Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L1 UE TMB

Printemps 2014

TD 3 : Géométrie du plan et de l'espace.

1 ESPACES VECTORIELS ET VECTEURS.

Exercice 1 (Combinaisons linéaires).

Montrer que le vecteur $\vec{u} = (-4, -3, 2)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des trois vecteurs

$$\vec{e_1} = (1, 1, 0),\ \vec{e_2} = (0, 1, 1),\ \vec{e_3} = (1, 0, 1).$$

[C'est-à-dire que $\vec{u}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{u} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.]

Exercice 2 (Vecteurs linéairement indépendants).

Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants ?

a) $(-1, 2)$ et $(3, -5)$.
b) $(2, -1)$ et $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$.
c) $(1, -2, 1)$ et $(-3, 6, -3)$.
d) $(3, -1, 1)$ et $(6, -2, -2)$.
e) $(1, 2, 3)$, $(-1, 1, 1)$ et $(0, 1, -1)$.
f) $(1, 2, 3)$, $(-1, 1, 1)$ et $(0, 3, 4)$.
g) $(1, -1, 3)$, $(-2, 1, 6)$ et $(0, 0, 1)$.
h) $(1, -1, 3)$, $(1, -1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Exercice 3 (Bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$).

1. Les vecteurs $\vec{e_1} = (-1, 1)$ et $\vec{e_2} = (1, 1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$? Si oui, déterminer les coordonnées cartésiennes du point $A = (3, 4)$ dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Mêmes questions pour les vecteurs $\vec{e_1}' = (2, -1)$ et $\vec{e_2}' = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$
2. Les vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_2}$ de l'exercice 1 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$? Si oui, déterminer les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{u} = (-4, -3, 2)$ dans cette base ?

Exercice 4 (Produit scalaire et vecteurs orthogonaux dans le plan).

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère les deux vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

1. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2. Calculer et représenter le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$. Puis déterminer et représenter les deux vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ et de même norme.

Exercice 5 (Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace).

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les trois vecteurs $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, et $\vec{w}=-2\vec{k}$.

1. Représenter ces trois vecteurs puis calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ et le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
2. Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$, $\vec{v}\wedge\vec{u}$, $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ et $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$ puis représenter ces vecteurs.
3. Déterminer le produit mixte $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2 GEOMETRIE ANALYTIQUE DU PLAN ET DE L'ESPACE.

Exercice 6 (Droites du plan, 1).

Dans le plan, on considère les deux points $A=(1,2)$ et $B=(-1,0)$. Déterminer :

1. l'équation de la droite Δ passant par A et B ;
2. l'équation de la droite perpendiculaire à Δ passant par O ;
3. l'équation de la droite orthogonale à Δ passant par O ;
4. la distance entre A et B ;
5. la distance du point $C=(1,1)$ à la droite (AB) ;
6. [Facultatif] l'aire du parallelogramme de côtés $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Exercice 7 (Droites du plan, 2).

Dans le plan, on considère le point $A=(5,3)$ et la droite Δ d'équation $x-y+1=0$. Déterminer :

1. l'équation de la droite parallèle à Δ passant par A ;
3. l'équation de la droite perpendiculaire à Δ passant par A ;
4. la distance du point A à la droite Δ ;
5. la projection orthogonale de A sur Δ.

Exercice 8 (Plans de l'espace).

Dans l'espace, on considère le point $A=(-1,1,2)$. Déterminer les équations des plans suivants :

1. le plan passant par A et orthogonal au vecteur $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$;
2. le plan passant par A et parallèle au plan d'équation $3x-2y+4z-5=0$;
3. le plan passant par A, $B=(1,2,-1)$ et $C=(3,0,-1)$.
4. la distance du point $E=(1,1,0)$ au plan (ABC).

Exercice 9 (Droites de l'espace).

Soient $A=(1,0,2)$, $B=(0,1,1)$ et $C=(1,-1,0)$ trois point de l'espace. Déterminer :

1. l'équation paramétrique de la droite Δ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$;
2. l'intersection de la droite Δ avec le plan d'équation $z = 0$;
3. l'équation cartésienne de la droite Δ ;
4. l'équation du plan contenant la droite Δ et passant par O ;
5. la distance du point $E = (1, 2, 3)$ à la droite Δ.
   [Indication : on commence par chercher l'équation du plan passant par E et orthogonal à Δ.]
6. [Facultatif] le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.