Les CSA*-e.c. groupes ne sont pas superstables

Abderezak OULD HOUCINE
Équipe de Logique Mathématique, Université de Paris VII
75251 Paris, France
ould@logique.jussieu.fr

Theorem 0.1 *Un groupe G qui est CSA*-e.c n'est pas superstable. Plus précisément pour tout cardinal infini λ, tout CSA*-groupe $\mathcal{M}$ contenant un ensemble A de cardinal λ se plonge dans un groupe $\mathcal{N} \equiv G$ tel que $|S_4^{\mathcal{N}}(A)| \geq \lambda^{\aleph_0}$.*

1 Préliminaires

Rappelons qu'un CSA*-groupe est un CSA-groupe sans involutions. On a le théorème suivant qui peut être extrait de la démonstration du Theorem 1.3 dans [1] (voir la section 8 : embedding in finitely generated CSA-groups):

Theorem 1.1 *Soit G un CSA*-groupe contenant un ensemble infini d'éléments $\{g_i \mid i \in 2\mathbb{N}+1\}$ tel que $g_i^{-1} \neq g_j$ pour tout $i, j \in 2\mathbb{N}+1$. Soit $F = G * \langle a, b, c|\rangle$. Soient :*

$$D = \langle c^i b^{-i} a^i b^i \mid i \in 2\mathbb{N}+1\rangle \text{ et } E = \langle g_i a^{-i} b^i a^i \mid i \in 2\mathbb{N}+1\rangle.$$

Soit φ l'isomorphisme, définie à partir de la fonction $\varphi : c^i b^{-i} a^i b^i \mapsto g_i a^{-i} b^i a^i$ ($i \in 2\mathbb{N}+1$), de D à E. Considérons la HNN-extension

$$F^* = \langle F, t \mid t^{-1} dt = \varphi(d)\ ,\ d \in D\rangle.$$

Alors :
(1) F^* est un CSA-groupe.*
(2) $\{g_i \mid i \in 2\mathbb{N}+1\} = \{t^{-1} c^i b^{-i} a^i b^i t a^{-i} b^{-i} a^i \mid i \in 2\mathbb{N}+1\}$ dans F^*.

La seule propriété qui n'est pas démontrée dans [1] est la propriété (2) mais elle est évidente à partir de la définition de F^*.

On aura besoin plutôt de la proposition suivante qui découle directement du théorème 1.1 :

Proposition 1.2 *Soient G un CSA*-groupe et $X \subseteq G$ tel que $|X| = \aleph_0$ et tels que pour tout $x, y \in X$, $x \neq y^{-1}$. Alors G se plonge dans un CSA*-groupe H contenant 4 éléments a, b, c, t tel que $X = \{t^{-1} c^i b^{-i} a^i b^i t a^{-i} b^{-i} a^i \mid i \in 2\mathbb{N}+1\}$.* □

Commençons par un lemme sur l'arithmétique cardinal :

Lemma 1.3

(1). *Soit A un ensemble de cardinal infini λ. Soit*

$$[A]^{\aleph_0} = \{X \subseteq A \mid |X| = \aleph_0\}.$$

Alors $|[A]^{\aleph_0}| = \lambda^{\aleph_0}$.

(2). *Pour tout cardinal infini λ_0 il existe un cardinal λ tel que $\lambda > 2^{\lambda_0}$ et $\lambda^{\aleph_0} = 2^{\lambda}$.*

Proof

(1). D'abord on voit que $|[A]^{\aleph_0}| \geq \lambda$. On a aussi $|[A]^{\aleph_0}| \geq 2^{\aleph_0}$. En effet si $X \subseteq A$ avec $|X| = \aleph_0$ alors $[X]^{\aleph_0} \subseteq [A]^{\aleph_0}$ et comme $|[X]^{\aleph_0}| = 2^{\aleph_0}$ on obtient $|[A]^{\aleph_0}| \geq 2^{\aleph_0}$.

Soit S l'ensemble des suites de A. Alors on sait que $|S| = \lambda^{\aleph_0}$ car S n'est rien d'autre que l'ensemble des fonctions de $\aleph_0$ dans A. Pour chaque suite u de S définissons $supp(u) = \{u_n | n \in \omega\}$ et définissons sur S la relation d'équivalence

$$u \equiv v \text{ ssi } supp(u) = supp(v)$$

Désignons par $\overline{u}$ la classe d'équivalence de u. Soit $(\overline{u}_i : i \in \gamma)$ une suite représentative des classes d'équivalences. Soient

$$X = \{i \in \gamma \mid |supp(u_i)| < \aleph_0\}$$

$$Y = \{i \in \gamma \mid |supp(u_i)| = \aleph_0\}$$

Alors

$$S = \bigcup_{i \in X} \overline{u}_i \cup \bigcup_{i \in Y} \overline{u}_i$$

La classe $\overline{u}_i$ est l'ensemble des fonctions surjectives de $\aleph_0$ à valeurs dans $supp(u)$. Par conséquent on a $|\overline{u}_i| = 2^{\aleph_0}$ pour tout $i \in \gamma$. Comme il existe λ suites finies dans A, on obtient $|X| = \lambda$ et d'où

$$|\bigcup_{i \in X} \overline{u}_i| = 2^{\aleph_0}\lambda$$

Mais on a aussi $|Y| = |[A]^{\aleph_0}|$ d'où

$$|\bigcup_{i \in Y} \overline{u}_i| = 2^{\aleph_0}|[A]^{\aleph_0}|$$

Finalement on a :

$\lambda^{\aleph_0} = |S| = 2^{\aleph_0}\lambda + 2^{\aleph_0}|[A]^{\aleph_0}| = 2^{\aleph_0}(\lambda + |[A]^{\aleph_0}|)$. Comme $\lambda + |[A]^{\aleph_0}| \geq 2^{\aleph_0}$ on obtient $\lambda^{\aleph_0} = \lambda + |[A]^{\aleph_0}|$ et comme $|[A]^{\aleph_0}| \geq \lambda$ on obtient $\lambda^{\aleph_0} = |[A]^{\aleph_0}|$.

(2). Définissons une suite de cardinaux $(\mu_n)_{n \in \omega}$ de la façon suivante :

$$\mu_0 = \lambda_0; \quad \mu_{n+1} = 2^{\mu_n},$$

et posons $\lambda = \sum_{n\in\omega} \mu_n$. Montrons que λ vérifie les propriété recherchées. D'abord on a $\lambda > 2^{\lambda_0}$. Montrons que $\lambda^{\aleph_0} = 2^\lambda$. Comme $\lambda < 2^\lambda$ on a $\lambda^{\aleph_0} \leq 2^\lambda$. Il suffit donc de montrer que $\lambda^{\aleph_0} \geq 2^\lambda$. Or on a

$$2^\lambda = \prod_{n\in\omega} 2^{\mu_n}$$

et $2^{\mu_n} \leq \lambda$. D'où $2^\lambda \leq \prod_{n\in\omega} \lambda = \lambda^{\aleph_0}$. (Cette propriété (2) se trouve aussi comme exercice dans le livre de Cori-Lascar II(14 du chapitre 7)). □

Montrons maintenant le lemme suivant :

Lemma 1.4 *Soient G un groupe sans involutions et A un sous-ensemble de G de cardinal infini λ et vérifiant $A = A^{-1}$. Soit*

$$\flat A = \{X \subseteq A \mid \ |X| = \aleph_0 \text{ et } (x, y \in X \Rightarrow x \neq y^{-1})\}$$

Alors $|\flat A| = \lambda^{\aleph_0}$.

Proof
Soit $\mathcal{H} = \{X \subseteq A \mid (x, y \in X \Rightarrow x \neq y^{-1})\}$ ordonné par inclusion. Alors $\mathcal{H}$ n'est pas vide et est inductive. D'après le lemme de Zorn, il admet un élément maximal M. Alors on voit que $A = M \cup M^{-1}$ car si $a \in A \setminus M$, alors (comme $a^{-1} \in A$) il existe $x \in M$ tel que $x = a^{-1}$. Par conséquent $|M| = \lambda$ et d'après le lemme 1.3, $|[M]^{\aleph_0}| = \lambda^{\aleph_0}$. Comme $[M]^{\aleph_0} \subseteq \flat A$ alors $|\flat A| \geq \lambda^{\aleph_0}$. Et comme $\flat A \subseteq [A]^{\aleph_0}$ d'après le lemme 1.3 on a $|\flat A| \leq \lambda^{\aleph_0}$. D'où $|\flat A| = \lambda^{\aleph_0}$. □

Une petite notation utile : soient $\mathcal{M}$ un modèle, $\overline{a}$ un uplet fini de $\mathcal{M}$ et $A \subseteq \mathcal{M}$. On adopte la notation suivante :

$$\mathbf{tp}_{at}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A) = \{\psi(\overline{x}) \mid \psi \text{ atomique ou négatomique à paramètre dans } A,$$

$$\text{telle que } \mathcal{M} \models \psi(\overline{a})\}$$

Bien sûr on a $\mathbf{tp}_{at}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A) \subseteq \mathbf{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A)$ et $\mathbf{tp}_{at}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A) = \mathbf{tp}_{at}^{\mathcal{N}}(\overline{a}/A)$ si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. On a aussi $\mathbf{tp}_{at}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A \cup A^{-1}) = \mathbf{tp}_{at}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A)$.

Proposition 1.5 *Soit $\mathcal{M}$ un CSA*-groupe contenant un sous-ensemble A de cardinal infini λ. Alors M se plonge dans un CSA*-groupe $\mathcal{N}$ contenant une suite $(\overline{a}_i : i \in \lambda^{\aleph_0})$, $|\overline{a}_i| = 4$, telle que $\boldsymbol{tp}_{at}^{\mathcal{N}}(\overline{a}_i/A) \neq \boldsymbol{tp}_{at}^{\mathcal{N}}(\overline{a}_j/A)$ pour $i \neq j$.*

Proof
Quitte à remplacer A par $A \cup A^{-1}$ on peut supposer que $A = A^{-1}$. D'après le lemme 1.4 on a $|\flat A| = \lambda^{\aleph_0}$. Soit $(X_i : i \in \lambda^{\aleph_0})$ la liste des éléments de $\flat A$.

On va construire par induction, une suite de CSA*-groupes $(G_i : i \in \lambda^{\aleph_0})$ et une suite d'éléments $((a_i, b_i, c_i, t_i) : i \in \lambda^{\aleph_0})$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) (a_i, b_i, c_i, t_i) est un uplet de G_i, $A \subseteq \mathcal{M} \subseteq G_0$,
(2) $\bigcup_{k<i} G_k \hookrightarrow G_i$,
(2) $X_i = \{t_i^{-1} c_i^k b_i^{-k} a_i^k b_i^k t_i a_i^{-k} b_i^{-k} a_i^k \mid k \in 2\mathbb{N}+1\}$.

La construction repose sur la proposition 1.2.

Pour $i = 0$. Comme $\mathcal{M}$ est un CSA*-groupe, d'après la proposition 1.2, $\mathcal{M}$ se plonge dans un CSA*-groupe H contenant 4 éléments a, b, c, t tel que $X_0 = \{t^{-1} c^k b^{-k} a^k b^k t a^{-k} b^{-k} a^k \mid k \in 2\mathbb{N}+1\}$. Posons $G_0 = H$ et $(a_0, b_0, c_0, t_0) = (a, b, c, t)$.

Supposons maintenant que la suite $(G_k : k < i)$ soit construite et posons $K = \bigcup_{k<i} G_k$. Comme la classe des CSA*-groupes est inductive K est un CSA*-groupe et d'après la proposition 1.2, K se plonge dans un CSA*-groupe H contenant 4 éléments a, b, c, t tel que $X_i = \{t^{-1} c^k b^{-k} a^k b^k t a^{-k} b^{-k} a^k \mid k \in 2\mathbb{N}+1\}$. En posant $G_i = H$ et $(a_i, b_i, c_i, t_i) = (a, b, c, t)$ on a les propriétés voulues.

Posons $\mathcal{N} = \bigcup_{i \in \lambda^{\aleph_0}} G_i$. Alors $\mathcal{N}$ est un CSA*-groupe qui vérifie :

$A \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ et $X_i = \{t_i^{-1} c_i^k b_i^{-k} a_i^k b_i^k t_i a_i^{-k} b_i^{-k} a_i^k \mid k \in 2\mathbb{N}+1\}$ pour tout $i \in \lambda^{\aleph_0}$.

Soient $i, j \in \lambda^{\aleph_0}$, $i \neq j$, et montrons que $\mathbf{tp}_{at}^{\mathcal{N}}(\overline{a}_i/A) \neq \mathbf{tp}_{at}^{\mathcal{N}}(\overline{a}_j/A)$. Comme $i \neq j$ alors $X_i \neq X_j$ et d'où, quitte à faire une permutation entre i et j, il existe $a \in X_i$ tel que $a \notin X_j$. Comme

$$X_i = \{t_i^{-1} c_i^k b_i^{-k} a_i^k b_i^k t_i a_i^{-k} b_i^{-k} a_i^k \mid k \in 2\mathbb{N}+1\}$$

il existe $\ell \in 2\mathbb{N}+1$ tel que

$$a = t_i^{-1} c_i^\ell b_i^{-\ell} a_i^\ell b_i^\ell t_i a_i^{-\ell} b_i^{-\ell} a_i^\ell.$$

Mais comme

$$X_j = \{t_j^{-1} c_j^k b_j^{-k} a_j^k b_j^k t_j a_j^{-k} b_j^{-k} a_j^k \mid k \in 2\mathbb{N}+1\},$$

et donc $t_j^{-1} c_j^\ell b_j^{-\ell} a_j^\ell b_j^\ell t_j a_j^{-\ell} b_j^{-\ell} a_j^\ell \in X_j$, on a

$$a \neq t_j^{-1} c_j^\ell b_j^{-\ell} a_j^\ell b_j^\ell t_j a_j^{-\ell} b_j^{-\ell} a_j^\ell.$$

Par conséquent $\mathbf{tp}_{at}^{\mathcal{N}}(\overline{a}_i/A) \neq \mathbf{tp}_{at}^{\mathcal{N}}(\overline{a}_j/A)$. □

2 Démonstration du Théorème 0.1

Soient G un groupe CSA*-e.c. et λ un cardinal infini et $\mathcal{M}$ un CSA*-groupe contenant un ensemble A de cardinal λ. D'après la proposition 1.5 $\mathcal{M}$ se plonge dans un CSA*-groupe $\mathcal{K}$ contenant une suite $(\overline{a}_i : i \in \lambda^{\aleph_0})$, $|\overline{a}_i| = 4$, telle que $\mathbf{tp}^{\mathcal{K}}_{at}(\overline{a}_i/A) \neq \mathbf{tp}^{\mathcal{K}}_{at}(\overline{a}_j/A)$ pour $i \neq j$.

Comme la théorie des CSA*-groupes a la propriété de plongement, tout CSA*-groupe est modèle de $Th_\forall(G)$. Par conséquent $\mathcal{K}$ se plonge dans un modèle $\mathcal{N}$ de $Th(G)$. Comme $\mathbf{tp}^{\mathcal{K}}_{at}(\overline{a}_i/A) = \mathbf{tp}^{\mathcal{N}}_{at}(\overline{a}_i/A)$ pour tout $i \in \lambda^{\aleph_0}$ et comme $\mathbf{tp}^{\mathcal{K}}_{at}(\overline{a}_i/A) \neq \mathbf{tp}^{\mathcal{K}}_{at}(\overline{a}_j/A)$ pour $i \neq j$ alors $\mathbf{tp}^{\mathcal{N}}_{at}(\overline{a}_i/A) \neq \mathbf{tp}^{\mathcal{N}}_{at}(\overline{a}_j/A)$ pour $i \neq j$. Par conséquent $\mathbf{tp}^{\mathcal{N}}(\overline{a}_i/A) \neq \mathbf{tp}^{\mathcal{N}}(\overline{a}_j/A)$ pour $i \neq j$ et donc $|S^{\mathcal{N}}_4(A)| \geq \lambda^{\aleph_0}$.

D'après le lemme1.3, pour tout cardinal infini λ_0, il existe $\lambda > 2^{\lambda_0}$ tel que $\lambda^{\aleph_0} = 2^\lambda$. Par conséquent, d'après ce qui précède, pour tout cardinal infini λ_0 il existe un cardinal $\lambda > 2^{\lambda_0}$ et un modèle $\mathcal{N}$ de $Th(G)$ contenant un ensemble infini A de cardinal λ tel que $|S^{\mathcal{N}}_4(A)| \geq 2^\lambda$. Par conséquent G n'est pas superstable. □

References

[1] E.Jaligot, A.Ould Houcine. Existentially closed CSA-groups. In *Journal of Algebra.*