TD 5 : Dérivées.

EXERCICES OBLIGATOIRES.

Exercice 1 (Théorème des accroissement et règle de l'Hôpital).

1) Montrer que : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.
Indication : Selon la valeur de x, appliquer le théorème des accroissement finis à $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[x,0]$ ou sur $[0,x]$.
2) En appliquant la règle de l'Hôpital, montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, puis que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 (Calcul de dérivées).

1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{2+x}}{2+x^2}$;
b) $f(x) = (x^3+7x+1)\sqrt{x^3+1}$;
c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2\cos^2 x}}$
d) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x^3}}-1}{\sqrt{x^2+1}}$;
e) $f(x) = \ln \mid \cos(x/2) \mid$;
f) $f(x) = x^3 \cos x + \sin^2 x$;
g) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$;
h) $f(x) = \arccos \frac{x+1}{\sqrt{2}}$;
i) $f(x) = \arcsin \sqrt{-x}$;
j) $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;
k) $f(x) = \arctan(\ln x^2)$.

2. Montrer que la fonction suivante est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3-x^2) & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Exercice 3 (Étude de fonction).
Étudier les fonctions suivantes (tableau de variations et graphe) :

a) $f(x) = \arcsin(2x^2-1)$;
b) $f(x) = \arctan \frac{3x}{1-x^2}$;
c) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} - 2\arctan x$;
d) $f(x) = \operatorname{th}\frac{1}{x}$.

Exercice 4 (Polynômes de Taylor).
Trouver le polynôme de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$; $g(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ autour de $x_0 = 0$;
$h(x) = (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{Q}$) autour de $x_0 = 0$;
b) $f(x) = \sin(3x)$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = \frac{\pi}{2}$; $g(x) = \operatorname{sh}(2x)$ autour de $x_0 = 0$;
c) $f(x) = e^{2x}$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$; $g(x) = \ln(1+2x)$ autour de $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$.
d) $f(x) = \cos^2 x$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
e) $f(x) = \sqrt{1+\arcsin x}$ autour de $x_0 = 0$.

EXERCICES FACULTATIFS

Exercice 5 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée.

a) $f(x) = (x^2+1)\sqrt{x^3-1}$,

b) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{x}+1}$,

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$,

d) $f(x) = x - \ln x$,

e) $f(x) = \sqrt{\cos^2(x)+1}$,

f) $f(x) = \dfrac{1}{3}\tan^3(x) - \tan(x) + x$,

g) $f(x) = x \ln x$,

h) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$,

i) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{x^2+1}}$,

j) $f(x) = \ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$,

k) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$,

l) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x$,

m) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{x}$,

n) $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x}$,

o) $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x}}$.

Exercice 6 Etudier les fonctions suivantes (tableau de variations et graphe) :

a) $f(x) = x^2(x-2)^2$,

b) $f(x) = x^2(x-1)^3$,

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$,

d) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$,

e) $f(x) = \mathrm{th}x - \dfrac{1}{\mathrm{ch}x}$.

Exercice 7 Montrer que la fonction $f(x) = |x^2-3|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Etudier les variations et tracer le graphe de cette fonction.

Exercice 8 En utilisant la formule de Taylor, montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Pour quelles valeurs de $x \geq 0$ peut-on dire que $x - \dfrac{x^2}{2}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-3} près ?

Exercice 9 Trouver le polynôme de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{e^x}$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \ln(1+\sin x)$ autour de $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \arcsin(2x)$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$;

d) $f(x) = \mathrm{sh}(x+x^2)$ autour de $x_0 = 0$;

e) $f(x) = \mathrm{ch}(x+x^2)$ autour de $x_0 = 0$;

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ autour de $x_0 = 0$.