

## Fiche d'exercices n° 8 Primitives et intégrales

### 1 Exercices obligatoires

**Exercice 1.** Calculer par parties les intégrales suivantes :

$$a) \int x^2 \ln x \, dx, \quad b) \int \ln x \, dx, \quad c) \int x e^{-x} \, dx, \quad d) \int \cos x e^x \, dx.$$

**Exercice 2.** En effectuant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int \cos x \sin x \, dx, \quad b) \int x(x^2 - 1)^5 \, dx, \quad c) \int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \, dx, \quad d) \int \frac{1}{1 + e^x} \, dx.$$

**Exercice 3.** Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_0^2 f(x) \, dx \text{ où } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ x & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}, \quad b) \int_{-1}^2 |x| \, dx,$$

$$c) \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx, \quad d) \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx.$$

**Exercice 4.** Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int \frac{x+2}{x^2-3x+2} \, dx, \quad b) \int \frac{1}{x^2-1} \, dx, \quad c) \int \frac{1}{x(x+1)^2} \, dx, \quad d) \int \frac{1}{x^2+x+1} \, dx.$$

**Exercice 5.** Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int \sin^2 x \, dx, \quad b) \int \tan x \, dx, \quad c) \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx, \quad d) \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx.$$

**Exercice 6.** Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int x \sqrt{x^2+1} \, dx, \quad b) \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \, dx, \quad c) \int \sqrt{x^2-1} \, dx, \quad d) \int \sqrt{\frac{x+1}{x}} \, dx.$$

**Exercice 7.**

1. Montrer que l'aire du disque de rayon  $r$  vaut  $\pi r^2$ .

2. Calculer l'aire de la portion de plan délimité par les courbes des fonctions  $f(x) = x + \frac{1}{2x^2}$ ,  $g(x) = x$  et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 2$ .

### 2 Exercices facultatifs

**Exercice 8.** Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int \frac{1}{x \ln x} \, dx, \quad b) \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx, \quad c) \int x^2 \cos(2x) \, dx$$

$$d) \int x \arctan x \, dx, \quad e) \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} \, dx.$$

**Exercice 9.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} a) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, & \quad b) \int \frac{\sin x}{3-2\cos^2 x} dx, & \quad c) \int \frac{1}{\sin x} dx, \\ d) \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx, & \quad e) \int \frac{x^2}{x-1} dx, & \quad f) \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx. \end{aligned}$$

**Exercice 10.**

1. Calculer l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe de la fonction  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ , par l'axe des  $x$  et par les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ .

2. Calculer l'aire de la portion de plan délimité par les courbes des fonctions  $f(x) = \frac{x^2}{2}$ ,  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

**Exercice 11.**

1. Calculer la longueur de l'arc de courbe de la fonction  $f(x) = \operatorname{ch} x$  de  $(0, 1)$  à  $(a, \operatorname{ch}(a))$  où  $a > 0$ .

2. Calculer la longueur de l'arc de parabole  $y = x^2$  de  $(0, 0)$  à  $(1, 1)$ .

(Rappel : La longueur d'un arc  $\mu$ , dans un repère orthonormé, décrit par une fonction  $f(x)$  de classe  $C^1$ , lorsque  $x$  varie de  $a$  à  $b$ , vaut  $\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx$  en unités de longueur.)

**Exercice 12.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} a) \int \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx, & \quad b) \int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx, & \quad c) \int \operatorname{sh}^2 x dx, \\ d) \int \frac{\cos x}{2+\cos x} dx, & \quad e) \int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx, & \quad f) \int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx. \end{aligned}$$

**Exercice 13.** Soit  $a > 0$  et soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^{3/2}$ . Soit  $C$  la portion de la courbe de  $f$  délimitée par  $0$  et  $a$ . Calculer le volume engendré par la rotation de  $C$  autour de l'axe des  $x$ .

**Exercice 14.** Calculer l'aire d'une ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ).

**Exercice 15.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$a) H(x) = \int_x^{x^2+1} f(t) dt, \quad b) H(x) = \int_0^x (t - f(t)) dt, x > 0, \quad c) H(x) = \int_0^{\ln x} (\sin t)f(t) dt, x > 1.$$

**Exercice 16.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} a) \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} dx, & \quad b) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) dx, & \quad c) \int_1^e \ln x dx, \\ d) \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx, & \quad e) \int \frac{x^2+x+1}{x^3+x} dx, & \quad f) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx. \\ g) \int \sin^3 x \cos^2 x dx, & \quad h) \int \frac{1}{x^4+1} dx, & \quad i) \int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^2 x dx. \end{aligned}$$