Groupes, Géométrie et Logique

Abderezak OULD HOUCINE

Thème Logique

ICJ, Jeudi 16 février 2006

Théorie des modèles

• Etude d'une structure mathématique du point de vue de sa théorie du premier ordre.
• Etude des modèles d'une théorie donnée.

Groupes et Théorie des modèles

Plusieurs contextes :
• Groupes d'automorphismes d'une structure.
• Etude modèle-théorique d'un groupe : exemple des groupes libres.
• Classification des groupes ayant certaines propriétés modèles-théoriques : groupes simples de rang de Morley fini et *conjecture de Cherlin-Zilber* :

Un groupe simple de rang de Morley fini est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

• Etude "pure" : stabilité, superstabilité, simplicité, supersimplicité, ...
• ...

Interaction : théorie géométrique des groupes et théorie des modèles

• Solution par Myasnikov, Kharlampovich et Sela de la conjecture de Tarski :

deux groupes libres non-abélien de type fini sont élémentairement équivalents.

$\Rightarrow$ utilisation des techniques de la théorie géométrique des groupes.

Géométrie algébrique sur les groupes et rangs modèles-théoriques

Outil : Rang de Morley sans-quantificateurs

• Un sous-groupe de type fini d'un groupe de rang de Morley fini a un rang sans-quantificateurs fini.

• Un groupe linéaire a un rang de Morley sans-quantificateurs fini.

• Un modèle de la théorie universelle des groupes libres a un rang de Morley sans-quantificateurs fini.

Liens

(1) Géométrie algébrique sur les groupes (Baumslag, Myasnikov et Remeslennikov (1998)) et modèles de la théorie universelle des groupes libres.
Soit G un groupe.

$$G[x_1, \ldots, x_n] = G * F(x_1, \ldots, x_n).$$

Soit $S \subseteq G[x_1, \ldots, x_n]$.

ensembles algébriques

$$V(S) = \{\bar{g} \in G^n \mid s(\bar{g}) = 1, \forall s \in S\}.$$

sous-ensembles fermés de G^n:
$\bigcap (V(S_1) \cup \cdots \cup V(S_n)) :=$ intersection d'union finie d'ensembles algébriques.

G est équationnellement noethérien

$$\Updownarrow$$

$\forall n \geq 1, \forall S \subseteq G[x_1, \ldots, x_n], \exists S_0 \subseteq S$, S_0 fini,
$$V(S) = V(S_0)$$

Exemples

• groupes linéaires, groupes abéliens (Baumslag, Myasnikov, Remeselennikov, 1998),

• groupes de type fini abélien-par-nilpotent (Bryant, 1977),

• groupes hyperboliques sans-torsion, (Sela, 2002).

Théorème 1 *(2005) Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ deux modèles non-abéliens de la théorie universelle des groupes libres. Alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont connexes et $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{N}$. En particulier $\mathcal{M} \preceq_\exists \mathcal{M} * \mathbb{Z}$. En plus tout sous-groupe propre et sans-quantificateurs définissable de $\mathcal{M}$ est abélien.*

Problème ouvert : $\mathcal{M} \preceq \mathcal{M} * \mathbb{Z}$?

(2) Groupes limites des groupes équationnellement noethériens

Proposition 2 *(2005)*
Soit H un groupe équationnellement noethérien. Alors pour tout groupe de type fini G il existe une collection finie d'epimorphismes $\{f_i : G \to L_i\}$, où L_i est un groupe H-limite, telle que pour tout groupe H-limite L, tout morphisme $f : G \to L$ se factorise à travers un certain f_i.

Proposition 3 *(2005)*
Soit K la classe des groupes limites marqués. Il existe une fonction $\varphi : K \to \mathbb{N}$ qui vérifie : $(G,\bar{a}) \cong (H,\bar{b})$ ssi $\varphi((G,\bar{a})) = \varphi((H,\bar{b}))$.

Problème ouvert : Existe-il une notion de dimension dans la classe des groupes limites ?

Groupes Hyperboliques

Soit G un groupe hyperbolique. Soit

$$\delta_0 = \text{ inf } \{\delta \mid G \text{ est } \delta\text{-hyperbolique}\}$$

Problème : Quand est-ce que $\delta_0 = 0$?

> **Théorème 4** *(2004)*
> *Soit H un groupe δ-hyperbolique pour un $\delta < \frac{1}{2}$. Alors H est un produit libre $F * G_1 * \cdots * G_n$ où F est un groupe libre de rang fini et chaque G_i est un groupe fini.*

Des questions de stabilité modèle-théorique apparaissent naturellement:

> **Théorème 5** *(2004)*
> *Un groupe superstable hyperbolique sans-torsion est cyclique.*

Problème ouvert : Stabilité des groupes hyperboliques.