}$ est isomorphe à $K^* =< K, s \mid s^{-1}as = b >$.

Démonstration. Le résultat découle du lemme de Britton (cf. [17]).

□

Lemme 4.2.7. *Soit $G \in \Sigma$. Soient $a, b \in G$ avec $a \neq e$, $b \neq e$.*
Alors le groupe $G^* =< G, x, t \mid t^{-1}ax^{-1}axt = bx^{-1}ax >$ appartient à Σ.

Démonstration. Il suffit de montrer que tout sous-groupe de type fini de G^* appartient à Σ_0. Soit $H \leq G^*$ de type fini, alors il existe $K \subseteq G* < x >$ de type fini tel que $H \subseteq< K, t >$ et $ax^{-1}ax \in K$, $bx^{-1}ax \in K$.

D'après le lemme 4.2.6, $< K, t > \cong K^* =< K, s \mid s^{-1}ax^{-1}axs = bx^{-1}ax >$. Comme $K \in \Sigma_0$, car $G* < x > \in \Sigma$, d'après le lemme 4.2.5, $K^* \in \Sigma_0$, donc le groupe H appartient à Σ.

□

Lemme 4.2.8. *Soit G un groupe de type fini.*
Soit $G^* =< G, t \mid t^{-1}at = b >$ une HNN-extension où les éléments a et b ont le même ordre fini. Si $G \in \Sigma_0$, alors $G^* \in \Sigma_0$.

Démonstration. En utilisant le lemme 4.1.1.5, il suffit de montrer que les groupes $< a >$ et $< b >$ ont un problème généralisé des mots résoluble dans G. Or $w \in< a >$ si et seulement si il existe k, $0 \leq k \leq ordre(a)$ tel que $wa^{-k} = e$. Comme G a un problème des mots résoluble on a immédiatement le résultat cherché.

□

Lemme 4.2.9. *Soit G un groupe dénombrable.*
Soit $G^* =< G, t \mid t^{-1}at = b >$ une HNN-extension, a et b ont le même ordre fini. Si $G \in \Sigma$, alors $G^* \in \Sigma$.

Démonstration. Il faut (et il suffit) de montrer que tout sous-groupe de type fini de G^* appartient à Σ_0. Soit $H \leq G^*$ de type fini, alors il existe $K \subseteq G$ de type fini tel que $H \subseteq< K, t >$ et $a \in K$, $b \in K$. D'après le lemme 4.2.6, $< K, t > \cong K^* =< K, s \mid s^{-1}as = b >$. Mais $K \in \Sigma_0$, car $G \in \Sigma$. Donc d'après le lemme 4.2.8, $K^* \in \Sigma_0$, donc $H \in \Sigma_0$.

□

Démonstration du théorème 4.2.2.

1. Soit G_0 un groupe de type fini ayant un problème des mots résoluble. D'après le théorème de Boone-Higman, il existe un groupe S simple et un groupe P de présentation finie ayant un problème des mots résoluble tels que $G_0 \hookrightarrow S \hookrightarrow P$. Soient $P =< \overline{a} \mid W(\overline{a}) >$, et $\alpha(\overline{a}) \in S$, avec $\alpha(\overline{a}) \neq e$, alors la formule $\psi = \exists \overline{x}(W(\overline{x}) \wedge \alpha(\overline{x}) \neq e)$ vérifie : pour tout groupe G si $G \models \psi$ alors $G_0 \hookrightarrow G$. Soit G_1 un groupe Σ-e.c., alors $G_1 \times P \in \Sigma$. Comme $P \models \psi$, alors $G_1 \times P \models \psi$, et comme G_1 est Σ-e.c., alors $G_1 \models \psi$. Donc $G_0 \hookrightarrow G_1$.

2. Soit G un groupe Σ-e.c. et soient $a, b \in G$ avec $a \neq e$, $b \neq e$. Alors d'après le lemme 4.2.7 le groupe $G^* =< G, x, t \mid t^{-1}ax^{-1}axt = bx^{-1}ax >$ appartient à Σ. Comme G se plonge dans G^* et G est Σ-e.c alors G vérifie $\exists x \exists t(t^{-1}ax^{-1}axt = bx^{-1}ax)$. Par conséquent on voit que b appartient au sous-groupe distingué engendré par a. D'où G est simple.

3. Soit G un groupe Σ-e.c. et soit $a \in G$ avec $ordre(a) = p$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A =< b \mid b^{np} = e >$. Comme A a un problème des mots résoluble d'après le théorème 4.2.1 (3) le groupe $K = G * A$ est dans Σ.

D'après le lemme 4.2.8 le groupe $K^* =< K, t \mid t^{-1}b^n t = a >$ est dans Σ. Comme G se plonge dans K^* et G est Σ-e.c alors G vérifie $\exists t(t^{-1}b^n t = a)$. Par conséquent G vérifie $(t^{-1}bt)^n = a$, d'où l'équation $x^n = a$ a une solution dans G.

4. Soit G un groupe Σ-e.c. et soient a, b des éléments de G de même ordre fini. D'après le lemme 4.2.8 le groupe $G^* =< K, t \mid t^{-1}bt = a >$ est dans Σ. Comme G se plonge dans G^* et G est Σ-e.c alors G vérifie $\exists t(t^{-1}bt = a)$.

5. Soit G un groupe Σ-e.c. et supposons que G se plonge dans un groupe de présentation finie H. La démonstration est presque identique à celle de la proposition 1.3.3. Démontrons qu'il existe un algorithme uniforme qui résout le problème des mots de tous les groupes de présentation finie ayant un problème des mots résoluble. Comme G est Σ-e.c alors d'après la propriété (1) il contient une copie de tout groupe de présentation finie ayant un problème des mots résoluble. Soit $H =< \overline{a} \mid P(\overline{a}) >$ une présentation finie de H. Soit $s(\overline{a})$ un élément non trivial de G écrit en fonction de $\overline{a}$. Soit $\psi = \exists \overline{x}(P(\overline{x}) \wedge s(\overline{x}) \neq e)$ et soit Γ la théorie suivante :

$$\{\varphi \text{ existentiel tel que } T_{gp} \cup \{\psi\} \vdash \varphi\}$$

On voit que Γ est récursivement énumérable et que si φ est un énoncé existentiel vrai dans un groupe de présentation finie ayant un problème des mots résoluble alors $\varphi \in \Gamma$. Alors on voit que l'ensemble

$$A = \{(W(\overline{x}), w(\overline{x})) \mid \exists \overline{x}(W(\overline{x}) \wedge w(\overline{x}) \neq e) \ \in \Gamma\}$$

où $W(\overline{x})$ est une conjonction de formules atomiques et w un mot, est récursivement énumérable.

Soit $W(a_1, ..., a_n)$ une présentation finie d'un groupe K ayant un problème des mots résoluble et soit w un mot en fonction des générateurs de K. Pour savoir si $w = e$ ou non dans K on énumère tous les mots qui sont égaux à e et en même temps l'ensemble B suivant qui est récursivement énumérable :

$$B = \{w(\overline{x}) \mid (W(\overline{x}), w(\overline{x})) \ \in A\}$$

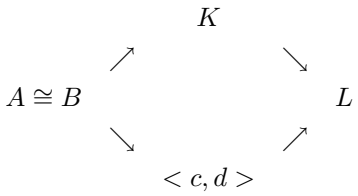
Si w apparaît dans la première liste alors $w = e$ et si w apparaît dans la seconde liste alors $w \neq e$. Par conséquent il existe un algorithme uniforme qui résout le problème des mots de tout

les groupes de présentation finie ayant un problème des mots résoluble. Cela contredit le théorème de Boone-Rogers.

□

Démonstration de la propriété (5) du théorème 4.2.1.[1]

(5) Supposons que Σ a la PA. Soit $G =< a_i\,;\, i \in \omega >$ un groupe dénombrable de Σ. Soit $<\alpha, b >$ et $<c, d >$ deux copies du groupe libre $\mathbb{F}_2$. Soit $K = G* < a, b >$, alors d'après la propriété (3) du théorème 4.2.1 $K \in \Sigma$. Le groupe $A =< c, d^{-n}cd^n; n \in \omega >$ et le groupe $B =< b, a_n\alpha^{-n}b\alpha^n; n \in \omega >$ sont isomorphes et sont dans Σ. Comme Σ a la PA, il existe un groupe $L \in \Sigma$ qui amalgame K et $< c, d >$ au-dessus de A et B.



Soit $D =< \alpha, b, c, d >$ dans L. Alors $G \hookrightarrow D$ et D est de type fini et est dans Σ_0. Donc D a un problème de mots résoluble. Donc tout groupe dénombrable $G \in \Sigma$, se plonge dans un groupe de type fini ayant un problème des mots résoluble, par conséquent d'après le théorème 1.2.2 dans un groupe de présentation finie. Cela contredit la propriété (5) du théorème 4.2.2.

On voit que cette démonstration est aussi valable pour Σ_1.

□

Remarque. On a la version plus générale suivante des lemmes 4.2.5 et 4.2.7, qui est un analogue du lemme 1.5 de [11] pour la classe Σ :

Proposition 4.2.10. *Soient G un groupe de Σ et a, b deux éléments de G. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $G \models (a = e \Longrightarrow b = e)$.

(2) *L'équation $t^{-1}ax^{-1}axt = xax^{-1}bx^{-1}ax$ est résoluble dans une extension de G, qui est dans Σ.*

Démonstration. Il est clair que **(2)⇒(1)** est vraie.

(1)⇒(2). Si $a = e$ alors $b = e$ et donc on peut prendre $x = t = e$ et l'équation précédente est résoluble.

Supposons donc $a \neq e$. Soit L un sous-groupe de type fini de G contenant a et b et soit $K = L* < x\ |>$, alors K est dans Σ. L'élément $xax^{-1}bx^{-1}ax$ est d'ordre infini indépendamment du fait que $b = e$ ou non. On voit aussi, en utilisant la même méthode que celle utilisée dans la démonstration du lemme 4.1.1.7, que le sous-groupe $< xax^{-1}bx^{-1}ax >$ a un problème généralisé des mots résoluble dans K. Par conséquent la HNN-extension suivante

[1] Remarquons que le contre-exemple donné a la page 44 montre aussi que Σ n'a pas la propriété d'amalgamation.

$$L^* =< L, x, t \mid t^{-1}ax^{-1}axt = xax^{-1}bx^{-1}ax >$$

a un problème des mots résoluble.

D'où tout sous-groupe de type fini du groupe

$$G^* =< G, x, t \mid t^{-1}ax^{-1}axt = xax^{-1}bx^{-1}ax >$$

a un problème des mots résoluble. D'où $G^* \in \Sigma$ et donc l'équation est résoluble dans une extension de G qui est dans Σ.

□

Remarque. Remarquons que Σ n'est pas axiomatisable par une théorie de $\mathcal{L}_{gp}$. Supposons le contraire et soit Γ une théorie qui axiomatise Σ. Comme Σ est close par sous-groupe alors Γ est équivalente à une théorie universelle et par conséquent elle est équivalente à la théorie suivante :

$$\Gamma_0 = \{\psi \mid \psi \ \textit{universelle vraie dans tout groupe de } \Sigma\}$$

Mais il existe un groupe de type fini qui vérifie Γ_0 ayant un problème des mots non résoluble. En effet il suffit de prendre

$$G =< a, b, c, d \mid a^{-n}ba^n = c^{-n}dc^n, \ n \in X >$$

Où X est un ensemble non récursif d'entiers naturels. On laisse au lecteur le soin de vérifier que G est modèle de Γ_0.

4.2.1 Les groupes Σ-génériques

Dans cette section nous allons étudier les groupes Σ-génériques. L'étude de ces groupes été principalement motivée par la question de connaître le nombre des groupes Σ-e.c. Mais cela peut apporter des éclairages sur la question de savoir si la classe Σ_0 a la propriété d'amalgamation ou non, car on a :

Proposition 4.2.1.1. *Si Σ_0 a la propriété d'amalgamation alors Σ a un unique groupe Σ-e.c. dénombrable. Ce modèle est ultrahomogène.*

Démonstration.

Comme Σ_0 a la PP, HP et la PA, alors d'après le théorème de Fraïssé, il existe G ultrahomogène, tel que $\Sigma_0 = \mathcal{A}ge(G)$. Montrons que G est Σ-e.c. Soit $G' \in \Sigma$ tel que $G \hookrightarrow G'$ et G' satisfait une formule existentielle $\psi(\overline{a})$ où $\overline{a}$ sont des paramètres dans G. Alors ψ est vraie dans un sous-groupe K de type fini de G' contenant le sous-groupe $< \overline{a} >$ et par conséquent ψ est vraie dans un groupe de type fini ayant un problème des mots résoluble contenant $< \overline{a} >$. Comme $\Sigma_0 = \mathcal{A}ge(G)$ il résulte que G contient une copie de K et comme G est ultrahomogène alors on peut trouver une extension de $< \overline{a} >$ dans G qui satisfait $\psi(\overline{a})$. Par conséquent G est Σ-e.c.

Comme pour tout groupe K, Σ-e.c., on a $\Sigma_0 = \mathcal{A}ge(K)$, et G est ultrahomogène alors tout groupe Σ-e.c. dénombrable se plonge dans G. Il suffit donc de montrer que tout groupe dénombrable Σ-e.c. est ω-homogène. Donc supposons pour simplifier que $K \subseteq G$. Soient $a_1, ..., a_n \in K$ et

$b_1, ..., b_n \in K$ tels que $< a_1, ..., a_n > \cong < b_1, ..., b_n >$ et soit $b \in K$. Comme $< b_1, ..., b_n, b >$ a un problème des mots résoluble il se plonge dans un groupe simple S qui se plonge à son tour dans un groupe de présentation finie H ayant un problème des mots résoluble. Soit $W(c_1, ..., c_n, c, \overline{d})$ une présentation de H et $\alpha \in S$ non trivial. Donc dans G il existe une copie de H contenant $<c_1, ..., c_n, c, \overline{d}>$ avec $< b_1, ..., b_n, b > \cong <c_1, ..., c_n, c >$.

Comme G est ultrahomogène il existe $\overline{f}$ tels que $G \models W(b_1, ..., b_n, b, \overline{f}) \wedge \alpha \neq e$. Comme G est ultrahomogène il existe $\overline{h}$, a_{n+1} tels que $G \models W(a_1, ..., a_n, a_{n+1}, \overline{h}) \wedge \alpha \neq e$. Comme K est Σ-e.c. on a $K \models \exists x_{n+1} \exists \overline{y} W(a_1, ..., a_n, x_{n+1}, \overline{y}) \wedge \alpha \neq e$. Par conséquent il existe dans K un élément d tel que $< a_1, ..., a_n, d > \cong < b_1, ..., b_n, b >$.

□

Notations et définitions.

Soit $\mathcal{K}$ une classe de modèles.

(1) $\mathcal{K} \models (\psi(\overline{x}) \Rightarrow \varphi(\overline{x}))$ signifie pour tout $M \in \mathcal{K}$, $M \models (\psi(\overline{x}) \Rightarrow \varphi(\overline{x}))$.

(2) $\mathcal{K} \cup \{\exists \overline{x} \psi(\overline{x})\}$ est consistante signifie qu'il existe $M \in \mathcal{K}$ tel que $M \models \exists \overline{x} \psi(\overline{x})$.

(3) Soit $\psi(\overline{x})$ une formule existentielle, on note $Res_\psi(\overline{x})$ l'ensemble

$$\{\phi(\overline{x}),\ \phi \text{ universelle } | \mathcal{K} \models (\psi(\overline{x}) \Rightarrow \phi(\overline{x}))\ \}$$

(5) $\bigwedge Res_\psi(\overline{x})$ signifie $\bigwedge_{\varphi \in Res_\psi(\overline{x})} \varphi(\overline{x})$.

Préliminaires.

(1) On utilise les même notations que celles utilisées dans [16]. Etant donné que les modèles génériques dépendent de trois paramètres : une classe K, un fragment L_A de $L_{\omega_1 \omega}$ et une propriété de forcing P, au lieu de dire que M est générique, on explicitera les paramètres en question et on dira M est (K, L_A, P)-générique.

(2) On a vu que pour chaque groupe $G =< \overline{a} >$ ayant un problème des mots résoluble, il existe une formule existentielle $\psi_G(\overline{x})$ vraie dans un groupe ayant un problème des mots résoluble telle que $T_{gp} \vdash \psi_G(\overline{x}) \Rightarrow \varphi(\overline{x})$, pour tout $\varphi \in \triangle(\overline{a}, G)$. Soit Λ_n l'ensemble des groupes de type fini engendré par n éléments ayant un problème des mots résoluble. Soit pour chaque $G \in \Lambda_n$,

$$\Lambda(G) = \{\psi \text{ existentielle consistante avec } \Sigma \,|\, T_{gp} \vdash \psi(\overline{x}) \Rightarrow \varphi(\overline{x}), \text{ pour tout } \varphi \in \triangle(\overline{a}, G)\}$$

Soit $\Xi_n = \cup_{G \in \Lambda_n} \Lambda(G)$. Soit $\Psi_n \equiv \forall \overline{x} (\bigvee_{\psi \in \Xi_n} \psi(\overline{x}))$. Alors il existe un fragment L_A contenant les formules Ψ_n. Soit Φ l'ensembles des formules atomiques et de négations de formules atomique. On considère P l'ensemble des *ensembles finis* $p \subset \Phi(C)$ de Σ comme ensemble de conditions. On a le théorème suivant, qui découle du théorème 2.1 (General form), page 107, de [16] :

Théorème 4.2.1.2 [16]. *Soit $\phi = \forall \overline{x} \varphi(\overline{x})$ un énoncé $\forall \vee \exists$ sur Φ, dans L_A, $|\overline{x}| = m$. L'énoncé ϕ est vrai dans tous les modèles (Σ, L_A, P)-génériques si et seulement si pour toute condition $p \subset \Phi(C)$ satisfaisable dans Σ, et pour tout $\overline{c} \in C^m$, la formule $p \wedge \varphi(\overline{c})$ est satisfaisable dans Σ.*

Convention. *Soit $G \in \Sigma$, on dit que G est Σ-générique s'il existe un fragment L_A contenant les formules Ψ_n, tel que G est (Σ, L_A, P)-générique. (par conséquent G est dénombrable).*

Le but de ce qui va suivre est la démonstration des deux propositions suivantes :

Proposition 4.2.1.3 (Un théorème d'omission des types pour Σ).

(1) *Soit $p(\overline{x})$ un type universel, alors on a : p est réalisé dans tous les groupes Σ-e.c. si et seulement si il existe une formule existentielle ψ consistante avec Σ telle que $\Sigma \models (\psi(\overline{x}) \Rightarrow \varphi(\overline{x}))$, pour toute formule $\varphi \in p$.*

(2) *Soit $(p_n)_{n\in\omega}$ une suite de types universels. Si chaque p_n vérifie : il n'existe pas de formule existentielle ψ telle que : $\Sigma \cup \{\exists \overline{x}\psi(\overline{x})\}$ est consistante ; $\Sigma \models (\forall \overline{x}(\psi(\overline{x}) \Rightarrow \phi(\overline{x})))$, pour toute formule $\phi \in p_n$, alors il existe un groupe de Σ, Σ-e.c. dénombrable qui omet chaque p_n. (le groupe en question est Σ-générique).*

Proposition 4.2.1.4. *Une des deux propriétés suivantes est vraie :*

(1) *Il existe un groupe Σ-générique qui se plonge dans tous les groupes Σ-génériques.*

(2) *Σ a 2^{χ_0} groupes Σ-e.c. dénombrables $(G_i : i \in 2^{\chi_0})$ deux à deux non isomorphes et qui vérifient, pour toute formule existentielle ψ, $G_i \models \forall \overline{x}(\psi(\overline{x}) \Longleftrightarrow \bigwedge Res_\psi(\overline{x}))$.*

Tout en regrettant de n'avoir pu préciser cette proposition, nous en inclurons une démonstration qui peut s'appliquer à d'autres situations. (cf. la proposition 4.2.1.9)

Proposition 4.2.1.5. *Soit L_A un fragment contenant les formules Ψ_n. Soit $\mathcal{M}$ un modèle (Σ, L_A, P)-générique, alors : $\mathcal{M}$ est un groupe, $\mathcal{M} \in \Sigma$ et $\mathcal{M}$ est Σ-e.c.*

Démonstration.

(1) Rappelons qu'un fragment contient les formules du langage L, donc L_A contient T_{gp}. Que $\mathcal{M}$ soit un groupe se vérifie de façon classique. (cf.[16]).

(2) Soit $p(\overline{c}, \overline{d})$ une condition de Σ, alors elle est vraie dans un groupe ayant un problème des mots résoluble G engendré par $\overline{a}$,$\overline{b}$ tels que $G \models p(\overline{a}, \overline{b})$.

On a $G \subseteq S \subseteq P$, avec $P =< \overline{a}, \overline{b}, \overline{e} \mid W(\overline{a}, \overline{b}, \overline{e}) >$ de présentation finie ayant un problème des mots résoluble et S simple. Soit $\alpha \in S$, $\alpha \neq e$; alors la formule $\beta(\overline{z}) = \exists \overline{x} \exists \overline{y}(W(\overline{z}, \overline{x}, \overline{y}) \wedge \alpha \neq e)$ vérifie $T_{gp} \vdash \beta(\overline{z}) \Rightarrow \varphi(\overline{z})$, pour tout $\varphi \in \triangle(\overline{a}, < \overline{a} >)$. La formule $p(\overline{c}, \overline{d}) \wedge \beta(\overline{c})$ est consistante avec Σ, donc $p(\overline{c}, \overline{d}) \wedge (\bigvee_{\psi \in \Xi_n} \psi(\overline{c}))$ est consistante avec Σ, avec $|\overline{c}| = n$. Donc d'après la théorème 4.2.1.2 $\mathcal{M} \models \Psi_n$, donc tout sous-groupe de type fini de $\mathcal{M}$ a un problème des mots résoluble.

(3) $\mathcal{M}$ est Σ-e.c., cela se démontre comme dans [16], page 115.

□

Démonstration de la proposition 4.2.1.3.

(1) Soit $p(\overline{x})$ un type universel. Soit L_A un fragment contenant la formule $\forall \overline{x}(\bigvee_{\varphi \in p} \neg \varphi(\overline{x}))$, et les formules Ψ_n. Supposons que p est réalisé dans tous les groupes Σ -e.c. , alors il est réalisé dans tous les groupes (Σ, L_A, P)-génériques et donc aucun groupe (Σ, L_A, P)-générique ne vérifie $\forall \overline{x}(\bigvee_{\varphi \in p} \neg \varphi(\overline{x}))$. D'après le théorème 4.2.1.2, il existe une pièce finie $p(\overline{c}, \overline{d})$ de Σ, $\overline{c} \in C^m$, telle que la formule $p(\overline{c}, \overline{d}) \wedge (\bigvee_{\varphi \in p} \neg \varphi(\overline{c}))$ n'est pas satisfaisable dans Σ, donc pour tout $G \in \Sigma$ si $G \models \exists \overline{y} p(\overline{a}, \overline{y})$, alors $G \models \bigwedge_{\varphi \in p} \varphi(\overline{a})$, donc il existe une formule existentielle ψ consistante avec Σ telle que $\Sigma \models \psi(\overline{x}) \Rightarrow \varphi(\overline{x})$, pour tout $\varphi \in p$.

Supposons qu'il existe une formule existentielle ψ consistante avec Σ telle que

$$\Sigma \models (\psi(\overline{x}) \Rightarrow \varphi(\overline{x})), \text{ pour tout } \varphi \in p$$

Donc ψ est vraie dans un groupe ayant un problème de mots résoluble G. Comme G se plonge dans tous les groupes Σ-e.c. alors tout groupe e.c. réalise p.

(2) Soit $(p_n)_{n\in\omega}$ une suite de types universels. Supposons que chaque p_n vérifie *: il n'existe pas de formule existentielle ψ telle que* : $\Sigma \cup \{\exists\overline{x}\psi(\overline{x})\}$ *est consistante* ; $\Sigma \models (\forall\overline{x}(\psi(\overline{x}) \Rightarrow \phi(\overline{x}))$, *pour tout* $\phi \in p_n$*... (μ).* Soit L_A un fragment contenant les formules $\Phi_n = \forall\overline{x}(\bigvee_{\varphi\in p_n} \neg\varphi(\overline{x}))$ et les formules Ψ_n. D'après le théorème 4.2.1.2, et la propriété (μ), tout groupe (Σ, L_A, P)-générique vérifie Φ_n. Donc tout groupe (Σ, L_A, P)-générique omet p_n et comme tous les groupes (Σ, L_A, P)-génériques sont Σ-e.c. on a ce qu'il faut.

□

Lemme 4.2.1.6. *Soient G un groupe Σ-générique et $\psi(\overline{x})$ une formule existentielle.*
Alors $G \models \forall\overline{x}(\psi(\overline{x}) \Longleftrightarrow \bigwedge Res_\psi(\overline{x}))$

Démonstration. Comme $G \in \Sigma$, on a $G \models \forall\overline{x}(\psi(\overline{x}) \Rightarrow \bigwedge Res_\psi(\overline{x}))$. Soit $\overline{a} \in G$ tel que $G \models \bigwedge Res_\psi(\overline{a})$. Supposons que $G \models \neg\psi(\overline{a})$. Soit L_A un fragment contenant les formules Ψ_n tel que G est un modèle (Σ, L_A, P)-générique. Donc il existe $A \subseteq P$ un ensemble générique qui engendre G. Comme $G = (c_i : i \in \omega)$, il existe $\overline{c}$ tel que $G \models \overline{c} = \overline{a}$. Par conséquent $G \models \neg\psi(\overline{c})$. Donc il existe une condition $p(\overline{c}, \overline{d}) \in A$ telle que $p \Vdash \neg\psi(\overline{c})$. Soit $\varphi(\overline{x}) = \exists\overline{y}p(\overline{x}, \overline{y})$. Comme $p \Vdash \exists\overline{y}p(\overline{c}, \overline{y})$, alors $G \models \varphi(\overline{c})$, par conséquent $G \models \varphi(\overline{a})$. Montrons que $\Sigma \models \forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \neg\psi(\overline{x}))$. Soit $M \in \Sigma$ tel que $M \models \varphi(\overline{r})$ et supposons que $M \models \psi(\overline{r})$. Donc $p(\overline{c}, \overline{d}) \wedge\psi(\overline{c})$ est consistante dans Σ. Soit $\psi^0(\overline{c})$ une partie primitive de ψ telle que $p(\overline{c}, \overline{d}) \wedge\psi^0(\overline{c})$ est consistante dans Σ. Donc $q = p(\overline{c}, \overline{d}) \cup\{\psi^0(\overline{c})\} \in P$ et on a $p \leq q$ et $q \Vdash \psi(\overline{c})$, contradiction avec $p \Vdash \neg\psi(\overline{c})$. D'où $\Sigma \models \forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \neg\psi(\overline{x}))$.

On a $\neg\varphi(\overline{x}) \notin Res_\psi(\overline{x})$, car $G \models \bigwedge Res_\psi(\overline{a})$ et $G \models \varphi(\overline{a})$, donc $\exists\overline{x}(\psi(\overline{x}) \wedge \varphi(\overline{x}))$ est consistante dans Σ, et cela est une contradiction avec $\Sigma \models \forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \neg\psi(\overline{x}))$. On a donc $G \models \psi(\overline{a})$.

□

Lemme 4.2.1.7. *Soit $K_1(\Sigma)$ la classe suivante :*

$$\{G \in \Sigma, |G| \leq \chi_0 \mid \textit{pour toute formule existentielle } \psi,\ G \models \forall\overline{x}(\psi(\overline{x}) \Longleftrightarrow \bigwedge Res_\psi(\overline{x}))\}$$

Alors il existe une formule $\phi \in L_{\omega_1\omega}$ telle que : $(G \in K_1(\Sigma))$ si et seulement si $G \models \phi$ et $|G| \leq \chi_0$.

Démonstration. On remarque d'abord que tout $G \in K_1(\Sigma)$ est Σ-e.c. En effet si $G \hookrightarrow G'$, avec $G' \models \psi(\overline{a})$, ψ existentielle et $\overline{a} \in G$, alors $G \models Res_\psi(\overline{a})$. Donc $G \models \psi(\overline{a})$.

D'après le théorème 4.2.1 (6) il existe une formule $\varphi\in L_{\omega_1\omega}$ telle que : $(G \in \Sigma_1$) si et seulement si $G \models \varphi$ et $|G| \leq \chi_0$.

Soit Λ l'ensemble des formules existentielles, alors Λ est dénombrable. Soit ϕ la formule :

$$\varphi \wedge [\bigwedge_{\sigma\in\Lambda} (\forall\overline{x}(\sigma(\overline{x}) \Longleftrightarrow \bigwedge Res_\sigma(\overline{x})))]$$

Alors $\phi \in L_{\omega_1\omega}$ et il est clair que $(G \in K_1(\Sigma))$ si et seulement si $G \models \phi$ et $|G| \leq \chi_0$.

□

Démonstration de la proposition 4.2.1.4.

Soit $K(\Sigma)$ la classe des groupes Σ-génériques.

Soit $p(\overline{x})$ un type universel. On dit que p est *compatible* avec $K(\Sigma)$ s'il existe $M \in K(\Sigma)$ et $\overline{a} \in M$ tels que $\triangle_\forall(\overline{a}, M) = \{\varphi(\overline{x}) \mid \varphi$ universelle et $M \models \varphi(\overline{a})\ \} = p(\overline{x})$.

Soient Γ_1 et Γ_2 les deux ensembles suivants :

$\Gamma_1 = \{p \mid p$ un type universel compatible avec $K(\Sigma)\ \}$

$\Gamma_2 = \{p \mid p$ un type universel compatible avec $K(\Sigma)$ et réalisé dans tous les modèles de $K(\Sigma)\}$

Fait 1. Une des deux propriétés suivantes est vraie :

P1. Il existe une formule existentielle $\psi(\overline{x})$ consistante avec Σ telle que si $M \in K(\Sigma)$ et $\overline{a} \in M$ avec $M \models \psi(\overline{a})$, alors $\triangle_\forall(\overline{a}, M) \notin \Gamma_2$.

P2. Il existe un groupe Σ-générique qui se plonge dans tous les groupes Σ-génériques. (En réalité il se plonge dans tous les groupes de $K_1(\Sigma)$).

Démonstration.

On remarque que Γ_2 est dénombrable. Soit $\Gamma_2^n = \{p(\overline{x}) \mid p \in \Gamma_2$ et $|\overline{x}| = n\}$. Supposons qu'il existe $n \in \omega$ tel que $\Gamma_2^n = \emptyset$, alors la propriété P1 est vraie pour toute formule existentielle $\psi(\overline{x})$ consistante avec Σ telle que $|\overline{x}| = n$. Donc on peut supposer que $\forall n \in \omega$, $\Gamma_2^n \neq \emptyset$.

Pour chaque $p \in \Gamma_2$, d'après le théorème d'omission des types de Σ (proposition 4.2.1.3), il existe une formule existentielle φ_p consistante avec Σ telle que $\Sigma \models (\varphi_p \Rightarrow \varphi)$, pour tout $\varphi \in p$. Soit $\alpha_n = \{\neg\varphi_p(\overline{x}) \mid |\overline{x}| = n$ et $p \in \Gamma_2\ \}$. Alors α_n est un type universel non vide. Deux cas sont possibles :

1. Il existe $n \in \omega$ tel que α_n vérifie : il existe une formule existentielle $\psi(\overline{x})$ consistante avec Σ telle que $\Sigma \models \psi(\overline{x}) \Rightarrow \varphi(\overline{x})$, pour tout $\varphi \in \alpha_n$. Montrons que ψ vérifie la propriété P1. Soient $M \in K(\Sigma)$ et $\overline{a} \in M$ avec $M \models \psi(\overline{a})$. Comme $M \models \forall\overline{x}(\varphi_p(\overline{x}) \iff \bigwedge Res_{\varphi_p}(\overline{x}))$, si $\triangle_\forall(\overline{a}, M)$=$p(\overline{x})$, avec $p \in \Gamma_2$, alors $Res_{\varphi_p}(\overline{x}) \subseteq p(\overline{x})$ et donc $M \models \varphi_p(\overline{a})$, contradiction avec $\Sigma \models \psi(\overline{x}) \Rightarrow \neg\varphi_p(\overline{x})$. Donc on a P1.

2. Pour tout $n \in \omega$, α_n vérifie : il n'existe pas de formule existentielle ψ telle que : $\Sigma \cup \{\exists\overline{x}\psi(\overline{x})\}$ est consistante ; $\Sigma \models (\forall\overline{x}(\psi(\overline{x}) \Rightarrow \phi(\overline{x})))$, pour toute formule $\phi \in p_n$.

D'après le théorème d'omission des types de Σ (proposition 4.2.1.3), il existe $M_0 \in K(\Sigma)$ qui omet chaque α_n. Autrement dit pour tout $\overline{a} \in M_0$, avec $|\overline{a}| = n$, il existe $p \in \Gamma_2^n$ tel que $M_0 \models \varphi_p(\overline{a})$. Montrons d'abord que $\triangle_\forall(\overline{a}, M_0)$=$p(\overline{x})$. Comme $M_0 \models \varphi_p(\overline{a})$, on voit que $p(\overline{x}) \subseteq \triangle_\forall(\overline{a}, M_0)$. Comme p est compatible avec $K(\Sigma)$, il existe un modèle $M \in K(\Sigma)$ et $\overline{b} \in M$ tels que $\triangle_\forall(\overline{b}, M_0)$=$p(\overline{x})$. Soit $\psi \in \triangle_\forall(\overline{a}, M_0)$ telle que $\psi \notin p$. Alors $M \models \neg\psi(\overline{b})$, et

donc $Res_{\neg\psi}(\overline{x}) \subseteq p(\overline{x})$. D'où $M_0 \models Res_{\neg\psi}(\overline{a})$ et comme $M_0 \in K_1(\Sigma)$, alors $M \models \neg\psi(\overline{a})$ d'où contradiction avec $\psi \in \triangle_\forall(\overline{a}, M_0)$. Par conséquent pour tout $\overline{a} \in M_0$, $\triangle_\forall(\overline{a}, M)$ est réalisé dans tous les modèles e.c. dénombrable de Σ. Montrons que $M_0 \hookrightarrow M$, pour tout $M \in K(\Sigma)$. On utilise la méthode de va. Ecrivons $M_0 = (a_i : i \in \omega)$; et soit $M \in K_1(\Sigma)$. On a $a_0 \in M_0$ et $M_0 \models \varphi_{p_0}(a_0)$. On a $p_0(x) = \triangle_\forall(a_0, M_0)$ est réalisé dans M donc $\exists b_0 \in M$ tel que $\models p_0(b_0)$, donc $< a_0 > \cong < b_0 >$. On a $a_0, a_1 \in M_0$ et $M_0 \models \varphi_{p_1}(a_0, a_1)$. On a donc $M_0 \models \exists y \varphi_{p_0}(a_0, y)$.

Soit $H = \{ \varphi \text{ universelle} \mid \Sigma \vdash \exists y \varphi_{p_0}(x, y) \Rightarrow \varphi \}$, alors $H \subseteq \triangle_\forall(a_0, M_0)$. Comme $M \in K_1(\Sigma)$ (car d'après le lemme 4.2.1.6, $K(\Sigma) \subseteq K_1(\Sigma)$), alors $M \models \exists y \varphi_{p_0}(b_0, y)$. Par cette méthode on construit une copie de M_0 dans M. Donc on a bien P2.

□

Fait2. Dans le cas où on a P1 , soit $\psi(\overline{x})$ la formule qui vérifie la propriété énoncée dans P1 et soit $n = |\overline{x}|$. Soit

$$\Gamma_n = \{p(\overline{x}) \in \Gamma_1 \mid \text{il existe } M \in K(\Sigma), \text{ et } \overline{a} \in M \text{ tel que } \triangle_\forall(\overline{a}, M) = p(\overline{x}) \text{ et } M \models \psi(\overline{a})\}$$

Alors $|\Gamma_n| \geq \chi_1$.

Démonstration. On remarque d'abord que Γ_n n'est pas vide car ψ est consistante avec Σ. Supposons que Γ_n est dénombrable. Soit L_A un fragment contenant les formules $\Phi_p = (\bigvee_{\varphi \in p} \neg\varphi)$, $p \in \Gamma_n$, et les formules Ψ_m. On a pour tout $p \in \Gamma_n$, $p \notin \Gamma_2$. Donc il existe un modèle M qui est (Σ, L_A, P)-générique tel que M omet tout les $p \in \Gamma_n$. Mais M est Σ-e.c., donc $M \models \exists \overline{x} \psi(\overline{x})$, donc il existe $\overline{b} \in M$, tel que $M \models \psi(\overline{a})$, soit $p_0 = \triangle_\forall(\overline{a}, M)$, alors $p_0 \in \Gamma_n$ et il est réalisé dans M. Contradiction. D'où $|\Gamma_n| \geq \chi_1$.

□

Si T est une théorie de $L_{\omega_1\omega}$, on désigne par $S_n(T)$ l'ensemble des n-types complets de T résalisés dans des modèles dénombrables de T. Pour plus de détails nous renvoyons à [25].

D'après le lemme 4.2.1.7, il existe une formule $\phi \in L_{\omega_1\omega}$ telle que : $(G \in K_1(\Sigma)$) si et seulement si $G \models \phi$ et $|G| \leq \chi_0$. Posons $\Pi = \{\phi\}$. Comme $|\Gamma| \geq \chi_1$ on voit que $S_n(\Pi) \geq \chi_1$. On va utiliser le théorème suivant :

Théorème 4.2.1.8 (Corollary 2.4 dans [25]). *Si T est une théorie dénombrable de $L_{\omega_1\omega}$, alors $S_n(T)$ est ou bien dénombrable ou bien de cardinal 2^{χ_0}.*

Par conséquent on voit que $S_n(\Pi) = 2^{\chi_0}$. Comme chaque modèle dénombrable réalise au plus un nombre dénombrable de types, alors $K_1(\Sigma)$ a 2^{χ_0} groupes deux à deux non isomorphes et donc ces groupes vérifient pour toute formule existentielle ψ, $G \models \forall \overline{x}(\psi(\overline{x}) \Longleftrightarrow \bigwedge Res_\psi(\overline{x}))$.

□

Remarque. Observons que les raisonnements précédents sont applicable à des classes plus larges de modèles.

Rappelons qu'un énoncé ϕ de $L_{\omega_1\omega}$ est dit $\forall\vee\exists$ s'il est de la forme $\forall\overline{x}\bigvee_{i\in\omega}\varphi_i(\overline{x})$ où φ_i sont des formules existentielles primitives.

Une théorie T de $L_{\omega_1\omega}$ est dite $\forall\vee\exists$ si tout énoncé de T est $\forall\vee\exists$.

Alors on a la proposition suivante :

Proposition 4.2.1.9. *Soit T une théorie $\forall\vee\exists$ dénombrable de $L_{\omega_1\omega}$ et ayant la PP. Soit $K_1(T)$ la classe suivante :*

$$\{M \models T, |M| \leq \chi_0 \mid \textit{pour toute formule existentielle } \psi,\ M \models \forall\overline{x}(\psi(\overline{x}) \Longleftrightarrow \bigwedge Res_\psi(\overline{x}))\}$$

Alors une des deux propriétés suivantes est vraie :

(1) *Il existe un modèle dénombrable e.c. de T qui se plonge dans tous les modèles de $K_1(T)$.*

(2) *T a 2^{χ_0} modèles e.c. dénombrables deux à deux non isomorphes et qui appartiennent à $K_1(T)$.*

Schéma de démonstration. Soit $M(T)$ la classe des modèles de T. Soit L_A un fragment contenant la théorie T. Soit Φ l'ensembles des formules sans quantificateurs. On considère P l'ensemble des *ensembles finis* $p \subset \Phi(C)$ de $K(T)$ comme ensemble de conditions.

Dans ce cas la proposition 4.2.1.5 reste vraie i.e. tout modèle $(K(T), L_A, P)$-générique est un modèle de T et il est e.c. (corollaire 2.2. dans [16]).

Comme T a la PP alors la proposition 4.2.1.3 est aussi valable pour $K(T)$.

Quant au lemme 4.2.1.6 on voit clairement qu'il reste vrai. De même pour le lemme 4.2.1.7, il suffit de remplacer φ par T.

Alors il n'est pas très difficile de voir que la démonstration de la proposition 4.2.1.4 reste vraie.

□

4.3 Les groupes ayant $\mathcal{P}$

Cette section traite quelques propriétés générales des groupes ayant $\mathcal{P}$.

4.3.1 Quelques propriétés simples

Proposition 4.3.1.1.

(1) *Soit G un groupe expansif commutatif, alors G est fini.*

(2) *Un groupe résiduellement fini expansif est localement fini, en particulier un groupe libre non trivial n'est pas expansif.*

(3) *Soit G un groupe ayant $\mathcal{P}$ alors on a :*

i) G se plonge dans un groupe de présentation finie.

ii) G se plonge dans tous les groupes e.c.

(4) *La théorie existentielle d'un groupe qui vérifie (*), de type fini, est récursivement énumérable.*

(5) *Soit G_0 un groupe finiment expansif. Alors il existe un groupe G_1 finiment expansif de type fini tel que $G_1 \hookrightarrow G_0 \hookrightarrow G_1$.*

(6) *Tout groupe finiment expansif se plonge dans un groupe de présentation finie ayant un problème des mots résoluble.*

(7) *Soit G un groupe expansif. Alors $G = *_{i\in\omega} G_i$ où G_i se plonge dans un groupe de type fini ayant (**).*

(8) *Le produit cartésien de deux groupes ayant la propriété (**) a la propriété (**).*

Lemme 4.3.1.2. *Pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$ il existe une formule existentielle $\varphi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ vérifiant la propriété suivante :*

Pour tout groupe G et pour toute suite $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m$ de G, si $G_0 =< a_1, ..., a_n >$, $G_1 =< b_1, ..., b_m >$ et $G_2 =< a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m >$, alors on a :

$G_2 = G_0 \times G_1$ si et seulement si $\varphi(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)$ est satisfaite dans une extension de G.

Démonstration. Soit $\Gamma(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ l'ensemble des formules suivantes :

$$x_i y_j = y_j x_i$$
$$w(x_1, ..., x_n) = w(y_1, ..., y_n) \Rightarrow w(x_1, ..., x_n) = w(y_1, ..., y_n) = e$$

Alors on voit que Γ est récursivement énumérable.

Il est clair aussi que si G vérifie $\Gamma(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)$ alors $G_2 = G_0 \times G_1$.

D'après le théorème de Ziegler il existe une formule existentielle primitive $\varphi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ telle que Res_φ est équivalente à $\Gamma(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$.

Il est clair que si $\varphi(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)$ est satisfaite dans une extension de G alors $G_2 = G_0 \times G_1$.

Soit maintenant G un groupe tel que $G_2 = G_0 \times G_1$. Comme G satisfait $\Gamma(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)$ alors G satisfait Res_φ. Par conséquent dans le langage $\mathfrak{L} = L(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$, $(G; a_1, ..a_n, b_1, ..., b_m)$ est modèle de $Res_\varphi(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)$ (qui n'est que l'ensemble des conséquences universelles modulo T_{gp} de $\varphi(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)$). Par conséquent d'après une propriété bien connue en théorie des modèles $(G; a_1, ..a_n, b_1, ..., b_m)$ se plonge dans un modèle de $T_{gp} \cup \{\varphi(a_1, ...a_n, b_1, ..., b_m\}$. Par conséquent il existe une extension de G qui vérifie $\varphi(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)$.

□

Démonstration de la proposition 4.3.1.1.

(1) Soit G un groupe commutatif expansif. Alors il existe une théorie existentielle Γ vraie dans G telle que G se plonge dans tout groupe qui vérifie Γ. Toute formule ψ de Γ est vraie dans G, donc dans un groupe de type fini commutatif, donc dans un groupe fini commutatif, alors Γ est vraie dans un produit libre $\star_i G_i$ où G_i est fini commutatif. D'après le théorème de Kurosh (cf.[17]) G est produit libre de groupes finis commutatifs avec un groupe libre. Par conséquent on voit que G est forcement fini.

(2) En raisonnant comme dans (1) et comme G est résiduellement fini on voit que Γ est vraie dans $K = \oplus_{i\in\omega} G_i$ où G_i est fini. Donc G se plonge dans K et comme K est localement fini alors G l'est aussi. [1]

(3) *i)* On voit qu'un groupe ayant $\mathcal{P}$ a (*). Soit G un groupe ayant (*) alors il existe une théorie existentielle Γ telle que G se plonge dans tout groupe qui vérifie Γ. La remarque de la page 14 entraîne que G se plonge dans un groupe de présentation finie.

(3) *ii)* Découle de la proposition 2.1.2 (2).

(4) Un groupe G de type fini ayant (*) a un problème des mots résoluble (cf. théorème 4.1.1). Soit $a_1, ..., a_n$ un système de générateur de G . Etant donné que G a un problème des mots résoluble l'ensemble suivant de formules :

$$\left\{ \bigwedge_{i=1,...,m} W_i(w_1(a_1,...,a_n),...,w_l(a_1,...,a_n)) = e \wedge \bigwedge_{j=1,...,p} V_j(w_1(a_1,...,a_n),...,w_q(a_1,...,a_n)) \neq e \right\}$$

est récursivement énumérable. Par conséquent l'ensemble :

$$\left\{ \exists x_1 ... \exists x_n \bigwedge_{i=1,...,m} W_i(x_1,...,x_l) = e \wedge \bigwedge_{j=1,...,p} V_j(x_1,...,x_q) \neq e \right\}$$

est récursivement énumérable. Par conséquent l'ensemble des formules existentielles est récursivement énumérable.

(5) Comme G_0 est finiment expansif, alors il existe une formule existentielle $\exists x_1 ... \exists x_n \psi(x_1, ..., x_n)$ vraie dans G_0 telle que : si $G \models \exists x_1 ... \exists x_n \psi(x_1, ..., x_n)$ où ψ est sans quantificateurs, alors $G_0 \hookrightarrow G$.

Donc il y a des éléments $a_1, ..., a_n \in G_0$ tels que $G_0 \models \psi(a_1, ..., a_n)$. Soit $G_1 =< a_1, ..., a_n >$. Alors d'un côté on a $G_1 \hookrightarrow G_0$ et de l'autre comme $G_1 \models \exists x_1 ... \exists x_n \psi(x_1, ..., x_n)$, alors $G_0 \hookrightarrow G_1$. Il clair que G_1 est finiment expansif, puisque si $G \models \exists x_1 ... \exists x_n \psi(x_1, ..., x_n)$, alors $G_0 \hookrightarrow G$, donc $G_1 \hookrightarrow G$.

(6) Cela découle de (5), (3) et du théorème de Neumann-Macintyre.

(7) Soit G un groupe expansif. Alors il existe une théorie existentielle Γ vraie dans G telle que G se plonge dans tout groupe qui vérifie Γ et G est dénombrable. Comme toute formule ψ de Γ est vraie dans G par conséquent dans un sous-groupe de type fini de G, Γ est vraie dans un produit libre $\star_i G_i$ où G_i parcourt l'ensemble de sous-groupes de type fini de G. Comme G se plonge dans tous les groupes e.c., alors les G_i ont un problème des mots résoluble. On voit donc que G se plonge dans $\star_i G_i$ et d'après le théorème de Kurosh, $G \cong \mathbb{F} * (*_{i\in\omega} K_i)$ où $\mathbb{F}$ est un groupe libre (dénombrable), et K_i est l'intersection de G avec un conjugué d'un certain G_j. Par conséquent on voit que K_i (ainsi que $\mathbb{F}$)se plongent dans un groupe de type fini ayant un problème des mots résoluble.

(8) Soient G_1 et G_2 deux groupes ayant (**) et soient ψ_1 et ψ_2 deux énoncés existentiels consistants (qu'on peut supposer primitifs) tels que G_i se plonge dans tout groupe qui vérifie ψ_i. Ecrivons $\psi_1 = \exists x_1 ... \exists x_n \varphi_1(x_1, ..., x_n)$ et $\psi_2 = \exists y_1 ... \exists y_m \varphi_2(y_1, ..., y_m)$ où φ_1 et φ_2 sont sans quantificateurs. Soit $\phi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ la formule que donne le lemme 4.3.1.2. Posons

$$\psi = \exists x_1 ... \exists x_n \exists y_1 ... \exists y_m (\varphi_1(x_1, ..., x_n) \wedge \varphi_2(y_1, ..., y_m) \wedge \phi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m))$$

[1] On désigne par $\oplus_{i\in\omega} G_i$ le produit faible des G_i.

Alors il est clair que ψ est consistante et qu'elle vérifie les propriétés désirées.

□

Remarque. On ne peut avoir un lemme analogue au lemme 4.3.1.2 où on remplace le produit cartésien par le produit libre. Plus précisément il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il n'existe pas de formule existentielle $\phi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ qui vérifie les conclusions du lemme 4.3.1.2 en remplaçant le produit cartésien par le produit libre.

Cela découle du théorème 8.1 de [11]. En effet, d'après ce théorème, *il existe un groupe e.c. M et un groupe de type fini G tel que $G \in \mathcal{A}ge(M)$ et tel que $G * H \notin \mathcal{A}ge(M)$ pour tout groupe non trivial H.*

Comme G est de type fini alors il existe n tel que G est engendré par n éléments $a_1, ...a_n$. Supposons qu'il existe une formule existentielle $\phi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ qui vérifie les conclusions du lemme 4.3.1.2 en remplaçant le produit cartésien par le produit libre. Soit H un groupe de type fini ayant un problème des mots résoluble engendré par m éléments. Soit $\vartheta(y_1, ..., y_m)$ existentielle consistante telle que si K vérifie $\vartheta(b_1, ..., b_m)$ alors $< b_1, ..., b_m >$ est isomorphe à H. Soit $K = M * L$ avec $L \models \vartheta(b_1, ..., b_m)$ où $b_1, ..., b_m$ sont des éléments de L. Alors la formule $\phi(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)$ est satisfaite dans une extension de K et par conséquent la formule $\exists y_1 ... \exists y_m \phi(a_1, ..., a_n, y_1, ..., y_m) \wedge \vartheta(y_1, ..., y_m)$ est satisfaite dans une extension de M. Comme M est e.c. alors $M \models \exists y_1 ... \exists y_m \phi(a_1, ..., a_n, y_1, ..., y_m) \wedge \vartheta(y_1, ..., y_m)$ et par conséquent $G * H$ se plonge dans M, contradiction.

4.3.2 Exemples

Proposition 4.3.2.1.

(1) *Tout groupe fini est finiment expansif.*

(2) *Tout groupe de présentation finie simple est finiment expansif.*

(3) *Tout groupe abélien dénombrable a la propriété (**).*

(4) *Le produit cartésien d'un groupe finiment expansif avec un groupe de présentation finie simple est finiment expansif.*

(5) *Le produit libre dénombrable de groupes finis a la propriété (**).*

(6) *Le produit faible d'une famille dénombrable de groupes finis a la propriété (**).*

Lemme 4.3.2.2. *Il existe un groupe K dénombrable commutatif ayant un système de générateur récursif par rapport auquel il a un problème des mots résoluble et tel que tout groupe commutatif dénombrable se plonge dans K.*

Démonstration. Soit $\pi : \omega \longrightarrow \omega$, la fonction récursive qui associe à chaque $n \in \omega$ le n-ième nombre premier π_n. Soit $L = (\mathbb{Q})^{(\chi_0)} \oplus [\oplus_{i \in \omega} (\mathbb{Z}[\pi_i^{\infty}])^{(\chi_0)}]$. Il n'est pas difficile de voir que L a un problème des mots résoluble.

Soit G un groupe commutatif dénombrable, alors G se plonge dans un groupe commutatif divisible G_1. D'après un résultat bien connu de la théorie des groupes commutatifs le groupe G_1 est isomorphe à un sous-groupe de L et donc le groupe G se plonge dans L. Comme L a un problème des mots résoluble la démonstration est terminée.

□

Démonstration de la proposition 4.3.2.

(1) Evidente.

(2) Soit H un groupe simple de présentation finie $W(\overline{a})$. Alors la formule $\exists\overline{x}(W(\overline{x}) \wedge x_1 \neq e)$ est vraie dans H et tout groupe qui la vérifie contient une copie de H, car H est simple.

(3) D'après le lemme 4.3.2, tout groupe abélien dénombrable G se plonge dans un groupe K dénombrable ayant un problème des mots résoluble. D'après le théorème de Boone-Higman K se plonge dans un groupe simple S qui se plonge à son tour dans un groupe de présentation finie H. Soit $W(\overline{a})$ une présentation finie de H et s un élément non nul de S. Alors on voit que tout groupe qui vérifie l'énoncé $\exists\overline{x}(W(\overline{x}) \wedge s \neq e)$ contient une copie de K et par conséquent une copie de G et donc G a la propriété (**).

(4) Soit G un groupe finiment expansif et H un groupe de présentation finie $W(\overline{a})$ et simple. Soit $\psi = \exists x_1 ... \exists x_n \varphi(x_1, ..., x_n)$ où φ est sans quantificateurs, vraie dans G, et telle que tout groupe qui vérifie ψ contient une copie de G. Soit

$$\phi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = (\varphi_1(x_1, ..., x_n) \wedge (W(y_1, ..., y_m) \wedge y_1 \neq e) \bigwedge_{i,j} x_i y_j = y_j x_i)$$

On voit que l'énoncé $\vartheta = \exists\overline{x}\exists\overline{y}\phi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ est vrai dans $G \times H$. Montrons que $G \times H$ se plonge dans tout groupe qui vérifie ϑ. Soit K un groupe qui vérifie ϑ, alors il existe des éléments $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in K$ tels que $K \models \phi(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)$, par conséquent on voit que le sous-groupe $< b_1, ..., b_m >$ est isomorphe à H. Soit $\alpha \in < b_1, ..., b_m > \cap < a_1, ..., a_n >$, comme $a_i b_j = b_j a_i$ on voit que $\alpha \in Z(H)$ et comme H est simple alors $\alpha = e$. Il en résulte que $< a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m > \cong < a_1, ..., a_n > \oplus < b_1, ..., b_m >$. Comme $< a_1, ..., a_n >$ vérifie ψ il contient une copie de G par conséquent on voit que $G \times H$ se plonge dans K.

(5) Le produit libre dénombrable de groupes finis a la propriété (**). Soit $(G_i)_{i\in\omega}$ une liste récursivement énumérable de tous les groupes finis. Alors on voit que le groupe $K = *_{i\in\omega} G_i$ a un problème des mots résoluble. D'après le théorème de Boone-Higman K se plonge dans un groupe simple S qui se plonge à son tour dans un groupe de présentation finie H. Soit $W(\overline{a})$ une présentation finie de H et s un élément non nul de S. Alors on voit que tout groupe qui vérifie l'énoncé $\exists\overline{x}(W(\overline{x}) \wedge s \neq e)$ contient une copie de K donc K a la propriété (**).

(6) La démonstration est identique à celle de (5) en remplaçant $*_{i\in\omega} G_i$ par $\oplus_{i\in\omega} G_i$.

□

4.4 Les groupes ayant $\mathcal{P}$ dans la théorie des groupes commutatifs

Dans cette section la propriété $\mathcal{P}$ est relative à la théorie des groupes commutatifs.

Proposition 4.4.1. *Soit G un groupe commutatif de type fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *G est fini.*

(2) *G est finiment expansif.*

(3) *G est expansif.*

(4) *G a la propriété (*).*

(5) *G a la propriété (**).*

(6) *G se plonge dans tous les groupes commutatifs e.c.*

Démonstration.

(1)⇒(2) Evidente.

(2)⇒(3) Evidente.

(3)⇒(4) Evidente.

(4)⇒(5) Découle du Corollaire 2.3.2.

(5)⇒(6) Evidente.

(6)⇒(1) Si G se plonge dans tous les groupes commutatifs e.c., alors G est de torsion (cf. la remarque de la page 28). Mais un groupe commutatif de torsion et de type fini est fini.

□

Proposition 4.4.2. *Soit G un groupe commutatif dénombrable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *G est somme directe de groupes cycliques finis.*

(2) *G est expansif.*

(3) *G a la propriété (*).*

Lemme 4.4.3. *Soient $m, n \in \omega$, $m \geq 1, n \geq 1$. Alors il existe $r(m,n) \in \omega$ tel que : pour tout ensemble X tel que $|X| = r(m,n)$ et pour toute suite de 2-coloriages $\chi_1, ..., \chi_m$ de X il existe un ensemble $Y \subseteq X$ tel que $|Y| = n$ et $\chi_{i|Y}$ est constant pour tout $i = 1, ..., m$.*

Démonstration. Nous nous fixons un entier $n \geq 1$ et démontrons le lemme par récurrence sur m.

Pour $m = 1$ c'est le principe des tiroirs, on peut prendre $r(1,n) = 2n - 1$.

Pour $m+1$: Soient $l = 2r(m,n) - 1$, un ensemble X tel que $|X| = l$ et une suite de 2-coloriages $\chi_1, ..., \chi_m, \chi_{m+1}$. D'après le principe des tiroirs il existe Y tel que $|Y| = r(m,n)$ et tel que $\chi_{m+1|Y}$ est constant. D'après l'hypothèse de récurrence il existe $Y' \subseteq Y$ tel que $|Y'| = n$ et $\chi_{i|Y}$ est constant pour tout $i = 1, ..., m$. Donc $|Y'| = n$ et $\chi_{i|Y}$ est constant pour tout $i = 1, ..., m+1$.

□

Démonstration de la proposition 4.4.2.

(1) ⇒(2). Soit G un groupe commutatif dénombrable qui s'écrit comme somme directe de groupes cycliques finis. Pour tout entier premier p on désigne par $D(p)$ la composante p-primaire

de G. Soit $H \models Th_{\exists}(G)$. Pour montrer que $G \hookrightarrow H$, il suffit de montrer que toute composante primaire $D(p)$ se plonge dans H.

On peut écrire $D(p) = \oplus_{i\in\alpha} A_i$ avec A_i un groupe de la forme $\mathbb{Z}_{p^n}$ et où on peut supposer que α est infini dénombrable i.e $\alpha = \omega$. Soit I et J les deux ensembles suivants :

$$I = \{i \in \omega \mid l'ensemble\,\{j \mid A_i \hookrightarrow A_j\}\ est\,fini\}$$

$$J = \{i \in \omega \mid l'ensemble\,\{j \mid A_i \hookrightarrow A_j\}\ est\,infini\}$$

Alors on a $I \cup J = \omega$ et $I \cap J = \emptyset$. Par conséquent $D(p) = (\oplus_{i\in I} A_i) \oplus (\oplus_{j\in J} A_j)$.

Fait 1. *I est fini.*

Supposons que I est infini. Soit $l = min\{n_k \mid A_k = \mathbb{Z}_{p^{n_k}},\ k \in I\ \}$. Soit j_0 tel que $A_{j_0} = \mathbb{Z}_{p^l}$. Alors $j_0 \in I$ et on a $A_{j_0} \hookrightarrow A_k$ pour tout $k \in I$. Comme I est infini alors $j_0 \in J$, contradiction avec $I \cap J = \emptyset$.

□

Fait 2. *Soit H un groupe commutatif tel que $H \models Th_{\exists}(G)$, alors $\oplus_{i\in I} A_i \hookrightarrow H$.*

Comme I est fini et les A_i sont finis alors le groupe $\oplus_{i\in I} A_i$ est fini et donc finiment expansif.

□

Fait 3. *Soient $n, k \in \omega$, $n \geq 1, k \geq 1$. Alors il existe une formule existentielle $\psi_{n,k} = \exists x_1 .... \exists x_n \varphi_{n,k}(x_1, ..., x_n)$ telle que pour tout groupe commutatif K et $a_1, ..., a_n \in K$ on a :*

$$K \models \varphi_{n,k}(a_1, ...a_n)\ si\ et\ seulement\ si\ (< a_1, ..., a_n >= \oplus_{i=1,n} < a_i >) \wedge \bigwedge_{i=1,...,n} (ordre(a_i) = k)$$

En effet il suffit de prendre pour $\varphi_{n,k}(x_1, ..., x_n)$ la formule :

$$(\bigwedge_{0<|\alpha_i|<k} (\sum \alpha_i x_i \neq 0)) \wedge \bigwedge_{i=1,...,n} (x_i^k = e \wedge x_i^{k-1} \neq e \wedge .... \wedge x_i^2 \neq e \wedge x_i \neq e)$$

□

Soit $H \models Th_{\exists}(G)$, donc on a $\oplus_{i\in I} A_i \hookrightarrow H$, pour simplifier supposons que $\oplus_{i\in I} A_i \subseteq H$. Posons $J = \{j_t \mid t \in \omega\}$. Pour montrer que $D(p) \hookrightarrow H$, il suffit de montrer que H contient une suite $(B_t : t \in \omega\ )$ de sous-groupes vérifiant :

1. $B_t \cong A_{j_t}$.
2. Pour tout $n \in \omega$, $< B_0, ..., B_n, \bigcup_{i\in I} A_i >= (\oplus_{t=0,n} B_t) \oplus (\oplus_{i\in I} A_i)$.

Pour cela, on raisonne par récurrence sur t en utilisant le lemme 4.4.3.

Pour $t = 0$.

Comme $j_0 \in J$, alors $\{j \mid A_{j_0} \hookrightarrow A_j\}$ est infini. Le groupe $(A_{j_0})^{(\chi_0)}$ est isomorphe à un sous-groupe de G. On considère les énoncés $\psi_{n,k}$ du fait 3 avec $k = |A_{j_0}|$, fixé une fois pour toute dans ce paragraphe. Alors pour chaque $n \in \omega$, il existe des éléments $x_1, ..., x_n$ dans G tels que

$$((< x_1, ..., x_n >= \oplus_{i=1,...,n} < x_i > \wedge \bigwedge_{i=1,n} ordre(x_i) = k)$$

Donc $G \models (\exists x_1 .... \exists x_n \varphi_{n,k}(x_1, ..., x_n))$. Donc $H \models (\exists x_1 .... \exists x_n \varphi_{n,k}(x_1, ..., x_n))$.

Soit $n = |I|$. Soit $m = \left|\{(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid 0 < |\alpha_i|, |\beta| < k\}\right|$. Alors $G \models \psi_{r(m,2)}$. ($r(m, 2)$ est le nombre trouvé au lemme 4.4.3). Donc $H \models \psi_{r(m,2)}$. Donc H contient une suite $b_1, ..., b_{r(m,2)}$ telle que

$< b_1, ..., b_{r(m,2)} >= \oplus_{i=1,r(m,2)} < b_i > \wedge \bigwedge_{i=1,r(m,2)} (ordre(b_i) = k)$

Posons pour chaque $i \in I$, $A_i =< a_i >$.

Soit pour chaque $(\overline{\alpha}, \beta) \in \{(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid 0 < |\alpha_i|, |\beta| < k\}$, le 2-coloriage suivant, défini sur l'ensemble $X = \left\{b_1, ..., b_{r(m,2)}\right\}$, par :

$$\chi_{\overline{\alpha},\beta}(b_i) = \begin{cases} 1 & si \sum \alpha_i a_i + \beta b_i \neq 0 \\ 0 & si\, non \end{cases}$$

Alors d'après le lemme 4.4.3. il existe dans X un sous-ensemble homogène $Y = \{b_{i_1}, b_{i_2}\}$. Supposons qu'il existe $\overline{\alpha}, \beta$ tels que $\chi_{\overline{\alpha},\beta}(b_{i_1}) = 0$, $\chi_{\overline{\alpha},\beta}(b_{i_2}) = 0$. Alors $\sum \alpha_i a_i + \beta b_{i_1} = 0$ et $\sum \alpha_i a_i + \beta b_{i_2} = 0$. Il en résulte $\beta b_{i_1} = \beta b_{i_2}$ et comme $0 < |\beta| < k$ alors $\beta b_{i_2} \neq 0$ et donc $< b_{i_1} > \cap < b_{i_2} > \neq \{e\}$, contradiction. Donc $\forall \overline{\alpha}, \forall \beta$, $\chi_{\overline{\alpha},\beta}(b_{i_1}) = 1$. Donc $< b_{i1} > \cap \oplus_{i \in I} A_i = \{e\}$. Alors on pose $B_0 =< b_{i_1} >$.

□

Pour $t + 1$.

Soit $B_0, ..., B_t$ la suite déjà construite. Soit $n = |I| + t + 1$. On considère, comme précédemment, les énoncés $\psi_{n,k}$ du fait 3 avec $k = \left|A_{j_{t+1}}\right|$, fixé une fois pour toute dans ce paragraphe.

Soit $m = \left|\{(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid 0 < |\alpha_i|, |\beta| < k\}\right|$. De la même façon on a $G \models \psi_{r(m,2)}$. Donc $H \models \psi_{r(m,2)}$. Donc H contient une suite $b_1, ..., b_{r(m,2)}$ telle que

$$< b_1, ..., b_{r(m,2)} >= \oplus_{i=1,r(m,2)} < b_i > \wedge \bigwedge_{i=1,r(m,2)} (ordre(b_i) = k)$$

Posons pour chaque $L_i \in \{B_0, ..., B_t\} \cup \{A_i \mid i \in I\}$, $L_i =< a_i >$.

Soit pour chaque $(\overline{\alpha}, \beta) \in \{(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid 0 < |\alpha_i|, |\beta| < ordre(A_{j_{t+1}})\}$, le 2-coloriage suivant, défini sur $X = \left\{b_1, ..., b_{r(m,2)}\right\}$, par :

$$\chi_{\overline{\alpha},\beta}(b_i) = \begin{cases} 1 & si \sum \alpha_i a_i + \beta b_i \neq 0 \\ 0 & si\, non \end{cases}$$

Alors d'après le lemme 4.4.3 il existe dans X un sous-ensemble homogène $Y = \{b_{i_1}, b_{i_2}\}$. Supposons qu'il existe $\overline{\alpha}, \beta$ tels que $\chi_{\overline{\alpha},\beta}(b_{i_1}) = 0$, $\chi_{\overline{\alpha},\beta}(b_{i_2}) = 0$. Alors $\sum \alpha_i a_i + \beta b_{i_1} = 0$ et $\sum \alpha_i a_i + \beta b_{i_2} = 0$. Il en résulte $\beta b_{i_1} = \beta b_{i_2}$ et comme $0 < |\beta| < ordre(A_{j_{t+1}})$ alors $\beta b_{i_2} \neq 0$ et donc $< b_{i_1} > \cap < b_{i_2} > \neq \{e\}$, contradiction. Donc $\forall \overline{\alpha}, \forall \beta$, $\chi_{\overline{\alpha},\beta}(b_{i_1}) = 1$. Donc $< b_{i1} > \cap (\oplus_{l=1,t} B_l) \oplus_{k \in I} A_k) = \{e\}$.

□

(2)⇒(3). Evidente.

(3) ⇒(1). Soit G un groupe commutatif ayant (*). Donc il existe une théorie Γ existentielle telle que G se plonge dans tout groupe commutatif qui vérifie Γ. On voit comme dans la démonstration de la proposition 4.3.1.1(1) que G est sous-groupe d'une somme directe de groupes commutatifs finis, donc que G est somme directe de groupes commutatifs cycliques finis.

□

Remarques.

(1) A.Khelif a donné une autre démonstration de l'implication **(1)⇒(2)** de la proposition 4.4.2.

(2) En utilisant la même méthode que celle utilisée dans la démonstration de **(1)⇒(2)** on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.4.4. *Soit $(A_i)_{i\in\omega}$ une suite de groupes finis. Alors il existe une théorie existentielle T vérifiant : tout groupe G qui vérifie T contient une suite de sous-groupes $(B_i)_{i\in\omega}$ vérifiant : $B_i \cong A_i$ et $B_i \cap B_j = \{e\}$.*

(3) Les propriétés de la proposition 4.4.2 ne sont pas équivalentes à la propriété suivante : *G se plonge dans tous les groupes e.c. commutatifs*. En effet on a :

Proposition 4.4.5. *Il existe un groupe commutatif qui se plonge dans tous les groupes e.c. commutatifs mais qui n'a pas (*).*

Démonstration. Il suffit de considérer le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$: il est bien connu que les groupes commutatifs e.c. sont les groupes commutatifs divisibles contenant une copie de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\chi_0)}$. (cf.[13] ou notre remarque de la page 28).

□

Chapitre 5

Embeddings which preserve the center

V.N.Remeslennikov proposed in 1976 the following problem : *is any countable abelian group a subgroup of the center of some finitely presented group* ? The problem is listed recently (cf. [10][31]) as open. However in 1980, B.M.Hurley [14] announced, without proof, the following proposition which yields a positive answer to the above problem : *a necessary and sufficient condition for an abelian group to be the center of some finitely presented group is that it should be recursively presentable.* In this chapter we prove various results on embeddings in finitely presented groups which preserve the center, including the proposition stated by B.M.Hurley and the fact that there exists *a finitely presented group H with soluble word problem such that every countable abelian group is embeddable in the center of H.* This gives of course a positive answer to the question raised by V.N.Remeslennikov.

The main results of this chapter are :

Theorem I *Let G be a countable group. Then G is embeddable in a finitely generated group K such that $Z(G) = Z(K)$ and :*

(1) *If G is recursively presented and $Z(G)$ is recursively enumerable in G, then we can take K recursively presented.*

(2) *If G has a soluble word problem and $Z(G)$ has a generalized soluble word problem in G then we can take K with soluble word problem.*

Theorem II *Let G be a finitely generated recursively presented group. Then G is embeddable in a finitely presented group K such that $Z(G) = Z(K)$ and if G has a soluble word problem then we can take K with soluble word problem.*

Corollary 1 *An abelian group is the center of a finitely presented group if and only if it is recursively presentable.*

Corollary 2 *An abelian group is the center of a finitely presented group with soluble word problem if and only if it has a presentation admitting a soluble word problem.*

Corollary 3 *There exists a finitely presented group H with soluble word problem such that every countable abelian group is embeddable in the center of H.*

5.1 Introduction

The goal of this introduction is to fix definitions that are going to be used and to present the small cancellation theory over amalgamated free products to make the paper accessible to non experts. We work in the following context. Let G_1, G_2 be groups and A a common subgroup of G_1 and G_2. One considers the free product of G_1 and G_2 amalgamating the subgroup A and one notes it $F = G_1 *_A G_2$. We call G_1 and G_2 the factors of F. Then for every element $w \in F$ such that $w \notin A$ there exists a sequence $(g_1, ..., g_n)$ of elements of $G_1 \cup G_2$ such that $w = g_1...g_n$ and :

(i) g_i, g_{i+1} come from different factors.

(ii) $g_i \notin A$.

A sequence which satisfies the conditions *(i)-(ii)* is called reduced. It well known that if $(g_1, ..., g_n)$, $(h_1, ..., h_m)$ are reduced sequences such that $g_1...g_n = h_1...h_m$ then $m = n$. Then for every element $w \in F$ we define the length of w denoted $|w|$ by : $|w| = 0$ if $w \in A$ and $|w| = n$ (if $w \notin A$) where n is the length of some reduced sequence $(g_1, ..., g_n)$ such that $w = g_1...g_n$.

Let $w \in F$. A ***normal form*** of w is a sequence $(g_1, ..., g_n)$ such that if $w \in A$ then $n = 1$ and $w = g_1$ otherwise $(g_1, ..., g_n)$ is reduced and $w = g_1...g_n$.

Let $g = g_1...g_n$.We say that $g = g_1...g_n$ is in ***normal form*** if $(g_1, ..., g_n)$ is a normal form of g.

A normal form $(g_1, ..., g_n)$ of a word w is ***cyclically reduced*** if $n = 1$ or if g_n and g_1 are in different factors. Then a normal form of w is cyclically reduced if and only if all normal forms of w are cyclically reduced, which allows us to define cyclically reduced words.

A normal form $(g_1, ..., g_n)$ of a word w is ***weakly cyclically reduced*** if $n = 1$ or if $g_n g_1 \notin A$. Then a normal form of w is cyclically reduced if and only if all normal forms of w are cyclically reduced, which allows us to define weakly cyclically reduced words.

A subset W of F is ***symmetrized*** if :

(i) Every element of W is weakly cyclically reduced.

(ii) If $w \in W$ then $w^{-1} \in W$.

(iii) Every weakly cyclically reduced conjugate of every element of W is in W.

Let R be a subset of F such that every element of R is weakly cyclically reduced. The ***symmetrized closure*** *of* R, denoted by $W(R)$, is the smallest symmetrized subset of F which contains R. We denote by $W_0(R)$ the set of cyclically reduced conjugate of elements of $R \cup R^{-1}$.

One has the following lemma that summarizes some properties of normal forms and symmetrized sets :

Lemma 5.1.1. *Let $F = G_1 *_A G_2$ be a free product with amalgamation.*

(1) *Let R be a subset of F such that every element of R is weakly cyclically reduced. Then the symmetrized closure of R is the set of all weakly cyclically reduced conjugates of elements of $R \cup R^{-1}$.*

(2) *If $(g_1, ..., g_n)$, $(h_1, ..., h_n)$ are normal forms such that $g_1...g_n = h_1...h_n$, then there exists a sequence $(a_1, ..., a_n, a_{n+1})$ of elements of A such that $a_1 = a_{n+1} = e$ and for every $i = 1, ..., n$, $g_i = a_i h_i a_{i+1}^{-1}$.*

□

Let $u, v \in F$ with normal form $(u_1, ..., u_n)$ and $(v_1, ..., v_m)$ respectively. Let $g = uv$. We say that g is in ***semi-reduced form*** (u, v) if $u_n v_1 \notin A$. We say that g is in ***reduced form*** (u, v) if u_n, v_1 are in different factors.

The object of small cancellation theory is to see, when we have a normal subgroup N of F, what conditions insure that N does not have "short" elements and in particular guarantee $N \cap G_1 = N \cap G_2 = \{e\}$, so that in the quotient F/N "short" elements are not "hurt".

Let W be a subset of F. An element $b \in F$ is said to be a ***piece*** (relative to W) if there exists distinct elements $w_1, w_2 \in W$ such that $w_1 = bc_1$ and $w_2 = bc_2$ in semi-reduced form. This means that b is cancelled in the product $w_2^{-1}.w_1$.

For a positive real number λ we define the following condition :

$C'(\lambda)$: *if $w \in W$ is in semi-reduced form (b, c) where b is a piece then $|b| < \lambda |w|$. Furthermore, for every $w \in W$, $|w| > (1/\lambda)$.*

In practice, to verify that a set W with $W = W^{-1}$satisfies $C'(\lambda)$, one takes two elements w_1, w_2 of W such that $w_1 w_2 \neq e$ and one proves that the length of the word which is cancelled in the product $w_1 w_2$ is smaller than $\lambda |w_1|$ and $\lambda |w_2|$. Using normal forms this is equivalent to the following :

if $w_1 = a_m.a_{m-1}...a_1$ and $w_2 = b_1...b_n$ are in normal forms and $a_i...a_1.b_1...b_i \in G_1 \cup G_2$ then $i < \lambda m$, $i < \lambda n$. (Of course also the condition for every $w \in W$, $|w| > (1/\lambda)$).

We will use the following principal theorem :

Theorem 5.1.2 [17]. *Let $F = G_1 *_A G_2$ be a free product with amalgamation, W be a symmetrized subset of F and let N be the normal closure of W in F. Suppose that W satisfies $C'(\lambda)$ with $\lambda \leq \frac{1}{6}$. If $w \in N$, with $w \neq e$, then $w = usv$ in reduced form where there is a cyclically reduced $r \in W$, with $r = st$ in reduced form and $|s| > (1 - 3\lambda) |r|$.*

In particular, the natural map π: $F \to F/N$ embeds each factor of F.

□

We need also the following theorem which will be used frequently :

Theorem 5.1.3 [17] (The conjugacy Theorem). *Let $F = G_1 *_A G_2$ be a free product with amalgamation. Let $u = u_1...u_n$ be a cyclically reduced element of F where $(u_1, ..., u_n)$ is a normal form and $n \geq 2$. Then every cyclically reduced conjugate of u can be written as ava^{-1} where $a \in A$ and v is the product of some cyclic permutation of $(u_1, ..., u_n)$.*

□

Lemma 5.1.4. *Let $F = G_1 *_A G_2$ be a free product with amalgamation. Let λ,α be positive real numbers such that $\lambda \leq \alpha$. Let R be a subset of F which satisfies :*

(1) *Every element of R is cyclically reduced.*

(2) *For every $r \in R$, $\lambda|r| + 1 \leq \alpha\,|r|$, and $|r| > \frac{1}{\alpha}$.*

If $W_0(R)$ satisfies $C'(\lambda)$ then $W(R)$ satisfies $C'(\alpha)$.

Proof. Observe that since every element of R is cyclically reduced and for every $r \in R$, $|r| > \frac{1}{\alpha}$, then every element w of $W(R)$ satisfies $|w| > \frac{1}{\alpha}$.

By lemma 5.1.1, we know that the elements of $W(R)$ are the weakly cyclically reduced conjugates of elements of $R \cup R^{-1}$. Let $w_1, w_2 \in W(R)$ such that $w_1 w_2 \neq e$. We are going to prove that if some word is cancelled in the product $w_1 w_2$ then its length is smaller than $\alpha\,|w_1|$ and $\alpha\,|w_2|$.

We have to consider two cases : w_1,w_2 are not cyclically reduced, and the second case w_1 cyclically reduced and w_2 is not cyclically reduced. The other cases can be reduced to the previous cases or they are obvious as the case where w_1, w_2 are cyclically reduced.

Let $w_1 = a_1...a_n$ and $w_2 = b_1...b_m$ in normal form. Since w_1 and w_2 are weakly cyclically reduced we have $a_n.a_1 \notin A$ and $b_m.b_1 \notin A$.

Case (1) w_1 and w_2 are not cyclically reduced. We can write $w_1 = a_n^{-1}.(a_n a_1).a_2...a_{n-1}a_n$ and $w_2 = b_m^{-1}.(b_m b_1).b_2...b_{m-1}b_m$. Since $a_n.a_1 \notin A$ and $b_m.b_1 \notin A$, and a_n, a_1 are in the same factor, b_m, b_1 are in the same factor the elements $(a_n a_1).a_2...a_{n-1}$, $(b_m b_1).b_2...b_{m-1}$ are in reduced form and are cyclically reduced and we see that they are conjugates of elements of $R \cup R^{-1}$. Now consider how there can be cancellation in the product $w_1.w_2$. If there is no cancellation we have the result. If $|a_n.b_1| \leq 1$ then we see that the length of any piece is smaller than 1, and since $1 < \alpha\,|w_1|$, $1 < \alpha\,|w_2|$, we have the result. Now suppose that $a_n.b_1 \in A$ and let $\gamma = a_n.b_1$. We also see that $b_2...b_{m-1}.(b_m b_1)$ and $\gamma b_2...b_{m-1}.(b_m b_1)\gamma^{-1}$are cyclically reduced conjugates of some element of $R \cup R^{-1}$. Then :

$$w_1.w_2 = a_n^{-1}.((a_n a_1).a_2...a_{n-1})\gamma.b_2...b_{m-1}.(b_m b_1).b_1^{-1} =$$

$$a_n^{-1}.((a_n a_1).a_2...a_{n-1})\gamma.b_2...b_{m-1}.(b_m b_1).\gamma^{-1}.a_n$$

We denote r_1 the product $(a_n a_1).a_2...a_{n-1}$ and by r_2 the product $\gamma.b_2...b_{m-1}.(b_m b_1).\gamma^{-1}$. Then r_1 and r_2 are in $W_0(R)$. It is enough to look at pieces in the product $r_1 r_2$.

But $w_1.w_2 \neq e$, then $r_1 r_2 \neq e$ and by hypothesis $W_0(R)$ satisfies $C'(\lambda)$. If d is a piece in the product of r_1 and r_2 then $|d| < \lambda |r_1|$ and $|d| < \lambda |r_2|$. But it is not difficult to see that the corresponding piece in the product of w_1 and w_2 is of length $|d| + 1$. Then we have :

$$|d| + 1 < \lambda |r_1| + 1, \quad |d| + 1 < \lambda |r_2| + 1$$

also :

$$|d| + 1 < \alpha(|r_1| + 1), \quad |d| + 1 < \alpha(|r_2| + 1)$$

But $|w_1| = |r_1| + 1$ and $|w_2| = |r_2| + 1$. We have the result.

Case (2) w_1 **is not cyclically reduced and** w_2 **cyclically reduced.** The proof is similar to the previous one. In this case we see that $w_1 = a_n^{-1}.(a_n a_1).a_2...a_{n-1}a_n$ and $w_2 = b_1.b_2...b_{m-1}b_m$. As before since $a_n.a_1 \notin A$ and a_n, a_1 are in the same factor then the element $(a_n a_1).a_2...a_{n-1}$ is in reduced form and is a cyclically reduced conjugate of an element of $R \cup R^{-1}$. If there exists cancellation in the product of w_1 and w_2 then $a_n.b_1 \in A$. As before put $\gamma = a_n.b_1$. We have :

$$w_1.w_2 = a_n^{-1}.((a_n a_1).a_2...a_{n-1})\gamma.b_2...b_{m-1}.b_m.b_1.b_1^{-1} =$$

$$a_n^{-1}.((a_n a_1).a_2...a_{n-1})\gamma.b_2...b_{m-1}.b_m.b_1.\gamma^{-1}.a_n$$

We see also that $\gamma b_2...b_{m-1}.b_m.b_1\gamma^{-1}$ is a cyclically reduced conjugate of some element r of $R \cup R^{-1}$.

As in the previous case we see that if d is a piece in the product of $r_1 = (a_n a_1).a_2...a_{n-1}$ and $r_2 = \gamma.b_2...b_{m-1}.b_m.b_1.\gamma^{-1}$ then $|d| < \lambda |r_1|$ and $|d| < \lambda |r_2|$. But it is not difficult to see that the corresponding piece in the product of w_1 and w_2 is of length $|d| + 1$. Then we have :

$$|d| + 1 < \lambda |r_1| + 1, \quad |d| + 1 < \lambda |r_2| + 1$$

also :

$$|d| + 1 < \alpha(|r_1| + 1), \quad |d| + 1 < \alpha |r_2|$$

But $|w_1| = |r_1| + 1$ and $|w_2| = |r_2|$.

Hence $W(R)$ satisfies $C'(\alpha)$.

□

Lemma 5.1.5. *Let $F = G_1 *_A G_2$ be a free product with amalgamation such that $G_1 \neq A$ and $G_2 \neq A$. Then $Z(F) \subseteq Z(A)$.*

Proof. Let $g \in Z(F)$ and suppose that $|g| \geq 2$. Let $(g_1, ..., g_n)$ be a normal form of g. Since $g \in Z(F)$ we have $g.g_n^{-1} = g_n^{-1}.g$, hence $g_1...g_{n-1}.g_n^{-1}...g_2^{-1}.g_1^{-1}.g_n = e$. Since g_{n-1} and g_n are in different factors and $n \geq 2$, we see that $\left|g_1...g_{n-1}.g_n^{-1}...g_2^{-1}.g_1^{-1}.g_n\right| \geq 1$, which is a contradiction. Suppose $|g| = 1$. If $g \in G_1$, since $G_2 \neq A$ there exists $g' \in G_2 - A$, then $g.g'.g^{-1}.g'^{-1} = e$ which is a contradiction because the sequence (g, g', g^{-1}, g'^{-1}) is reduced. The same thing holds if $g \in G_2$. Hence $|g| = 0$. Hence $Z(F) \subseteq A$ and therefore $Z(F) \subseteq Z(A)$.

□

We finish this introduction with some properties (and definitions) of recursively presented groups and groups with soluble word problem. Let G be a countable group. We say that G is recursively presented if it is isomorphic to some group of the form $G' =< x_i : i \in \omega \mid P >$ where P is a recursively enumerable set of words over the set $X = \{x_i : i \in \omega\}$. We say that G has a soluble word problem if G is isomorphic to some group of the form $G' =< x_i : i \in \omega \mid P >$ where P is a recursively enumerable set of words over the set $X = \{x_i : i \in \omega\}$ and such that the group G' has soluble word problem relative to (X, P).

Let $G =< x_i : i \in \omega \mid P >$ and A be a subgroup of G. We say that A is recursively enumerable in G if the set of words $w(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$ such that $w(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) \in A$ is recursively enumerable. We say that A has a generalized soluble word problem in G if the set of words $w(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$ such that $w(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) \in A$ is recursive.

Lemma 5.1.6. *Let G be a finitely generated group.*

(1) *If G is recursively presented, then $Z(G)$ is recursively presented and $Z(G)$ is recursively enumerable in G.*

(2) *If G has a soluble word problem, then $Z(G)$ has a soluble word problem and also a generalized soluble word problem in G.*

Proof.

(1). Suppose that G is generated by $\{a_1, ..., a_n\}$. Let $W(y_1, ..., y_n)$ be the set of words over the set $\{y_1, ..., y_n\}$. Let :

$$V = \{w(y_1, ..., y_n) \in W(y_1, ..., y_n) \mid \ w(a_1, ..., a_n) \in Z(G)\}$$

Since G is recursively presented the set :

$$M = \{w(y_1, ..., y_n) \in W(y_1, ..., y_n) \mid \ w(a_1, ..., a_n) = e\}$$

is recursively enumerable. Hence the set :

$$N = \left\{w(y_1, ..., y_n) \in W(y_1, ..., y_n) \mid \ w(a_1, ..., a_n)a_i w^{-1}(a_1, ..., a_n)a_i^{-1} = e, \ i = 1, ..., n\right\}$$

is recursively enumerable and $N = V$. Then $Z(G)$ is recursively enumerable. Now let us show that $Z(G)$ is recursively presented. Let $(v_i(y_1, ..., y_n) : i \in \omega)$ be a enumeration of V. Let L be the set of words on $\{v_i \mid i \in \omega\}$, while looking at it like a set of variables.

It is then easy to see that the set :

$$K = \{w(v_{i_1}, ..., v_{i_m}) \mid w(v_{i_1}(a_1, ..., a_n), ..., v_{i_m}(a_1, ..., a_n)) = e\}$$

is recursively enumerable.

Let $X = \{x_i : i \in \omega\}$. If $w(v_{i_1}, ..., v_{i_m})$ is a word in L, let $w(x_{i_1}, ..., x_{i_m})$ denote the word obtained by replacing each v_{i_j} by x_{i_j}.

Let :

$$P = \{w(x_{i_1}, ..., x_{i_m}) \in L \mid w(v_{i_1}, ..., v_{i_m}) \in K\}$$

and let $H =< x_i : i \in \omega \mid P >$. Then we see that H is recursively presented and it is clear that it is isomorphic to $Z(G)$. Indeed, we have :

$H \models w(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = e$ if and only if $w(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) \in P$ if and only if $G \models w(v_{i_1}, ..., v_{i_m}) = e$

(2). The proof is similar to the previous one. Since G has a soluble word problem the set

$$V = \{w(y_1, ..., y_n) \in W(y_1, ..., y_n) \mid w(a_1, ..., a_n) \in Z(G)\}$$

is recursive and then $Z(G)$ has a generalized soluble word problem in G.

Similarly the set $P = \{w(x_{i_1}, ..., x_{i_m}) \mid w(v_{i_1}, ..., v_{i_m}) \in K\}$ is recursive and then the group $H =< x_i : i \in \omega \mid P >$ has a soluble word problem because $w(x_{i_1}, ..., x_{i_m}) = e$ in H if and only if $w(v_{i_1}, ..., v_{i_m}) \in K$ if and only if $w(v_{i_1}(a_1, ..., a_n), ..., v_{i_m}(a_1, ..., a_n)) = e$ in G if and only if $w(x_{i_1}, ..., x_{i_m}) \in P$.

□

We are going to use a particular case of some results of C.R.J.Clapham [8][9]. For this we will need the following definition : *let G be a finitely generated group and H a subgroup of G. We call H* ***strongly benign*** *($\mathcal{A}$-strongly benign in the vocabulary of C.R.J.Clapham) if the HNN-extension $G^* =< G, t \mid t^{-1}ht = h,\ h \in H >$ can be embedded in a finitely presented K with soluble word problem such that G and $< G, t >$ have a generalized soluble word problem in K.*

Lemma 5.1.7 (*Corollary 3.8.1 in* [8]). *Let G be a finitely generated group with soluble word problem and φ an recursive isomorphism of a subgroup A into G such that A and $\varphi(A)$ have generalized soluble word problem in G. Then the subgroup $< G, t^{-1}Gt >$ has a generalized soluble word problem in $G^* =< G, t \mid t^{-1}at = \varphi(a),\ a \in A >$.*

Lemma 5.1.8 (*Lemma 11.2 in* [9]). *A subgroup of finitely generated free group is strongly benign if and only if it is recursive.*

5.2 Preliminary propositions

Notation. Let $(u_1, ..., u_n)$ and $(v_1, ..., v_m)$ be a sequences. The notation $(u_1, ..., u_n) \leq (v_1, ..., v_m)$ means that there exists p such that $(u_1, ..., u_n) = (v_p, ..., v_{p+n-1})$.

Proposition 5.2.1. *Let $F = G_1 *_A G_2$ be a free product with amalgamation and R a subset of F which satisfies :*

(i) *Every element of R is cyclically reduced and every $r \in R$, satisfies $|r| > 12$.*

(ii) *For every $r \in R$ and for every normal form $(g_1, ..., g_n)$ of r there are no i, j, $i \neq j$ and $\alpha, \beta \in A$ such that $g_i^{-1} = \alpha g_j \beta$.*

(iii) *The symmetrized set $W(R)$ satisfies $C'(\lambda)$ with $\lambda \leq \frac{1}{9}$.*

Let N be the normal closure of R in F and $\pi : F \to (F/N)$ the natural map.
Then $\pi(Z(F)) = Z(F/N)$.

Remark. *We see that if $r \in R$ and if there exists a normal form $(g_1, ..., g_n)$ of r which satisfies the condition of (ii), then every other normal form $(h_1, ..., h_n)$ of r satisfies also the condition of (ii). It is not difficult to see also that the same property is true for any cyclic permutation of $(g_1, ..., g_n)$ and for any normal form for the inverse of r.*

Lemma 5.2.2. *Let $F = G_1 *_A G_2$ be a free product with amalgamation. Let $g = g_1...g_n$ in normal form, $n \geq 2$ and $t \in F$ such that $|t| \leq 1$. Suppose that $\left|g.t.g^{-1}\right| \geq 3$. Then there exists $i \in \{1, ..., n\}$ and $\alpha \in F$ such that $|\alpha| = 1$ and $g.t.g^{-1} = g_1...g_i.\alpha.g_i^{-1}...g_1^{-1}$, is in normal form.*

Proof. By induction on n.

We start with $n = 2$.

If $\left|g_2.t.g_2^{-1}\right| = 0$ then $\left|g.t.g^{-1}\right| \leq 1$ which is a contradiction. Therefore $\left|g_2.t.g_2^{-1}\right| \geq 1$. If $\left|g_2.t.g_2^{-1}\right| = 3$ then we put $\alpha = t$ and we have the result. If $\left|g_2.t.g_2^{-1}\right| = 1$ then we put $\alpha = g_2.t.g_2^{-1}$ and we have the result.

We go from n to $n + 1$.

If $\left|g_{n+1}.t.g_{n+1}^{-1}\right| = 3$ then we put $\alpha = t$ and we have the result. If $\left|g_{n+1}.t.g_{n+1}^{-1}\right| = 1$ then we put $\alpha = g_{n+1}.t.g_{n+1}^{-1}$ and we have the result. If $\left|g_{n+1}.t.g_{n+1}^{-1}\right| = 0$ then we put $t' = g_{n+1}.t.g_{n+1}^{-1}$ and $g' = g_1...g_n$ and we have $\left|g.t.g^{-1}\right| = \left|g'.t'.g'^{-1}\right| \geq 3$ and $|t'| \leq 1$. By the induction hypothesis, there exists $i \in \{1, ..., n\}$ and $\alpha \in F$, $|\alpha| = 1$ such that $g'.t'.g'^{-1} = g_1...g_i.\alpha.g_i^{-1}...g_1^{-1}$, in normal form. Therefore we have the result.

□

Proof of proposition 5.2.1. We suppose $\pi(Z(F)) \neq Z(F/N)$, and we prove that there exists $r \in R$ that does not satisfy the condition (ii).

Let $\pi(g) \in Z(F/N)$ such that $\pi(g) \notin \pi(Z(F))$. Let $g_0 \in \pi(g)$ of minimal length.

Since $\pi(g_0) \in Z(F/N)$, we have for every $t \in F$ such that $|t| \leq 1$, $g_0.t.g_0^{-1}.t^{-1} \in N$. Since $g_0 \notin Z(G)$ there exists $t_0 \in F$, such that $|t_0| \leq 1$ with $g_0.t_0.g_0^{-1}.t_0^{-1} \neq e$.

By theorem 5.1.2 there exists $w \in W(R)$, cyclically reduced such that

$$\left|g_0.t_0.g_0^{-1}.t_0^{-1}\right| > (1 - 3\lambda)\,|w|$$

We have $\left|g_0.t_0.g_0^{-1}\right| \geq \left|g_0.t_0.g_0^{-1}.t_0^{-1}\right| - 1 > (1 - 3\lambda)\,|w| - 1$. Since $\lambda \leq \frac{1}{9}$ and $|w| > 9$ a simple count gives us $(1-3\lambda)\,|w| > \frac{2}{3}.9 = 6$, hence $\left|g_0.t_0.g_0^{-1}\right| \geq 3$. We have also $\left|g_0.t_0.g_0^{-1}.t_0^{-1}\right| \leq 2\,|g_0|+2$, and $\left|g_0.t_0.g_0^{-1}.t_0^{-1}\right| > (1 - 3\lambda)\,|w|$, hence $\left|g_0.t_0.g_0^{-1}.t_0^{-1}\right| > 6$ and hence $2\,|g_0| + 2 \geq 6$ therefore $|g_0| \geq 2$.

Let $(a_1, ..., a_n)$ be a normal form of g_0, then $n \geq 2$. By lemma 5.2.2 there exists $i \in \{1, ..., n\}$ and $\alpha \in F$, such that $|\alpha| = 1$ and $g_0.t_0.g_0^{-1} = a_1...a_i.\alpha.a_i^{-1}...a_1^{-1}$, is in normal form.

We have three cases to consider : $\left|a_1^{-1}.t_0^{-1}\right| = 0$, $\left|a_1^{-1}.t_0^{-1}\right| = 1$, $\left|a_1^{-1}.t_0^{-1}\right| = 2$. We are going to treat just the case $\left|a_1^{-1}.t_0^{-1}\right| = 0$, the other cases can be treated similarly.

Let $\gamma = a_1^{-1}.t_0^{-1}$. We remark that $i \geq 2$ because $\left|g_0.t_0.g_0^{-1}.t_0^{-1}\right| > (1 - 3\lambda)\,|w| > 6$. Then the sequence $(a_1, ..., a_i, \alpha, a_i^{-1}, ..., a_2^{-1}\gamma)$ is a normal form of $h = g_0.t_0.g_0^{-1}.t_0^{-1}$. To simplify notations we denote the previous normal form by $(v_1, v_2, ..., v_m)$.

By theorem 5.1.2, there exists a normal form $(u_1, ..., u_m)$ of h, there exists a normal form $(w_1, ..., w_q)$ of w, there exists $l > (1 - 3\lambda)\,|w|$ and there exists $p \in \{1, ..., m\}$ such that

$$(u_p, ..., u_{p+l-1}) = (w_1, ..., w_l).$$

By theorem 5.1.3 there exists $a \in A$ and r where r is the product of a cyclic permutation of some $r' \in R \cup R^{-1}$, such that $w = a^{-1}ra$.

Let $(r_1, ..., r_q)$ be a normal form of r. Then $(a^{-1}r_1, ..., r_q a)$ is normal form of w and by lemma 5.1.1, there exists a sequence $(\alpha_1, ...\alpha_{q+1})$ of A such that

$$w_j = \alpha_j r_j \alpha_{j+1}^{-1} \text{ for } j \neq 1,\ j \neq q, \text{ and } w_1 = \alpha_1 a^{-1} r_1 \alpha_2^{-1},\ w_q = \alpha_q r_q a \alpha_{q+1}^{-1}$$

Similarly there exists a sequence $(\beta_1, ..., \beta_{m+1})$ of A such that $u_j = \beta_j v_j \beta_{j+1}^{-1}$. Then we have :

$$(\beta_p v_p \beta_{p+1}^{-1}, ..., \beta_{p+l-1} v_{p+l-1} \beta_{p+l}^{-1}) = (\alpha_1 a^{-1} r_1 \alpha_2^{-1}, ..., \alpha_l r_l \alpha_{l+1}^{-1}) \qquad (*)$$

Let us show that : $(v_p, ..., v_{p+l-1}) \not\leq (a_1, ..., a_i, \alpha)$ and $(v_p, ..., v_{p+l-1}) \not\leq (\alpha, a_i^{-1}, ..., .., a_2^{-1}\gamma)$.
Suppose that $(v_p, ..., v_{p+l-1}) \leq (a_1, ..., a_i, \alpha)$ or that $(v_p, ..., v_{p+l-1}) \leq (\alpha, a_i^{-1}, ..., .., a_2^{-1}\gamma)$.
Then for some k, x we have $(v_{p+1}, ..., v_{p+l-2}) = (a_k, ..., a_x)$. By (*) we have :

$$(a_k, ..., a_x) = (v_{p+1}, ..., v_{p+l-2}) = (\beta_{p+1}^{-1}\alpha_2 r_2 \alpha_3^{-1}\beta_{p+2}, ..., \beta_{p+l-2}^{-1}\alpha_{l-1} r_{l-1}\alpha_l^{-1}\beta_{p+l-1})$$

Then we have

$$g_0 = a_1...a_{k-1}.(\beta_{p+1}^{-1}(\alpha_2 r_2 \alpha_3^{-1})\beta_{p+2}\beta_{p+2}^{-1}.....\beta_{p+l-2}\beta_{p+l-2}^{-1}(\alpha_{l-1}r_{l-1}\alpha_l^{-1})\beta_{p+l-1}^{-1}).a_{x+1}...a_n =$$

$$a_1...a_{k-1}.(\beta_{p+1}^{-1}(\alpha_2 r_2 ... r_{l-1}\alpha_l^{-1})\beta_{p+l-1}^{-1}).a_{x+1}...a_n$$

Since $\pi(r_2...r_{l-1}) = \pi(r_1^{-1}r_q^{-1}...r_l^{-1})$ we have :

$$\pi(g_0) = \pi(a_1...a_{k-1}.(\beta_{p+1}^{-1}(\alpha_2 r_1^{-1} r_q^{-1}...r_l^{-1}\alpha_l^{-1})\beta_{p+l-1}^{-1}).a_{x+1}...a_n)$$

Let

$$d = a_1...a_{k-1}.(\beta_{p+1}^{-1}(\alpha_2 r_1^{-1} r_q^{-1}...r_l^{-1}\alpha_l^{-1})\beta_{p+l-1}^{-1}).a_{x+1}...a_n$$

Since $l > (1-3\lambda)|r|$, and $\lambda \leq \frac{1}{9}$ then $l - 2 > (1-3\lambda)|r| - 2 > \frac{2}{3}|r| - 2$ and since $|r| > 12$ a simple count shows us $\frac{2}{3}|r| - 2 > \frac{1}{2}|r|$, hence $l - 2 > \frac{1}{2}|r|$.
Therefore we have $\left|r_1^{-1}r_q^{-1}...r_l^{-1}\right| \leq q - l + 2 < \frac{1}{2}|r|$. Then we have

$$|d| = \left|a_1...a_{k-1}.(\beta_{p+1}^{-1}(\alpha_2 r_1^{-1} r_q^{-1}...r_l^{-1}\alpha_l^{-1})\beta_{p+l-1}^{-1}).a_{x+1}...a_n\right| \leq (k-1) + (q-l+2) + (n-x)$$

$$< (k-1) + \tfrac{1}{2}|r| + (n-x)$$

Since $|g_0| = (k-1) + (l-2) + (n-x)$ and $l - 2 > \frac{1}{2}|r|$ we have $|d| < |g_0|$.
We have $\pi(d) = \pi(g) = \pi(g_0)$ and $|d| < |g_0|$. This contradicts the fact that the length of g_0 is minimal.

Hence there exist k, j such that $(v_p, ..., v_{p+l-1}) = (a_k, ..., a_i, \alpha, a_i^{-1}, ..., a_j^{-1})$. Therefore we see that there exist i_1, i_2 and $\delta, \mu \in A$ such that $\delta r_{i_1} \mu = r_{i_2}^{-1}$, which contradicts condition *(ii)*.

□

Definitions.

Let $F = G_1 *_A G_2$ be a free product with amalgamation and R a subset of F.

(1) Let C be a set of normal forms. We say that C ***defines explicitly*** R or that R is ***explicitly defined*** by C if :

(i) If $(c_1, ..., c_n) \in C$, then $c_1...c_n \in R \cup R^{-1}$.

(ii) For every $r \in R \cup R^{-1}$, there exists a normal form $(c_1, ..., c_n) \in C$ such that $r = c_1...c_n$.

(2) For every set C of normal forms we denote by $\overline{C}$ the set of all cyclic permutation of elements of C.

(3) Let C be a set of normal forms and λ a positive real number such that $\lambda \leq \frac{1}{6}$. We define $L(C, \lambda)$ to be

$$L(C,\lambda) = \big\{(g,c,l) \in F \times \overline{C} \times \mathbb{N} \mid c = (c_1, ..., c_n),\ (1-3\lambda)n < l \leq n,$$
$$\exists \alpha, \beta \in A,\ \textit{such that}\ \alpha g \beta = c_1...c_l\}$$

Proposition 5.2.3. *Let $F = G_1 *_A G_2$ be a free product with amalgamation such that :*

(i) *G_1 and G_2 have a soluble word problem.*

(ii) *A has generalized soluble word problem in both G_1 and G_2.*

Let R be a subset of F, explicitly defined by C, such that :

(1) *Every element of R is cyclically reduced.*

(2) *The symmetrized set $W(R)$ satisfies $C'(\lambda)$ with $\lambda \leq \frac{1}{6}$.*

(3) *For every $n \in \mathbb{N}^*$, the set $\{c \in C \mid |c| \leq n\}$ is finite.*

(4) *The map defined by : $\varphi(n) = \{c \in C \mid |c| \leq n\}$ is recursive.*

(5) *The set $L(C, \lambda)$ is recursive.*

(6) *There exists an algorithm which for every $(g, c, l) \in L(C, \lambda)$ produces $(\alpha, \beta) \in A^2$ such that $\alpha g \beta = c_1...c_l$.*

Let N be the normal closure of R in F. Then (F/N) has a soluble word problem.

Lemma 5.2.4. *Let $F = G_1 *_A G_2$ be a free product with amalgamation and R a subset of F, explicitly defined by C, and such that every element of R is cyclically reduced. Suppose that $W(R)$, the symmetrized closure of R, satisfies $C'(\lambda)$ with $\lambda \leq \frac{1}{6}$. Let N be the normal closure of R in F. Let $w \in N$, with $w \neq e$, and let $(g_1, ..., g_n)$ be a normal form of w. Then there exists i, $1 \leq i \leq n$, $c \in \overline{C}$ and $l \in \mathbb{N}$, such that : $(g_i...g_{i+l-1}, c, l) \in L(C, \lambda)$.*

We call c a ***witness*** of w.

Proof. By theorem 5.1.2 there exists $r \in W(R)$ cyclically reduced such that $r = s.t$ in reduced form and $w = usv$ in reduced form and $|s| > (1-3\lambda)|r|$. To simplify notations we write $w = u_1...u_n$, $r = v_1...v_m$ where $(u_1, ..., u_n)$ and $(v_1, ..., v_m)$ are normal forms and $(u_i, ..., u_{i+l-1}) = (v_1, ..., v_l)$, $l > (1-3\lambda)|r|$. By lemma 5.1.1 there exists a sequence $(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1})$ of A such that $g_i = \alpha_i u_i \alpha_{i+1}^{-1}$. Since $r \in W(R)$ is cyclically reduced by the conjugacy theorem (theorem 5.1.3) there exists r_0 a cyclic permutation of an element of $R \cup R^{-1}$ and $\gamma \in A$ such that : $r = \gamma r_0 \gamma^{-1}$. Since C defines explicitly R, there exists $\overline{c} = (c_1, ..., c_m) \in \overline{C}$ such that $(c_1, ..., c_m)$ is a normal form of r_0. Therefore we see that the sequence $(\gamma c_1, ..., c_m \gamma^{-1})$ is a normal form of r, hence by lemma 5.1.1 there exists a sequence $(\beta_1, ..., \beta_{m+1})$ of A such that $v_i = \beta_i c_i \beta_{i+1}^{-1}$, for $i \neq 1$ and $i \neq m$, $v_1 = \beta_1 \gamma c_1 \beta_2^{-1}$ and $v_m = \beta_m c_m \gamma^{-1} \beta_{m+1}^{-1}$. A simple count shows us that :

$$g_i...g_{i+l-1} = \alpha_i u_i....u_{i+l-1}\alpha_{i+l}^{-1} = \alpha_i \beta_1 \gamma c_1....c_l \beta_{l+1}^{-1} \alpha_{i+l}^{-1}.$$

Therefore $(g_i...g_{i+l-1}, \overline{c}, l) \in L(C, \lambda)$.

□

Proof of proposition 5.2.3. In this proof the natural map $\pi : F \to F/N$ is written $\pi(w) = \overline{w}$. Let $\overline{w} \in (F/N)$ written as a word in the generators of (F/N). Since F has a soluble word problem, one can determine if $w = e$ or no. If it is the case, then $\overline{w} = e$. Otherwise, since A has a generalized soluble word problem, one can calculate a normal form $(g_1, ..., g_n)$ of w. If $w \in N$, then by lemma 5.2.4, there exists i, $1 \leq i \leq n$, $c \in \overline{C}$ and $l \in \mathbb{N}$, such that $(g_i...g_{i+l-1}, c, l) \in L(C, \lambda)$. We see that we must have : $|c| < \frac{|w|}{(1-3\lambda)}$. Since the map $\varphi(n) = \{c \in C \mid |c| \leq n\}$ is recursive we compute the set $K = \left\{c \in C \mid |c| \leq \frac{|w|}{(1-3\lambda)}\right\}$ which is finite. Then we compute all cyclic permutations of elements of $\overline{K}$. For every $a \in \overline{K}$, for every l such that $1 \leq l \leq |a|$, $l > (1-3\lambda)|a|$, and for every i such that $i + l - 1 \leq n$, let us check whether $(g_i...g_{i+l-1}, a, l) \in L(C, \lambda)$. Since $L(C, \lambda)$ is recursive the above procedure is recursive. If at every stage the answer to the question $(g_i...g_{i+l-1}, a, l) \in L(C, \lambda)$ is no, then $w \notin N$ and hence $\overline{w} \neq e$. If at some stage the answer to the question $(g_i...g_{i+l-1}, a, l) \in L(C, \lambda)$ is yes, by (6), there exists an algorithm which produces $\alpha, \beta \in A$ such that $g_i...g_{i+l-1} = \alpha a_1...a_l \beta$. Put $w_1 = g_1...g_i.\alpha^{-1}a_m^{-1}...a_{l+1}^{-1}\beta^{-1}.g_{l+1}...g_n$. Then we see that $\overline{w} = \overline{w_1}$ and $|w_1| < |w|$. Then we will redo the same thing for w_1.

At the end of the process we have $(w, w_1, ..., w_t)$, such that $|w_t| < |w_{t-1}| <...|w_1| < |w|$ and w_t does not have any witness in $\overline{C}$. If $w_t = e$, then $w \in N$, otherwise $w \notin N$.

□

5.3 Proof of theorem I

Let G be a countable group generated by $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$.

Let $G_1 = G \times < x \mid >$ and $G_2 = Z(G) \times < y \mid >$ where $< x \mid >$ and $< y \mid >$ are two copy of the free group on one generator. Let $F = G_1 *_{Z(G)} G_2$. By lemma 5.1.5, we have $Z(F) \subseteq Z(G)$, and since $Z(F) \supseteq Z(G)$, we have $Z(F) = Z(G)$.

Let $x_1, x_2 \in < x >$, such that $x_1 \neq x_2$, $x_1 x_2 \neq e$, $x_1 \neq e$ and $x_2 \neq e$. Let for every $i \in \mathbb{N}^*$:

$$w_i = a_i^{-1}.(x_1y)^{80(i-1)+1}(x_2y)(x_1y)^{80(i-1)+2}(x_2y)(x_1y)^{80(i-1)+3}(x_2y).....(x_1y)^{80i}(x_2y) \qquad (*)$$

It is clear that w_i is cyclically reduced.

Let $W(R)$ be the symmetrized closure of $R = \{w_i \mid i \in \omega\}$. Let $W_0(R)$ be the set of cyclically reduced conjugates of elements of $R \cup R^{-1}$. Now we show that $W_0(R)$ satisfies $C'(\frac{1}{10})$.

Let $\alpha_1, \alpha_2 \in W_0(R)$ such that $\alpha_1.\alpha_2 \neq e$, then by theorem 5.1.3, there exists $r_1, r_2 \in R \cup R^{-1}$ and $a, b \in Z(G)$ such that $\alpha_1 = a.r_1'.a^{-1}$ and $\alpha_2 = b.r_2'.b^{-1}$ where r_1', (resp. r_2') is a cyclic permutation of r_1 (resp. r_2). Since $a, b \in Z(G)$, we have $\alpha_1 = r_1'$, and $\alpha_2 = r_2'$. Since $\alpha_1.\alpha_2 \neq e$, we have $r_1'.r_2' \neq e$. An classical argument like the one used in the book of R.C.Lyndon and P.E.Schupp ([17], p. 283 or p. 290) shows that $W_0(R)$ satisfies $C'(\frac{1}{10})$. By lemma 5.1.4, $W(R)$ satisfies $C'(1/9)$.

Hence by theorem 5.1.2 F/N embeds G.

We see that F/N is finitely generated. We see also that if G is recursively presented and $Z(G)$ is recursively enumerable in G then F/N is recursively presented. It is not difficult to see that R satisfies the assumption of proposition 5.2.1, hence $Z(F/N) = \pi(Z(F)) = \pi(Z(G))$.

Now suppose that G has a soluble word problem and $Z(G)$ has a generalized soluble word problem in G.

Then we see that $Z(G)$ has soluble generalized soluble word problem in $G_2 = Z(G) \times < y \mid >$. Hence F has a soluble word problem.

Let us show that $W(R)$ satisfies the conditions of the proposition 5.2.3. Let C_0 be the set of normal forms given in (*). Let C be the set obtained by adding to C_0 the set of normal forms of the inverses of the elements of C_0. Then it is clear that C defines explicitly R. It is clear that R satisfies the conditions (1)-(4) of proposition 5.2.3.

It is sufficient now to show that $L(C, \lambda)$ is recursive and that there is an algorithm which for every $(g, c, l) \in L(C, \lambda)$ produces $(\alpha, \beta) \in Z(G)^2$ such that $\alpha g \beta = c_1 ... c_l$.

Let $(g, c, l) \in F \times \overline{C} \times \mathbb{N}$. Then it easy to see that we can calculate a sequence $(g_0, ..., g_n)$ such that $g = g_0 ... g_n$ and :

(i) $g_0 \in Z(G)$, $(g_1, ..., g_n)$ is a normal form.

(ii) if $g_i \in G_1$ then $g_i = \alpha_i.x^{n_i}$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \in G - Z(G)$ or $\alpha_i = e$.

(iii) if $g_i \in G_2$ then $g_i = y^{p_i}$, $p_i \in \mathbb{Z}$.

Let us prove the following claim :

Claim. Let $(g_0, ..., g_n)$ be a sequence which satisfies the conditions *(i)-(iii)* and let $(c, l) \in \overline{C} \times \mathbb{N}$ with $c = (c_1, ..., c_m)$. Then the following properties are equivalents :

(1) *There exist* $\alpha, \beta \in Z(G)$, *such that* $\alpha g \beta = c_1 ... c_l$.

(2) $n = l$ *and one of the following conditions is satisfied :*

(a) *If there exists* q *such that* $c_q = a_i^{-1} x_1$ *then :*

- *For every* k *such that* $c_k \in \{x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}\}$, $\alpha_k = e$ *and* $g_k = c_k$.
- *For every* k *such that* $c_k \in \{y, y^{-1}\}$, $g_k = c_k$.
- $\alpha_q a_i \in Z(G)$, *and* $x^{n_q} = x_1$.

(b) *If there exists* q *such that* $c_q = x_1^{-1} a_i$ *then :*

- *For every* k *such that* $c_k \in \{x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}\}$, $\alpha_k = e$ *and* $g_k = c_k$.
- *For every* k *such that* $c_k \in \{y, y^{-1}\}$, $g_k = c_k$.
- $\alpha_q a_i^{-1} \in Z(G)$, *and* $x^{n_q} = x_1$.

(c) *If there is no q such that $c_q = a_i^{-1}x_1$ or $c_q = x_1^{-1}a_i$ then :*
- *For every k such that $c_k \in \{x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}\}$, $\alpha_k = e$ and $g_k = c_k$.*
- *For every k such that $c_k \in \{y, y^{-1}\}$, $g_k = c_k$.*

If (a) is satisfied then if we take $\alpha = e$ and $\beta = a_i^{-1}\alpha_k^{-1}g_0^{-1}$ then $\alpha g\beta = c_1...c_l$.
If (b) is satisfied then if we take $\alpha = e$ and $\beta = a_i\alpha_k^{-1}g_0^{-1}$ then $\alpha g\beta = c_1...c_l$.
If (c) is satisfied then if we take $\alpha = e$ and $\beta = g_0^{-1}$ then $\alpha g\beta = c_1...c_l$.
Observe that there is at most one k such that $c_k = a_i^{-1}x_1$ or $c_k = x_1^{-1}a_i$.

Proof. **(1)⇒(2)**.

Let $\alpha, \beta \in Z(G)$, such that $\alpha g\beta = c_1...c_l$. Since $\alpha, \beta \in Z(G)$, we have $\alpha g\beta = \alpha\beta g$. Then we have *:*

$$(\alpha\beta g_0 g_1).g_2...g_n.c_l^{-1}...c_1^{-1} = e$$

Since the sequence $(\alpha\beta g_0 g_1, g_2, ..., g_n)$ is a normal form we must have $n = l$.

It is not difficult to see, by induction, that : $g_k c_k^{-1} \in Z(G)$ for $k = 1, ..., n$.

We only treat the case (a), the other cases can be treated similarly.

(a) *If there exists q such that $c_q = a_i^{-1}x_1$ then :*

- Let k such that $c_k \in \{x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}\}$. Since $g_k c_k^{-1} \in Z(G)$, we have $g_k = \alpha_k.x^{n_k} = a.c_k$ where $a \in Z(G)$. Hence we must have $\alpha_k = e$ and $g_k = c_k$.

- Let k such that $c_k \in \{y, y^{-1}\}$. Since $g_k c_k^{-1} \in Z(G)$, $g_k = y^{p_k} = a.c_k$ where $a \in Z(G)$. Then this implies that : $a = e$ and $g_k = y^{p_k} = c_k$.

- Since $g_q c_q^{-1} \in Z(G)$ then $g_q = \alpha_q.x^{n_q} = a.a_i^{-1}x_1$ where $a \in Z(G)$. Hence we have $x^{n_q} = x_1$ and $\alpha_q.a_i = a \in Z(G)$.

(2)⇒(1)

It is sufficient to calculate. We treat only the case (a), the other cases can be treated similarly.

Suppose that (a) is satisfied then we have : $g_1...g_n c_n^{-1}...c_1^{-1} = \alpha_q a_i$. Let $\alpha = e$ *and* $\beta = a_i^{-1}\alpha_k^{-1}g_0^{-1}$. Then we have :

$$\alpha g_0 g_1...g_n c_n^{-1}...c_1^{-1}\beta = g_0\alpha_q a_i\beta = e.$$

Hence $\alpha g\beta = c_1...c_l$.

□

Since F has a soluble word problem and $Z(G)$ has a generalized soluble word problem in F we see that the procedures (a) (b) (c) are recursive. Therefore we see that $L(C, \lambda)$ is recursive and that there is an algorithm which for every $(g, c, l) \in L(C, \lambda)$ produces $(\alpha, \beta) \in Z(G)^2$ such that $\alpha g\beta = c_1...c_l$.

□

5.4 Proof of theorem II

The proof is in two stages. In the first stage, we prove the first part of the theorem (*let G be finitely generated recursively presented group. Then G is embedable in a finitely presented group K such that $Z(G) = Z(K)$).* In the second stage, we prove the second part of the theorem (*if G has a soluble word problem then we can take K with soluble word problem).*

Stage 1. [1] Let G be a finitely generated and recursively presented group. Let $\{a_1, ..., a_n\}$ be a generating set of G. Let :

$$G_0 =< G, z \mid \ z^{-1}gz = g, \quad g \in Z(G) >$$

Since G is recursively presented, we can apply lemma 5.1.6 and then $Z(G)$ is recursively enumerable in G. Hence G_0 is recursively presented. It is easy to see that $Z(G_0) = Z(G)$. The group G_0 is generated by the set $\{a_1, ..., a_n, z\}$. Hence there is an isomorphism $\nu : \mathbb{F}_X/R \cong G_0$, where $\mathbb{F}_X$ is the free non-abelian group of rank $n+1$ with basis $X = \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\}$, and R is the normal closure of the presentation (which is recursively enumerable) of G_0 and ν satisfies : $\nu(\overline{x_i}) = a_i$, for $i = 1, ..., n$ and $\nu(\overline{x_{n+1}}) = z$ where $\overline{x_i}$ is the class of x_i relative to the subgroup R. Let :

$$F_R =< \mathbb{F}_X, d \mid \ d^{-1}rd = r, \quad r \in R >$$

By Higman's embedding theorem F_R is embeddable in a finitely presented group say H. Without loss of generality we can assume that $x_1, ..., x_n, x_{n+1}$ are included among the generating symbols of the given presentation of H. If w is a word in the generators of $\mathbb{F}_X$, let $\overline{w}$ denote the word of G_0 obtained by replacing each x_i by a_i for $i = 1, ..., n$ and x_{n+1} by z.

In F_R the subgroup L generated by $\mathbb{F}_X$ and $d^{-1}\mathbb{F}_X d$ is the free product of $\mathbb{F}_X$ and $d^{-1}\mathbb{F}_X d$ with R amalgamated.

Define a homomorphism : $\phi : L \to G_0$ by $\phi(w) = \overline{w}$ and $\phi(d^{-1}wd) = e$. Since the two definitions agree on the amalgamated part, ϕ is well-defined.

Consider the group $H \times G_0$. We shall use the ordered pair notation to denote elements of this group. Viewing L as a subgroup of H, we consider the subgroup $L \times Z(G_0)$. Define a map $\psi : L \times Z(G_0) \to H \times G_0$ by $\psi((l, g)) = (l, \phi(l).g)$. Let us show that ψ is an injective homomorphism. We have :

$$\psi((l_1, g_1).(l_2, g_2)) = \psi((l_1.l_2, g_1.g_2)) = (l_1 l_2, \phi(l_1 l_2).g_1.g_2)$$

$$\psi((l_1, g_1)).\psi((l_2, g_2)) = (l_1, \phi(l_1).g_1).(l_2, \phi(l_2).g_2) = (l_1 l_2, \phi(l_1).g_1\phi(l_2).g_2)$$

Since $g_1, g_2 \in Z(G_0)$ we have $\phi(l_1).g_1\phi(l_2).g_2 = \phi(l_1).\phi(l_2).g_1.g_2$, and since ϕ is an homomorphism we have $\phi(l_1).\phi(l_2) = \phi(l_1.l_2)$. Hence $\psi((l_1, g_1).(l_2, g_2)) = \psi((l_1, g_1)).\psi((l_2, g_2))$. Hence ψ is an homomorphism and it is clear that ψ is injective.

Hence we can form the HNN-extension :

$$K =< H \times G_0, s \mid \ s^{-1}(l, g)s = (l, \phi(l).g), \quad l \in L, \ \ g \in Z(G_0) >$$

[1] The beginning of the proof of this stage is inspired by the proof of Higman's embedding theorem.

Viewing G as a subgroup of G_0 and hence as a subgroup of $H \times G_0$ we can form the following free product with amalgamation :

$$\Gamma = K *_G G \times < t \mid >$$

Let :

$$r = (s^{-1}z).t.z.t^2.z.t^3.z...z.t^{80}$$

Let N be the normal closure of $\{r\}$ in Γ. Let us show that Γ/N can be finitely presented. A set of defining relations for Γ/N can be obtained by taking the union of the following relations :

1. *The defining relations for H.*
2. *The relation : $s = z.t.z.t^2.z.t^3.z...z.t^{80}$.*
3. *The relations saying that the generators of G_0 commute with the generators of H.*
4. *The relations saying that the generators of G commute with t.*
5. *The defining relations for G_0.*
6. *The relations : $s^{-1}(l,g)s = (l, \phi(l).g)$, for a set of generators of L, and for every $g \in Z(G_0)$.*

It is clear that Γ/N is finitely generated.

We now introduce a set of relations denoted by (7) :

(7) $s^{-1}(l,e)s = (l,\phi(l))$, *where l belongs to a finite generating set of L.*

We are going to prove that the relations (5)-(6) follow from the relations (1)-(4) and (7), and this will show that Γ/N is finitely presented since (1)-(4) are finite as well as (7).

First we prove that the relations (5) follow from the relations (7) and (1)-(4).

Let $\overline{w}$ be a word on the generators of G_0 such that $\overline{w} = e$. Then the corresponding word w on the generators of $\mathbb{F}_X$ is in R. Now from (7) we have :

$$s^{-1}(w,e)s = (w,\phi(w))$$

By definition of ϕ we have $s^{-1}(w,e)s = (w,\overline{w})$. Since $d^{-1}wd = w$ (which is a consequence of (1)) we have :

$$(w,e) = (d^{-1}wd, e)$$

But by the definition of ϕ and from (7),

$$s^{-1}(d^{-1}wd,e)s = s^{-1}(w,e)s = (w,\phi(d^{-1}wd)) = (w,e) = (w,\overline{w})$$

Hence $\overline{w} = e$ follows.

Now let us show that the relations (6) follow from the relations (7) and (1)-(5).

By (5) we have : every $g \in Z(G_0)$ satisfies $g.z = z.g$. And by (4) we have : every $g \in Z(G_0)$ satisfies $g.t = t.g$. Hence by (2) ($s = z.t.z.t^2.z.t^3.z...z.t^{80}$) we have : every $g \in Z(G_0)$ satisfies

$g.s = s.g$ which can be written : $(e,g).s = s.(e,g)$ in the ordered pair notation. Now

$$s^{-1}(l,g)s = s^{-1}(l,e)(e,g)s$$

Hence

$$s^{-1}(l,g)s = s^{-1}(l,e)s(e,g)$$

And by the relations (7),

$$s^{-1}(l,g)s = (l,\phi(l)).(e,g)$$

Hence $s^{-1}(l,g)s = (l,\phi(l).g)$, for a set of generators of L, and for every $g \in Z(G_0)$.

This completes the proof of the fact that Γ/N is finitely presented.

Now we show that the natural map $\pi : \Gamma \to \Gamma/N$ embeds G_0 and that one has $Z(\Gamma/N) = \pi(Z(G_0))$. Since $Z(G) = Z(G_0)$ and $G \subseteq G_0$ this completes the proof.

We first prove the following claim :

Claim 1. Let $a, b \in \left\{z, z^{-1}, s^{-1}z, z^{-1}s\right\}$ and $\alpha, \beta \in G$ then :

$$a\alpha b = \beta \quad in\ \Gamma \qquad if\ and\ only\ if \qquad a = b^{-1}\ and\ \alpha = \beta \in Z(G)$$

Proof.

If $a = b^{-1}\ and\ \alpha = \beta \in Z(G)$ then it is clear that $a\alpha b = \beta$.

We see that if $a\alpha b = \beta$ then $\alpha = a^{-1}\beta b^{-1}$ and so it is sufficient to prove the above property for $a \in \left\{z, s^{-1}z\right\}$.

If $a = z$ and $b = s^{-1}z$ (resp $b = z^{-1}s$) this implies that the sequence $(z\alpha, s^{-1}, z\beta^{-1})$, (resp $(z\alpha z^{-1}, s, \beta^{-1})$) is not reduced in the HNN-extension K, which is clearly a contradiction. So if $a = z$ then $b \in \left\{z, z^{-1}\right\}$. Now if $b = z$, the sequence $(z, \alpha, z, \beta^{-1})$ is not reduced in the HNN-extension G_0 which is a contradiction. So if $a = z$ then $b = z^{-1}$. Hence the sequence $(z, \alpha, z^{-1}, \beta^{-1})$ is not reduced in the HNN-extension G_0, so $\alpha \in Z(G)$, and hence $\alpha = \beta$.

Now if $a = s^{-1}z$ and $b = z$ (resp $b = z^{-1}$) the sequence $(s^{-1}, z\alpha z\beta^{-1})$, (resp $(s^{-1}, z\alpha z^{-1}\beta^{-1})$) is not reduced in the HNN-extension K, which is clearly a contradiction. So if $a = s^{-1}z$ then $b \in \left\{s^{-1}z, z^{-1}s\right\}$. Now if $b = s^{-1}z$, the sequence $(s^{-1}, z\alpha, s^{-1}, \beta^{-1})$ is not reduced in the HNN-extension K , which is a contradiction. So if $a = s^{-1}z$ then $b = z^{-1}s$. Hence the sequence $(s^{-1}, z\alpha z^{-1}, s, \beta^{-1})$ is not reduced in the HNN-extension K, so $z\alpha z^{-1} \in L \times Z(G)$. So there exists $(l,g) \in L \times Z(G)$ such that $z\alpha z^{-1} = l.g$. So we must have $l = e$ and $\alpha = g \in Z(G)$. Since $s^{-1}z\alpha z^{-1}s = \beta$ we have $\alpha = \beta$. This completes the proof.

□

By lemma 5.1.5, we have $Z(\Gamma) \subseteq Z(G)$. Let $g \in Z(G)$, then we see that g commute with t. It is also clear that g commute with s and all the generators of H. Hence we have $Z(G) \subseteq Z(\Gamma)$. Therefore we have $Z(G) = Z(\Gamma)$. Let $R_0 = \{r\}$, then we see easily, using the above claim, that R_0 satisfies the conditions *(i)-(ii)* of proposition 5.2.1. Therefore by proposition 5.2.1 and theorem 5.1.2, it is sufficient to show that the symmetrized closure of R_0 satisfies $C'(\frac{1}{10})$.

We view Γ as a free product with amalgamation and not as an HNN-extension. Hence we see that $|r| = 160$. By lemma 5.1.4, it is sufficient to show that the set $W_0(R_0)$ of cyclically reduced conjugates of the elements of $\{r\} \cup \left\{r^{-1}\right\}$ satisfies $C'(\frac{1}{70})$.

Let $w_1, w_2 \in W_0(R_0)$ such that $w_1.w_2 \neq e$. By the conjugacy theorem (theorem 5.1.3) there exists $\alpha, \beta \in G$ and r_1, r_2 a cyclic permutations of elements of $\{r\} \cup \left\{r^{-1}\right\}$ such that $w_1 = \alpha.r_1.\alpha^{-1}$ and $w_2 = \beta.r_2.\beta^{-1}$. We can write $r_1 = a_1....a_n$ and $r_2 = b_1...b_n$ where $a_i, b_i \in \left\{z, z^{-1}, t^j, t^{-i}, s^{-1}z, z^{-1}s\right\}$. Now consider how there can be cancellation in the product $w_1.w_2$.

Now if there is a cancellation in the product $w_1.w_2$ we must have : a_n and b_1 are in the same factor and $\left|a_n\alpha^{-1}\beta b_1\right| = 1$ or $\left|a_n\alpha^{-1}\beta b_1\right| = 0$. Let us prove that the length of any piece is at most 2.

If $\left|a_n\alpha^{-1}\beta b_1\right| = 1$ then it is clear that the length of the piece which was cancelled is 1. So we consider the case $\left|a_n\alpha^{-1}\beta b_1\right| = 0$, so the case $a_n\alpha^{-1}\beta b_1 \in G$. Now if $a_n \in \left\{z, z^{-1}, s^{-1}z, z^{-1}s\right\}$ and $b_1 \in \left\{t^{-i}, t^j\right\}$, we see that $\left|a_n\alpha^{-1}\beta b_1\right| = 1$. The same thing holds if $a_n \in \left\{t^{-i}, t^j\right\}$ and $b_1 \in \left\{z, z^{-1}, s^{-1}z, z^{-1}s\right\}$. Therefore we have the following two cases to consider :

Case (1) $a_n, b_1 \in \left\{z, z^{-1}, s^{-1}z, z^{-1}s\right\}$**.** Since $a_n\alpha^{-1}\beta b_1 \in G$, by claim 1 we have $a_n\alpha^{-1}\beta b_1 = \alpha^{-1}\beta$, and $\alpha^{-1}\beta \in Z(G)$, $b_1 = a_n^{-1}$. So :

$$a_{n-1}a_n\alpha^{-1}\beta b_1 b_2 = a_{n-1}\alpha^{-1}\beta b_2$$

But since $a_n, b_1 \in \left\{z, z^{-1}, s^{-1}z, z^{-1}s\right\}$ we must have $a_{n-1}, b_2 \in \left\{t^i, t^{-j}\right\}$. So :

$$a_{n-1}a_n\alpha^{-1}\beta b_1 b_2 = \alpha^{-1}\beta a_{n-1}b_2$$

Now if $a_{n-1}.b_2 = e$ then we have : $r_1 = a_1....a_{n-1}.a_n$ and $r_2 = a_n^{-1}.a_{n-1}^{-1}...b_n$. But a cyclic permutation of $(s^{-1}z, t, z, t^2, z, t^3, z, ..., z, t^{80})$ or of $(t^{-80}, z^{-1}, ..., z^{-1}, t^{-3}, z^{-1}, t^{-2}, z^{-1}, t^{-1}, z^{-1}s)$ is uniquely determined by the two first of its elements.

(To see what happens we illustrate the situation : if $a_n = z$ and $a_{n-1} = t^i$ then $b_1 = z^{-1}$ and $b_2 = t^{-i}$. Therefore

$$r_1 = t^{i+1}....z.t^{80}.s^{-1}z.t....t^{i-1}.z.t^i.z$$

$$r_2 = z^{-1}.t^{-i}.z^{-1}.t^{-(i-1)}....t^{-1}.z^{-1}s.t^{-80}.z^{-1}....z^{-1}.t^{-(i+1)}$$

Then we see that $r_1r_2 = e$.)

So we have $r_1.r_2 = e$. Since $\alpha^{-1}\beta \in Z(G)$ we have :

$$w_1w_2 = \alpha\alpha^{-1}\beta r_1r_2\beta^{-1} = e$$

So $w_1w_2 = e$ which is a contradiction. So $a_{n-1}.b_2 \neq e$ and hence $\left|a_{n-1}\alpha^{-1}\beta b_2\right| = 1$. So the length of the piece which was cancelled is 2 .

Case (2) $a_n, b_1 \in \left\{t^i, t^{-j}\right\}$**.** Since $a_n\alpha^{-1}\beta b_1 \in G$, we have $a_n.b_1 = e$ and :

$$a_{n-1}a_n\alpha^{-1}\beta b_1 b_2 = a_{n-1}\alpha^{-1}\beta b_2$$

Now if $a_{n-1}\alpha^{-1}\beta b_2 \in G$, and since we must have $a_{n-1}, b_2 \in \left\{z, z^{-1}, s^{-1}z, z^{-1}s\right\}$ then by claim 1, we have $a_{n-1}\alpha^{-1}\beta b_2 = \alpha^{-1}\beta$, and $\alpha^{-1}\beta \in Z(G)$, $b_2 = a_{n-1}^{-1}$. So as in the previous case we have $r_1.r_2 = e$. Since $\alpha^{-1}\beta \in Z(G)$ we have :

$$w_1 w_2 = \alpha\alpha^{-1}\beta r_1 r_2 \beta^{-1} = e$$

So $w_1 w_2 = e$ which is a contradiction. So $a_{n-1}.\alpha^{-1}\beta.b_2 \notin G$ and hance $\left|a_{n-1}\alpha^{-1}\beta b_2\right| = 1$. So the length of the piece which was cancelled is 2.

Now since $|w_1| = |w_2| = 160$ and the maximal length of the piece which was cancelled is 2, a simple count show that : $2 < \frac{160}{70} = \frac{1}{70}|w|$. Hence $W_0(R_0)$ satisfies $C'(\frac{1}{70})$.

This completes the proof of this stage.

Stage 2. Suppose that G has a soluble word problem. By lemma 5.1.6 $Z(G)$ has a generalized soluble word problem in G. So G_0 has a soluble word problem. Hence R is a recursive subgroup of $\mathbb{F}_X$. By lemma 5.1.8 R is a strongly benign subgroup. Hence F_R is embeddable in finitely presented group H_1 such that $\mathbb{F}_X$ and $< \mathbb{F}_X, d >$ have a soluble generalized soluble word problem in H_1.

It is clear that the proof of the stage 1 is independent of the choice of the finitely presented group H. Therefore we apply the same construction and we assume that $H = H_1$.

Let us show that Γ and R_0 satisfy the conditions of proposition 5.2.3.

By lemma 5.1.7 the subgroup $L =< \mathbb{F}_X, d^{-1}\mathbb{F}_X d >$ has a generalized soluble word problem in

$$F_R =< \mathbb{F}_X, d \mid d^{-1}rd = r \ \ , r \in R >$$

So it is easy to see that L has a generalized soluble word problem in H. We see also that $L \times Z(G)$ has a generalized soluble word problem in $H \times G_0$.

Let us show that $\psi(L \times Z(G))$ has a soluble generalized soluble word problem in $H \times G_0$. Let (h, g) in $H \times G_0$. Since L has a generalized soluble word problem in H, one can determine whether $h \in L$. If $h \notin L$ then $(h, g) \notin \psi(L \times Z(G))$. If $h \in L$ then we compute $\phi(h)$ (ϕ is clearly computable). Now if there exists $g_0 \in Z(G)$ such that $\phi(h).g_0 = g$ we must have $\phi(h)^{-1}g \in Z(G)$. Since $Z(G)$ has a generalized soluble word problem in $H \times G_0$ we can determine whether $\phi(h)^{-1}g \in Z(G)$. Then if $\phi(h)^{-1}g \notin Z(G)$ then $(h, g) \notin \psi(L \times Z(G))$. If $\phi(h)^{-1}g \in Z(G)$ then we have

$$\psi(h, \phi(h)^{-1}g) = (h, \phi(h)\phi(h)^{-1}g) = (h, g)$$

So $(h, g) \in \psi(L \times Z(G))$.

The maps ψ, ψ^{-1} are computable and $L \times Z(G)$,$\psi(L \times Z(G))$ have a generalized soluble word problem in $H \times G_0$. Therefore K has a soluble word problem and we can calculate the normal form relative to the structure of the HNN-extension of K.

Hence the group G has a generalized soluble word problem in K, it also has a generalized soluble word problem in $G \times < t \mid >$.

So Γ has a soluble word problem and we can calculate the normal form relative to its structure of free product with amalgamation.

Therefore, it is sufficient to show that $R_0 = \{r\}$ satisfies the conditions of proposition 5.2.3. Let $C = \{((s^{-1}z), t, z, t^2, ..., z, t^{80}), (t^{-80}, z^{-1}, ..., t^{-1}, (z^{-1}s))\}$. Then we see that C defines explicitly $\{r\}$. We see also that $\{r\}$ satisfies the conditions (1)-(4) of proposition 5.2.3. Then it is sufficient to show that the set $L(C, \lambda)$ is recursive and there exists an algorithm which satisfies condition (6) of the proposition 5.2.3. We will need the following claim :

Principal Claim. *Let $w \in \Gamma$ with the following normal form $(\alpha_1 a_1 \beta_1, ..., \alpha_n a_n \beta_n)$ where $\alpha_i, \beta_i \in G$ and $a_i \in \{z, z^{-1}, s^{-1}z, z^{-1}s, t^{-i}, t^j\}$. Then the following conditions are equivalents :*

1. *There exist $a, b \in G$ such that $awb = a_1...a_n$.*
2. *Let $I = \{i \mid a_i \in \{z, z^{-1}, s^{-1}z, z^{-1}s\}\}$. Then for every $i, j \in I$ such that $i < j$:*

$$(\beta_i.\alpha_{i+1}\beta_{i+1}.\alpha_{i+2}.....\beta_{j-1}.\alpha_j) \in Z(G)$$

If (2) is true then :
- if $a_n \in \{z, z^{-1}, s^{-1}z, z^{-1}s\}$, then we can take $a = \alpha_n^{-1}.\beta_{n-1}^{-1}....\beta_1^{-1}\alpha_1^{-1}$ and $b = \beta_n^{-1}$,
- if $a_n \in \{t^{-i}, t^j\}$, and $n = 1$ then we can take $a = \alpha_1^{-1}$ and $b = \beta_1^{-1}$,
- if $a_n \in \{t^{-i}, t^j\}$, and $n \geq 2$ then we can take $a = \alpha_{n-1}^{-1}.\beta_{n-2}^{-1}....\beta_1^{-1}\alpha_1^{-1}$ and $b = (\beta_{n-1}\alpha_n\beta_n)^{-1}$.

Proof.

(1)⇒(2). By induction on n . We consider two cases :

$$a_n \in \{z, z^{-1}, s^{-1}z, z^{-1}s\} \text{ and } a_n \in \{t^{-i}, t^j\}.$$

***Case* (I)** $a_n \in \{z, z^{-1}, s^{-1}z, z^{-1}s\}$. For $n = 1$, we have :

$$awba_1^{-1} = a\alpha_1 a_1 \beta_1 b a_1^{-1} = e$$

In this case we have $I = \{1\}$ and the property is true. It is not difficult to see that we can take $a = \alpha_1^{-1}$ and $b = \beta_1^{-1}$.

We go from n to $n + 1$. We have :

$$awba_{n+1}^{-1}a_n^{-1}...a_1^{-1} = a\alpha_1 a_1 \beta_1 ....\alpha_n a_n \beta_n \alpha_{n+1} a_{n+1} (\beta_{n+1} b) a_{n+1}^{-1} a_n^{-1} ... a_1^{-1} = e$$

Hence we must have $a_{n+1}(\beta_{n+1}b)a_{n+1}^{-1} \in G$ therefore by claim 1 we have $\beta_{n+1}.b \in Z(G)$. Since $a_n \in \{z, z^{-1}, s^{-1}z, z^{-1}s\}$ then $a_n \in \{t^{-i}, t^j\}$ and we have :

$$a\alpha_1 a_1 \beta_1 ....a_{n-1}(\beta_{n-1}\alpha_n\beta_n\alpha_{n+1}\beta_{n+1}b)a_{n-1}^{-1}...a_1^{-1} = e$$

Then we have $(\beta_{n-1}\alpha_n\beta_n\alpha_{n+1}\beta_{n+1}b) \in Z(G)$.

We have $a_{n-1} \in \{z, z^{-1}, s^{-1}z, z^{-1}s\}$.

We see that the sequence $(\alpha_1 a_1 \beta_1, ..., \alpha_{n-1}a_{n-1}(\beta_{n-1}\alpha_n\beta_n\alpha_{n+1}\beta_{n+1}))$ satisfies the same condition hence by induction hypothesis we have : for every $i, j \in I$ *such that* $i < j \leq n - 1$:

$$\beta_i.\alpha_{i+1}...\beta_{j-1}.\alpha_j \in Z(G)$$

Hence $\beta_i.\alpha_{i+1}...\beta_{n-1-1}.\alpha_{n-1} \in Z(G)$.
Since $\beta_{n+1}.b \in Z(G)$ and $(\beta_{n-1}\alpha_n\beta_n\alpha_{n+1}\beta_{n+1}b) \in Z(G)$ then $\beta_{n-1}\alpha_n\beta_n\alpha_{n+1} \in Z(G)$.
Hence : *for every* $i \in I$ *such that* $i < n+1$ *we have :*

$$\beta_i.\alpha_{i+1}...\beta_{n-1-1}.\alpha_{n-1}\beta_{n-1}.\alpha_n\beta_n\alpha_{n+1} \in Z(G)$$

It is not hard to see that we can take $a = \alpha_n^{-1}.\beta_{n-1}^{-1}....\beta_1^{-1}\alpha_1^{-1}$ *and* $b = \beta_n^{-1}$.
***Case* (II)** $a_n \in \left\{t^{-i}, t^j\right\}$. For $n = 1$, we have :

$$awba_1^{-1} = a\alpha_1a_1\beta_1ba_1^{-1} = a\alpha_1\beta_1b = e$$

In this case $I = \emptyset$ and the property is true.
It is not hard to see that we can take $a = \alpha_1^{-1}$ and $b = (\beta_1\alpha_2\beta_2)^{-1}$.
We go from n to $n+1$. We have :

$$awba_{n+1}^{-1}a_n^{-1}...a_1^{-1} = a\alpha_1a_1\beta_1....\alpha_na_n\beta_n\alpha_{n+1}a_{n+1}(\beta_{n+1}b)a_{n+1}^{-1}a_n^{-1}...a_1^{-1} = e$$

$$awba_{n+1}^{-1}a_n^{-1}...a_1^{-1} = a\alpha_1a_1\beta_1....\alpha_na_n(\beta_n\alpha_{n+1}\beta_{n+1}b)a_n^{-1}...a_1^{-1} = e$$

Hence we must have $\beta_n\alpha_{n+1}\beta_{n+1}.b \in Z(G)$.
We see that the sequence $(\alpha_1a_1\beta_1, ..., \alpha_na_n(\beta_n\alpha_{n+1}\beta_{n+1}))$ satisfies the conditions of the case (I) and hence for every $i, j \in I$ *such that* $i < j \leq n$ *:*

$$\beta_i.\alpha_{i+1}...\beta_{j-1}.\alpha_j \in Z(G)$$

And the result follows.
We easily see that we can take $a = \alpha_{n-1}^{-1}.\beta_{n-2}^{-1}....\beta_1^{-1}\alpha_1^{-1}$ and $b = (\beta_{n-1}\alpha_n\beta_n)^{-1}$.

(2)⇒(1).
The proof is a straightforward calculation.

□

Claim 2. *Let* $A(z) = \{g \in K \mid \exists\alpha, \beta \in G$ *such that* $g = \alpha z\beta\}$. *Then* $A(z)$ *is recursive and there exists an algorithm which for every* $g \in A(z)$ *produces* $\alpha, \beta \in G$ *such that* $g = \alpha z\beta$.

Proof.

Let $g \in K$. Then one can effectively calculate a normal form (in the HNN-extension K) of g say $b_1s^{\varepsilon_1}b_2...b_ns^{\varepsilon_n}b_{n+1}$ where $\varepsilon_i = \pm 1$ and $b_i \in H \times G_0$. If $n \geq 1$, then it is clear that $g \notin A(z)$. Hence we suppose $g \in H \times G_0$. Hence $g = h.g_0$ where $h \in H$ and $g_0 \in G_0$. If $h \neq e$ then $g \notin A(z)$. Hence $g \in G_0$. Then one can effectively calculate a normal form (in the HNN-extension G_0) of g say $b_1z^{\varepsilon_1}b_2...b_nz^{\varepsilon_n}b_{n+1}$ where $\varepsilon_i = \pm 1$ and $b_i \in G$. If $n \geq 2$, then $g \notin A(z)$ and if $\varepsilon_1 = -1$ then $g \notin A(z)$. Hence we suppose $g = b_1zb_2$ hence $g \in A(z)$. And we see that the above procedure is effective and produces $\alpha, \beta \in G$ such that $g = \alpha z\beta$.

□

Claim 3. *Let :*

$$Q = \{(h_1, h_2, g_1, g_2) \mid h_i \in H,\ g_i \in G_0,\ \exists \alpha, \beta \in G \text{ such that } h_1 g_1 s^{-1} h_2 g_2 = \alpha s^{-1} z \beta\}$$

Then Q is recursive and there exists an algorithm which for every $(h_1, h_2, g_1, g_2) \in Q$ produces $\alpha, \beta \in G$ such that $h_1 g_1 s^{-1} h_2 g_2 = \alpha s^{-1} z \beta$.

Proof.

Let us show that the following properties are equivalent :

(1) $(h_1, h_2, g_1, g_2) \in Q$.

(2) $h_1.h_2 = e$, $h_1, h_2 \in L$, $g_1.\phi(h_2) \in G$, $g_2 \in A(z)$, $g_2 = \gamma_1 z \gamma_2$, $\gamma_1 \in Z(G)$ and one can take $\alpha = g_1.\phi(h_2).\gamma_1$, $\beta = \gamma_2^{-1}$.

(1)⇒(2). Let $\alpha, \beta \in G$ such that $h_1 g_1 s^{-1} h_2 g_2 = \alpha s^{-1} z \beta$.

Then the sequence $(h_1 g_1, s^{-1}, h_2.g_2 \beta^{-1} z^{-1}, s, \alpha^{-1})$ is not reduced in the HNN-extension K and hence $h_2.g_2.\beta^{-1} z^{-1} \in L \times Z(G)$. So $h_2 \in L$ and $g_2.\beta^{-1} z^{-1} \in Z(G)$. Hence $g_2 = \delta z \beta \in A(z)$, and $\delta \in Z(G)$. Hence :

$$h_1 g_1 s^{-1} h_2 g_2 \beta^{-1} z^{-1} s \alpha^{-1} = h_1 g_1 h_2 \phi(h_2) \delta \alpha^{-1} = e$$

So $h_1.h_2 = e$ and $g_1 \phi(h_2) = \alpha \delta^{-1} \in G$.

(2)⇒(1) Let $\beta = \gamma_2^{-1}$. Then,

$$h_1 g_1 s^{-1} h_2 g_2 \beta^{-1} z^{-1} s = h_1 g_1 s^{-1} h_2 \gamma_1 z \gamma_2 \gamma_2^{-1} z^{-1}.s =$$

$$= h_1 g_1 s^{-1} h_2 \gamma_1.s$$

$$= h_1 g_1 h_2 \phi(h_2) \gamma_1 = g_2 \phi(h_2) \gamma_1 = \alpha \in G$$

Since L has a generalized soluble word problem in H, and $A(z)$ is recursive and there exists an algorithm which for every $g \in A(z)$ produces $\alpha, \beta \in G$ such that $g = \alpha z \beta$, the conclusion follows from the above equivalence.

□

Claim 4.

For every $a \in \{z, z^{-1}, s^{-1} z, z^{-1} s\}$, the set $A(a) = \{g \in K \mid \exists \alpha, \beta \in G \text{ such that } g = \alpha a \beta\}$ is recursive and there exists an algorithm which for every $g \in A(a)$ produces $\alpha, \beta \in G$ such that $g = \alpha a \beta$. Also for every $a \in \{t^{-i}, t^j\}$, the set

$$A(a) = \{g \in G \times < t | > \mid \exists \alpha, \beta \in G \text{ such that } g = \alpha a \beta\}$$

is recursive and there exists an algorithm which for every $g \in A(a)$ produces $\alpha, \beta \in G$ such that $g = \alpha a \beta$.

Proof. We see that $g \in A(a)$ if and only if $g^{-1} \in A(a^{-1})$ and $g = \alpha a \beta$ if and only if $g^{-1} = \beta^{-1}a^{-1}\alpha^{-1}$. Therefore it is sufficient to show that the above properties are true for $a \in \left\{z, s^{-1}z\right\}$. For the case $a = z$ this was proved in claim 2.

Let $g \in K$. Then one can effectively calculate a normal form (in the HNN-extension K) $b_1 s^{\varepsilon_1} b_2 ... b_n s^{\varepsilon_n} b_{n+1}$ where $\varepsilon_i = \pm 1$ and $b_i \in H \times G_0$. If $n \geq 2$ then $g \notin A(s^{-1}z)$. Hence we must have $n = 1$, $\varepsilon_1 = -1$ and hence $g = b_1 s^{-1} b_2$. Then one can effectively calculate $h_1, h_2 \in H$, $g_1, g_2 \in G_0$ such that $b_1 = h_1.g_1$ and $b_2 = h_2.g_2$. We see that $g \in A(s^{-1}z)$ if and only if $(h_1, h_2, g_1, g_2) \in Q$. Since Q is recursive we see that $A(s^{-1}z)$ is recursive. By the claim 3 there exists an algorithm which for $(h_1, h_2, g_1, g_2) \in Q$ produces $\alpha, \beta \in G$ such that $h_1 g_1 s^{-1} h_2 g_2 = \alpha s^{-1} z \beta$. Hence there exists an algorithm which for every $g \in A(s^{-1}z)$ produces $\alpha, \beta \in G$ such that $g = \alpha s^{-1} z \beta$.

For $a \in \left\{t^{-i}, t^j\right\}$, the conclusion is obvious.

□

Let us prove that the set :

$$L(C, \lambda) = \big\{(g, c, l) \in \Gamma \times \overline{C} \times \mathbb{N} \mid c = (c_1, ..., c_n),\ (1 - 3\lambda)n < l \leq n,$$

$$\exists \alpha, \beta \in G,\ \textit{such that}\ \alpha g \beta = c_1 ... c_l\big\}$$

is recursive and that there exists an algorithm which for every $(g, c, l) \in L(C, \lambda)$ produces $(\alpha, \beta) \in G^2$ such that $\alpha g \beta = c_1 ... c_l$.

Let $(g, c, l) \in \Gamma \times \overline{C} \times \mathbb{N}$. Then one can effectively calculate a normal form $(g_1, ..., g_m)$ of g in Γ.

If $l \leq (1 - 3\lambda)\,|c|$ then $(g, c, l) \notin L(C, \lambda)$. Otherwise we have :

If $(g, c, l) \in L(C, \lambda)$, we must have : $\exists \alpha, \beta \in G, 1 \leq l \leq m, l > (1-3\lambda)\,|c|$ such that $\alpha g \beta = c_1 ... c_l$ and $m = l$. Then we must have a sequence $(\gamma_1, ..., \gamma_m, \gamma_{m+1})$ of G such that $g_1 = \alpha^{-1}\gamma_1 c_1 \gamma_2^{-1}$, $g_i = \gamma_i c_i \gamma_{i+1}^{-1}$, $g_m = \gamma_m c_m \gamma_{m+1}^{-1} \beta^{-1}$. Hence one has $g_i \in A(c_i)$. Then it is sufficient to verify whether $g_i \in A(c_i)$.

If there is some i such that $g_i \notin A(c_i)$ then $(g, c, l) \notin L(C, \lambda)$.

If for every i, $g_i \in A(c_i)$ then by the above claim 4, one can effectively calculate two sequences $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$, $(\beta_1, ..., \beta_m)$ of G such that $g_i = \alpha_i c_i \beta_i$.

By the principal claim we must have : for every $i, j \in I$ such that $i < j$:

$$\beta_i.\alpha_{i+1} ... \beta_{j-1}.\alpha_j \in Z(G) \qquad (*)$$

If for some $i, j \in I$ such that $i < j$, (*) does not hold then $(g, c, l) \notin L(C, \lambda)$.

If for every $i, j \in I$ such that $i < j$, (*) holds then, by the principal claim, $(g, c, l) \in L(C, \lambda)$ and we can take $\alpha = \alpha_m^{-1}.\beta_{m-1}^{-1}....\beta_1^{-1}\alpha_1^{-1}$, $\beta = \beta_m^{-1}$ if $c_m \in \left\{z, z^{-1}, s^{-1}z, z^{-1}s\right\}$, and we can take $\alpha = \alpha_{m-1}^{-1}.\beta_{m-2}^{-1}....\beta_1^{-1}\alpha_1^{-1}$ and $\beta = (\beta_{m-1}\alpha_m\beta_m)^{-1}$ if $c_m \in \left\{t^{-i}, t^j\right\}$.

Hence $L(C, \lambda)$ is recursive and we see, by the above method, that there exists an algorithm which for every $(g, c, l) \in L(C, \lambda)$, produces $(\alpha, \beta) \in G^2$ such that $\alpha g \beta = c_1 ... c_l$.

□

5.5 Proofs of corollaries

Proof of corollary 1. By lemma 5.1.6 if H is finitely presented then $Z(H)$ is recursively presented.

Conversely, let G be a countable recursively presented abelian group. By theorem I G is embeddable in a finitely generated and recursively presented group K such that $G = Z(G) = Z(K)$. By theorem II K is embeddable in finitely presented group H such that $Z(K) = Z(H)$, hence $Z(H) = G$ and the result follows.

□

Proof of corollary 2. By lemme 5.1.6 if H is finitely presented with soluble word problem then $Z(H)$ is recursively presented and with soluble word problem.

Conversely, let G be a countable abelian group with soluble word problem. By theorem I G is embeddable in a finitely generated group with soluble word problem K such that $G = Z(G) = Z(K)$. By theorem II K is embeddable in finitely presented group H with soluble word problem such that $Z(K) = Z(H)$, hence $Z(H) = G$ and the result follows.

□

Proof of corollary 3. It follows from corollary 2 and from the following lemma :

Lemma 5.5.1. *There exists a countable abelian group K with soluble word problem such that every countable abelian group can be embedded in K.*

Proof. Let $(\pi_n)_{n\in\omega}$ be the sequence of prime numbers. Let $K = (\mathbb{Q})^{(\chi_0)} \oplus [\oplus_{i\in\omega}(\mathbb{Z}[\pi_i^\infty])^{(\chi_0)}]$. Then it is not difficult to see that K has a soluble word problem.

Let G be a countable abelian group. By a classical result G is embeddable in a divisible and countable abelian group say G_1. It is also well-known that every divisible abelian group is isomorphic to a direct sum of groups each of which is isomorphic to $\mathbb{Q}$ or a group of the form $\mathbb{Z}(\pi_n^\infty)$. Hence the groups G_1 and G are embeddable in K. Since K has a soluble word problem the result follows.

□

Bibliographie

[1] G.Baumslag, F.B.Cannonito, C.F.Miller III, *Infinitely generated subgroups of finitely presented groups*, I, Math. Zeit, **153** (1977), 117-134.

[2] G.Baumslag, F.B.Cannonito, C.F.Miller III, *Infinitely generated subgroups of finitely presented groups*, II, Math. Zeit, **172** (1980), no.2, 97-105.

[3] W.W.Boone, G.Higman, *An algebraic characterization of groups with soluble word problem*, J.Aust.Math.Soc, **18** (1974), 41-53.

[4] W.W.Boone, Rogers, *On a problem of J.H.C. Whitehead and a problem of Alonzo Church*, Math. Scand, **19** (1966), 185-192.

[5] O.Belegradek, *Finitely determined members of varieties of groups and rings*, Journal of Algebra, **228** (2000), 586-602.

[6] C.C.Chang, H.J.Keisler, *Model theory,* North-Holland, Amsterdam, 1973.

[7] C.C.Chang, *Omiting types of prenex formulas*, J.Symbolic Logic, **32** (1967), 61-74.

[8] C.R.J.Clapham, *Finitely presented groups with word problems of arbitrary degrees of insolubility*, Proc.London.Math.Soc, (3) **14** (1964) 633-76.

[9] C.R.J.Clapham, *An embedding theorem for finitely presented groups*, Proc.Lond.Math.Soc. (3) **17** (1967), 419-430.

[10] P. de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, The University of Chicago Press, 2000.

[11] G.Higman, E.Scott, *Existentially closed groups*, Clarendon Press, Oxford, 1988.

[12] G.Higman, *Subgroups of finitely presented groups*, Proc.Royal.Soc.Ser.A, **262** (1961), 455-475.

[13] W.Hodges, *Model theory*, Cambridge University Press, 1993.

[14] B.M.Hurley, *Small cancellation theory over groups equipped with an integer-valued length function*, dans Word problems II, (North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980), 157-214.

[15] D.L.Johnson, *Presentations of groups*, Cambridge University Press, 1990.

[16] H.J.Keisler, *Forcing and the omitting types theorem,* dans Studies in Model Theory, edited by M.Morley (Math. Assoc. Am., Buffalo, NY), (1973), 96-133.

[17] R.G.Lyndon, P.E.Schupp, *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[18] R.G.Lyndon, *Length functions in groups*, Math.Scand, **12** (1963), 209-234.

[19] A.Macintyre, *Omitting quantifier-free types in generic structures*, J.Symbolic Logic, **37** (1972), no. 3, 521-520.

[20] A.Macintyre, *On algebraically closed groups*, Annals of Math, **96** (1972), 53-97.

[21] A.Macintyre, K.Hickin, *Algebraically closed groups : embeddings and centralizers*, dans Word problems II, (North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980), 141-155.

[22] A.Macintyre, *Model completeness*, dans : J.Barwise, ed., Handbook of Mathematical Logic (North-Holland, Amsterdam, 1977), 139-180.

[23] C.F.Miller III, *Decision problems for groups-survey and reflections,* dans : Algorithms and Classification in combinatorial group theory, MSRI Publications No. 23, edited by G.Baumslag and C.F.Miller III, Springer-Verlag (1991), 1-59.

[24] C.F.Miller III, *The word problem in quotients of groups,* in Aspects of Effective Algebra, ed. J.N.Crossley, Proceedings of a conference at Monash University, 1979, Upside Down A Book Company, Steel's Creek, (1981), 246-250.

[25] M.Morley, *The number of countable models*, J.Symbolic logic, **35** (1970), 14-18.

[26] B.Poizat, *Cours de théorie des modèles*, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1985.

[27] H.Simmons, *Large and small existentially closed structures*, J.Symbolic Logic, **41** (1976), no.2, 379-390.

[28] H.Simmons, *Counting countable e.c. structures*, Logique et Analyse, **18** (1975), no. 71-72, 309-357.

[29] R.J.Thompson, *Embedings into finitely generated simple groups which preserve the word problem*, dans Word problems II, (North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980), 395-441.

[30] M.Ziegler, *Algebraisch abgeschlossene Gruppen*, dans Word problems II, (North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980), 449-576.

[31] Kourovka Notebook, édition 1999, problème 5.47.