Introduction à la théorie élémentaire des groupes libres

Abderezak Ould Houcine

Université Lyon 1, Université de Mons

Séminaire interuniversitaire de Logique, Mons

19 novembre 2009

Sommaire

1. Un peu de théorie des modèles
   - Langages, structures, extensions élémentaires
   - Le cas de la théorie des groupes
2. Groupes libres, produits amalgamés, HNN-extensions
   - Groupes libres
   - Produits libres & HNN-extensions
3. Théorie élémentaire des groupes libres
   - Problème de Tarski
   - Approche de Sela et groupes limites

Sommaire

1. Un peu de théorie des modèles
   - Langages, structures, extensions élémentaires
   - Le cas de la théorie des groupes
2. Groupes libres, produits amalgamés, HNN-extensions
   - Groupes libres
   - Produits libres & HNN-extensions
3. Théorie élémentaire des groupes libres
   - Problème de Tarski
   - Approche de Sela et groupes limites

Langages

Langages

- Un langage du premier ordre $\mathcal{L}$ est un ensemble de symboles qui se compose :

Langages

- Un langage du premier ordre $\mathcal{L}$ est un ensemble de symboles qui se compose :

  (i) d'un ensemble $\mathcal{F}$ de symboles de fonctions, avec pour pour chaque $f \in \mathcal{F}$ un entier n_f appelé l'arité de f,

Langages

- Un langage du premier ordre $\mathcal{L}$ est un ensemble de symboles qui se compose :

  (i) d'un ensemble $\mathcal{F}$ de symboles de fonctions, avec pour pour chaque $f \in \mathcal{F}$ un entier n_f appelé l'arité de f,

  (ii) d'un ensemble $\mathcal{R}$ de symboles de relations, avec pour chaque $R \in \mathcal{R}$ un entier n_R appelé l'arité de R,

Langages

- Un langage du premier ordre $\mathcal{L}$ est un ensemble de symboles qui se compose :

  (i) d'un ensemble $\mathcal{F}$ de symboles de fonctions, avec pour pour chaque $f \in \mathcal{F}$ un entier n_f appelé l'arité de f,

  (ii) d'un ensemble $\mathcal{R}$ de symboles de relations, avec pour chaque $R \in \mathcal{R}$ un entier n_R appelé l'arité de R,

  (iii) d'un ensemble $\mathcal{C}$ de symboles de constantes.

Structures

Structures

- Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ est la donnée :

Structures

- Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ est la donnée :

  (i) d'un ensemble M appelé domaine de $\mathcal{M}$,

Structures

- Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ est la donnée :

  (i) d'un ensemble M appelé domaine de $\mathcal{M}$,

  (ii) pour chaque $f \in \mathcal{F}$, une fonction $f^{\mathcal{M}} : M^{n_f} \to M$, appelée l'interprétation de f,

Structures

- Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ est la donnée :

  (i) d'un ensemble M appelé domaine de $\mathcal{M}$,

  (ii) pour chaque $f \in \mathcal{F}$, une fonction $f^{\mathcal{M}} : M^{n_f} \to M$, appelée l'interprétation de f,

  (iii) pour chaque $R \in \mathcal{R}$, une relation $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_R}$, appelée l'interprétation de R,

Structures

- Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ est la donnée :

  (i) d'un ensemble M appelé domaine de $\mathcal{M}$,

  (ii) pour chaque $f \in \mathcal{F}$, une fonction $f^{\mathcal{M}} : M^{n_f} \to M$, appelée l'interprétation de f,

  (iii) pour chaque $R \in \mathcal{R}$, une relation $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_R}$, appelée l'interprétation de R,

  (iv) pour chaque $c \in \mathcal{C}$, une constante $c^{\mathcal{M}} \in M$, appelée l'interprétation de c.

Exemples

Exemples

- Soit $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$ où $<$ est un symbole de relation binaire. $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ est une $\mathcal{L}_{ord}$-structure.

Exemples

- Soit $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$ où $<$ est un symbole de relation binaire. $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ est une $\mathcal{L}_{ord}$-structure.
- $\mathcal{L}_{an} = \{+, -, 0, 1\}$ où $+$ et $-$ sont des symboles de fonctions à 2 variables et $0, 1$ sont des symboles de constantes. $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, +, -, 0, 1 \rangle$ est une $\mathcal{L}_{an}$-structure.

Exemples

- Soit $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$ où $<$ est un symbole de relation binaire. $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ est une $\mathcal{L}_{ord}$-structure.
- $\mathcal{L}_{an} = \{+, -, 0, 1\}$ où $+$ et $-$ sont des symboles de fonctions à 2 variables et $0, 1$ sont des symboles de constantes. $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, +, -, 0, 1 \rangle$ est une $\mathcal{L}_{an}$-structure.
- $\mathcal{L}_{gp} = \{., ^{-1}, 1\}$ où $.$ est un symbole de fonction à 2 variables, $^{-1}$ est un symbole de fonction à une seule variable et 1 est un symbole de constante. $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ est une $\mathcal{L}_{gp}$-structure.

Formules, formules closes

Formules, formules closes

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Soit $\bar{\mathcal{L}}$ l'ensemble obtenu en rajoutant à $\mathcal{L}$ les symboles suivants :

Formules, formules closes

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Soit $\bar{\mathcal{L}}$ l'ensemble obtenu en rajoutant à $\mathcal{L}$ les symboles suivants :

(i) un ensemble infini de variables $\mathcal{V}$,

Formules, formules closes

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Soit $\bar{\mathcal{L}}$ l'ensemble obtenu en rajoutant à $\mathcal{L}$ les symboles suivants :

(i) un ensemble infini de variables $\mathcal{V}$,

(ii) les symboles : $(,), \neg, \wedge, \forall, \exists, =$.

Formules, formules closes

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Soit $\bar{\mathcal{L}}$ l'ensemble obtenu en rajoutant à $\mathcal{L}$ les symboles suivants :

(i) un ensemble infini de variables $\mathcal{V}$,

(ii) les symboles : $(,), \neg, \wedge, \forall, \exists, =$.

Remarque : le symbole $=$ est toujours interprété par l'égalité dans une $\mathcal{L}$-structure.

Formules, formules closes

Formules, formules closes

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre.

Formules, formules closes

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre.

- L'ensemble des $\mathcal{L}$-termes est le plus petit ensemble $\mathcal{T}$ de mots sur l'alphabet $\bar{\mathcal{L}}$ tels que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ et pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $t_1, \ldots, t_{n_f} \in \mathcal{T}$, $f(t_1, \ldots, t_{n_f}) \in \mathcal{T}$.

Formules, formules closes

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre.

- L'ensemble des $\mathcal{L}$-termes est le plus petit ensemble $\mathcal{T}$ de mots sur l'alphabet $\bar{\mathcal{L}}$ tels que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ et pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $t_1, \ldots, t_{n_f} \in \mathcal{T}$, $f(t_1, \ldots, t_{n_f}) \in \mathcal{T}$.
- Un mot ϕ sur l'alphabet $\bar{\mathcal{L}}$ est dit une formule atomique s'il est de la forme :

Formules, formules closes

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre.

- L'ensemble des $\mathcal{L}$-termes est le plus petit ensemble $\mathcal{T}$ de mots sur l'alphabet $\bar{\mathcal{L}}$ tels que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ et pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $t_1, \ldots, t_{n_f} \in \mathcal{T}$, $f(t_1, \ldots, t_{n_f}) \in \mathcal{T}$.
- Un mot ϕ sur l'alphabet $\bar{\mathcal{L}}$ est dit une formule atomique s'il est de la forme :
  (i) $t_1 = t_2$, où t_1 et t_2 sont des termes, ou

Formules, formules closes

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre.

- L'ensemble des $\mathcal{L}$-termes est le plus petit ensemble $\mathcal{T}$ de mots sur l'alphabet $\bar{\mathcal{L}}$ tels que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ et pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $t_1, \ldots, t_{n_f} \in \mathcal{T}$, $f(t_1, \ldots, t_{n_f}) \in \mathcal{T}$.
- Un mot ϕ sur l'alphabet $\bar{\mathcal{L}}$ est dit une formule atomique s'il est de la forme :
  (i) $t_1 = t_2$, où t_1 et t_2 sont des termes, ou
  (ii) $R(t_1, \ldots, t_{n_R})$ où $R \in \mathcal{R}$ et $t_1, \ldots, t_{n_R}$ sont des termes.

Formules, formules closes

Formules, formules closes

L'ensemble des formules est le plus petit ensemble de mots sur l'alphabet $\bar{\mathcal{L}}$ qui vérifie :

Formules, formules closes

L'ensemble des formules est le plus petit ensemble de mots sur l'alphabet $\bar{\mathcal{L}}$ qui vérifie :
(i) il contient toutes les formules atomiques,

Formules, formules closes

L'ensemble des formules est le plus petit ensemble de mots sur l'alphabet $\bar{\mathcal{L}}$ qui vérifie :
(i) il contient toutes les formules atomiques,
(ii) s'il contient ϕ et ψ, il contient aussi $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$ et $(\phi \vee \psi)$,

Formules, formules closes

L'ensemble des formules est le plus petit ensemble de mots sur l'alphabet $\bar{\mathcal{L}}$ qui vérifie :
(i) il contient toutes les formules atomiques,
(ii) s'il contient ϕ et ψ, il contient aussi $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$ et $(\phi \vee \psi)$,
(iii) s'il contient ϕ alors pour toute variable $v \in \mathcal{V}$, il contient $\exists v\phi$ et $\forall v\phi$.

Exemples

Exemples

- $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$.

Exemples

- $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$.
  - Termes : x, où $x \in \mathcal{V}$.

Exemples

- $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$.
  - Termes : x, où $x \in \mathcal{V}$.
  - Formules atomiques : $x = y$, $x < y$.

Exemples

- $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$.
  - Termes : x, où $x \in \mathcal{V}$.
  - Formules atomiques : $x = y$, $x < y$.
  - Formules : $\forall x(x < y \vee y < x \vee x = y)$, $\forall x \exists y(x < y)$, $\forall x(x < y) \wedge \exists z(z < x)$.

Exemples

- $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$.
  - Termes : x, où $x \in \mathcal{V}$.
  - Formules atomiques : $x = y$, $x < y$.
  - Formules : $\forall x(x < y \vee y < x \vee x = y)$, $\forall x \exists y(x < y)$, $\forall x(x < y) \wedge \exists z(z < x)$.
- $\mathcal{L}_{gp} = \{.,^{-1}, 1\}$

Exemples

- $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$.
  - Termes : x, où $x \in \mathcal{V}$.
  - Formules atomiques : $x = y$, $x < y$.
  - Formules : $\forall x(x < y \vee y < x \vee x = y)$, $\forall x \exists y(x < y)$, $\forall x(x < y) \wedge \exists z(z < x)$.
- $\mathcal{L}_{gp} = \{.,^{-1}, 1\}$
  - Termes : $.(x, y)$, où $x, y \in \mathcal{V}$, abréviation : xy, ${}^{-1}x$, abréviation : x^{-1}, $.(1, x)$ abréviation $1x$.

Exemples

- $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$.
  - Termes : x, où $x \in \mathcal{V}$.
  - Formules atomiques : $x = y$, $x < y$.
  - Formules : $\forall x(x < y \vee y < x \vee x = y)$, $\forall x \exists y(x < y)$, $\forall x(x < y) \wedge \exists z(z < x)$.
- $\mathcal{L}_{gp} = \{.,^{-1}, 1\}$
  - Termes : $.(x, y)$, où $x, y \in \mathcal{V}$, abréviation : xy, ^{-1}x, abréviation : x^{-1}, $.(1, x)$ abréviation $1x$.
  - Formules atomiques : $x^{-1}y = zt$.

Exemples

- $\mathcal{L}_{ord} = \{<\}$.
  - Termes : x, où $x \in \mathcal{V}$.
  - Formules atomiques : $x = y$, $x < y$.
  - Formules : $\forall x(x < y \vee y < x \vee x = y)$, $\forall x \exists y(x < y)$, $\forall x(x < y) \wedge \exists z(z < x)$.
- $\mathcal{L}_{gp} = \{.,^{-1}, 1\}$
  - Termes : $.(x, y)$, où $x, y \in \mathcal{V}$, abréviation : xy, ^{-1}x, abréviation : x^{-1}, $.(1, x)$ abréviation $1x$.
  - Formules atomiques : $x^{-1}y = zt$.
  - Formules : $\forall x \forall y(x^{-1}y^{-1}xy = 1)$, $\forall x \exists y(y^n = x)$.

Variables libres, variables liées

Variables libres, variables liées

- Une variable est dite libre si elle n'est pas sous le scope d'un quantificateur sinon, elle est dite liée.

Variables libres, variables liées

- Une variable est dite libre si elle n'est pas sous le scope d'un quantificateur sinon, elle est dite liée.

  Exemple : $\phi = \forall x(x < y)$. La variable x est liée et y est libre.

Variables libres, variables liées

- Une variable est dite libre si elle n'est pas sous le scope d'un quantificateur sinon, elle est dite liée.

  Exemple : $\phi = \forall x(x < y)$. La variable x est liée et y est libre.

- Si ϕ est une formule, on écrit $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ pour indiquer que les variables libres de ϕ sont parmis $x_1, \ldots, x_n$.

Variables libres, variables liées

- Une variable est dite libre si elle n'est pas sous le scope d'un quantificateur sinon, elle est dite liée.

  Exemple : $\phi = \forall x(x < y)$. La variable x est liée et y est libre.

- Si ϕ est une formule, on écrit $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ pour indiquer que les variables libres de ϕ sont parmis $x_1, \ldots, x_n$.

- Une formule est dite close, si elle n'a pas de variables libres.

Remarque

Remarque

Toute formule $\phi(\bar{z})$ est equivalente à une formule de la forme :

Remarque

Toute formule $\phi(\bar{z})$ est equivalente à une formule de la forme :

$$\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 \ldots \forall x_n \exists y_n \psi(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}),$$

où $\psi(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ est une disjonction de conjonctions de formules atomiques et de leurs négations.

Théorie élémentaire

Théorie élémentaire

- Soit $\phi(\bar{x})$ une formule et $\bar{m}$ un uplet de $\mathcal{M}$. On écrit $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$ si $\mathcal{M}$ satisfait la formule $\phi(\bar{m})$.

Théorie élémentaire

- Soit $\phi(\bar{x})$ une formule et $\bar{m}$ un uplet de $\mathcal{M}$. On écrit $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$ si $\mathcal{M}$ satisfait la formule $\phi(\bar{m})$.
- La **théorie élémentaire** de la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ est l'ensemble des formules closes satisfaites dans $\mathcal{M}$. Elle est notée $Th(\mathcal{M})$.

Extensions élémentaires, sous-structures élémentaires

Extensions élémentaires, sous-structures élémentaires

- Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures.

Extensions élémentaires, sous-structures élémentaires

- Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On dit que $\mathcal{M}$ est $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalentes, noté $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, si $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$.

Extensions élémentaires, sous-structures élémentaires

- Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On dit que $\mathcal{M}$ est $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalentes, noté $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, si $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$.
- Soient $\mathcal{M}$ est $\mathcal{L}$-structure et $\mathcal{N}$ une $\mathcal{L}$-sous-structure de $\mathcal{M}$.

Extensions élémentaires, sous-structures élémentaires

- Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On dit que $\mathcal{M}$ est $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalentes, noté $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, si $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$.
- Soient $\mathcal{M}$ est $\mathcal{L}$-structure et $\mathcal{N}$ une $\mathcal{L}$-sous-structure de $\mathcal{M}$. On dit que $\mathcal{M}$ est une extension élémentaire de $\mathcal{N}$ ou que $\mathcal{N}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$, noté $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$, si pour tout formule $\phi(\bar{x})$ pour tout uplet $\bar{n}$ de $\mathcal{N}$ si $\mathcal{M} \models \phi(\bar{n})$ alors $\mathcal{N} \models \phi(\bar{n})$.

Le cas de la théorie des groupes

Le cas de la théorie des groupes

On utilise $\mathcal{L}_{gp} = \{.,^{-1}, 1\}$.

Le cas de la théorie des groupes

On utilise $\mathcal{L}_{gp} = \{.,^{-1}, 1\}$. Tout groupe G est considéré comme une $\mathcal{L}_{gp}$-structure, en interprétant :

Le cas de la théorie des groupes

On utilise $\mathcal{L}_{gp} = \{.,^{-1}, 1\}$. Tout groupe G est considéré comme une $\mathcal{L}_{gp}$-structure, en interprétant :

(i) . par la multiplication,

Le cas de la théorie des groupes

On utilise $\mathcal{L}_{gp} = \{.,^{-1}, 1\}$. Tout groupe G est considéré comme une $\mathcal{L}_{gp}$-structure, en interprétant :

(i) . par la multiplication,

(ii) $x \longrightarrow x^{-1}$ par la fonction qui associé à chaque élément son inverse,

Le cas de la théorie des groupes

On utilise $\mathcal{L}_{gp} = \{.,^{-1}, 1\}$. Tout groupe G est considéré comme une $\mathcal{L}_{gp}$-structure, en interprétant :

(i) . par la multiplication,

(ii) $x \longrightarrow x^{-1}$ par la fonction qui associé à chaque élément son inverse,

(iii) 1 par l'élément neutre.

Le cas de la théorie des groupes

On utilise $\mathcal{L}_{gp} = \{.,^{-1}, 1\}$. Tout groupe G est considéré comme une $\mathcal{L}_{gp}$-structure, en interprétant :

(i) . par la multiplication,

(ii) $x \longrightarrow x^{-1}$ par la fonction qui associé à chaque élément son inverse,

(iii) 1 par l'élément neutre.

Dans toute la suite tout groupe est considéré comme une $\mathcal{L}_{gp}$-structure.

Le cas de la théorie des groupes

Le cas de la théorie des groupes

- Une formule sans-quantificateurs, $\varphi(\bar{x})$, avec variables libres $\bar{x}$, est de la forme :

Le cas de la théorie des groupes

- Une formule sans-quantificateurs, $\varphi(\bar{x})$, avec variables libres $\bar{x}$, est de la forme :

$$\varphi(\bar{x}) := \bigvee_{1\leq i\leq n} \Big(\bigwedge_{1\leq j\leq p_i} w_{ij}(\bar{x}) = 1 \bigwedge_{1\leq j\leq q_i} v_{ij}(\bar{x}) \neq 1 \Big),$$

où w_{ij} et v_{ij} sont des mots sur l'alphabet $\{x_1, \ldots, x_n\}^{\pm 1}$.

Le cas de la théorie des groupes

- Une formule sans-quantificateurs, $\varphi(\bar{x})$, avec variables libres $\bar{x}$, est de la forme :

$$\varphi(\bar{x}) := \bigvee_{1\leq i\leq n} \Big(\bigwedge_{1\leq j\leq p_i} w_{ij}(\bar{x}) = 1 \bigwedge_{1\leq j\leq q_i} v_{ij}(\bar{x}) \neq 1 \Big),$$

  où w_{ij} et v_{ij} sont des mots sur l'alphabet $\{x_1, \ldots, x_n\}^{\pm 1}$.
- Une formule $\phi(\bar{z})$, avec variables libres $\bar{z}$, est une formule de la forme :

Le cas de la théorie des groupes

- Une formule sans-quantificateurs, $\varphi(\bar{x})$, avec variables libres $\bar{x}$, est de la forme :

$$\varphi(\bar{x}) := \bigvee_{1\leq i\leq n} \Big(\bigwedge_{1\leq j\leq p_i} w_{ij}(\bar{x}) = 1 \bigwedge_{1\leq j\leq q_i} v_{ij}(\bar{x}) \neq 1 \Big),$$

  où w_{ij} et v_{ij} sont des mots sur l'alphabet $\{x_1, \ldots, x_n\}^{\pm 1}$.
- Une formule $\phi(\bar{z})$, avec variables libres $\bar{z}$, est une formule de la forme :

$$\phi(\bar{z}) := \forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n \varphi(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \bar{z}),$$

  où $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est une formule sans-quantificateurs.

Le cas de la théorie des groupes

Exemples:

Le cas de la théorie des groupes

Exemples:

- $\phi(z) = \forall x(x^{-1}z^{-1}xz = 1)$,

Le cas de la théorie des groupes

Exemples:

- $\phi(z) = \forall x(x^{-1}z^{-1}xz = 1)$,

$$G \models \phi(g) \Leftrightarrow g \in Z(G)$$

Le cas de la théorie des groupes

Exemples:

- $\phi(z) = \forall x(x^{-1}z^{-1}xz = 1)$,

$$G \models \phi(g) \Leftrightarrow g \in Z(G)$$

- $\phi = \forall x \forall y(x^{-1}y^{-1}xy = 1)$,

Le cas de la théorie des groupes

Exemples:

- $\phi(z) = \forall x(x^{-1}z^{-1}xz = 1)$,

$$G \models \phi(g) \Leftrightarrow g \in Z(G)$$

- $\phi = \forall x \forall y(x^{-1}y^{-1}xy = 1)$,

$$G \models \phi \Leftrightarrow G \text{ est abélien}$$

Le cas de la théorie des groupes

Exemples:

- $\phi(z) = \forall x(x^{-1}z^{-1}xz = 1)$,

$$G \models \phi(g) \Leftrightarrow g \in Z(G)$$

- $\phi = \forall x \forall y(x^{-1}y^{-1}xy = 1)$,

$$G \models \phi \Leftrightarrow G \text{ est abélien}$$

- $\phi_n = \forall x(x^n = 1 \Rightarrow x = 1)$, $n \geq 1$,

Le cas de la théorie des groupes

Exemples:

- $\phi(z) = \forall x(x^{-1}z^{-1}xz = 1)$,

$$G \models \phi(g) \Leftrightarrow g \in Z(G)$$

- $\phi = \forall x \forall y(x^{-1}y^{-1}xy = 1)$,

$$G \models \phi \Leftrightarrow G \text{ est abélien}$$

- $\phi_n = \forall x(x^n = 1 \Rightarrow x = 1)$, $n \geq 1$,

$$G \models \phi_n \text{ pour tout } n \geq 1 \Leftrightarrow G \text{ est sans-torsion}$$

Sommaire

1. Un peu de théorie des modèles
   - Langages, structures, extensions élémentaires
   - Le cas de la théorie des groupes
2. Groupes libres, produits amalgamés, HNN-extensions
   - Groupes libres
   - Produits libres & HNN-extensions
3. Théorie élémentaire des groupes libres
   - Problème de Tarski
   - Approche de Sela et groupes limites

Une définition

Une définition

Soit X un ensemble.

Une définition

Soit X un ensemble.

Il existe une unique groupe F_X, appelé le groupe libre de base X, qui vérifie la propriété universelle suivante :

Une définition

Soit X un ensemble.

Il existe une unique groupe F_X, appelé le groupe libre de base X, qui vérifie la propriété universelle suivante :

pour tout groupe G, pour toute fonction $f : X \to G$, il existe un unique homomorphisme $f^* : F_X \to G$ qui étend f.

Une définition plus explicite

Une définition plus explicite

Soit X un ensemble.

Une définition plus explicite

Soit X un ensemble.

Soit X^{-1} un ensemble disjoint de X et qui en bijection avec X.

Une définition plus explicite

Soit X un ensemble.

Soit X^{-1} un ensemble disjoint de X et qui en bijection avec X.

Un mot w sur $X^{\pm 1}$ est dit réduit s'il ne contient pas de sous-mot de la forme xx^{-1} ou $x^{-1}x$.

Une définition plus explicite

Soit X un ensemble.

Soit X^{-1} un ensemble disjoint de X et qui en bijection avec X.

Un mot w sur $X^{\pm 1}$ est dit réduit s'il ne contient pas de sous-mot de la forme xx^{-1} ou $x^{-1}x$.

Soit $W(X)$ l'ensemble des mots réduits.

Une définition plus explicite

Soit X un ensemble.

Soit X^{-1} un ensemble disjoint de X et qui en bijection avec X.

Un mot w sur $X^{\pm 1}$ est dit réduit s'il ne contient pas de sous-mot de la forme xx^{-1} ou $x^{-1}x$.

Soit $W(X)$ l'ensemble des mots réduits.
On définit le produit de $u, v \in W(X)$ par le mot obtenu à partir du mot uv en éliminant successivement tous les sous-mots de la forme xx^{-1} et $x^{-1}x$.

Une définition plus explicite

Soit X un ensemble.

Soit X^{-1} un ensemble disjoint de X et qui en bijection avec X.

Un mot w sur $X^{\pm 1}$ est dit réduit s'il ne contient pas de sous-mot de la forme xx^{-1} ou $x^{-1}x$.

Soit $W(X)$ l'ensemble des mots réduits.
On définit le produit de $u, v \in W(X)$ par le mot obtenu à partir du mot uv en éliminant successivement tous les sous-mots de la forme xx^{-1} et $x^{-1}x$.

$W(X)$ avec l'opération précédente est un groupe isomorphe au groupe libre F_X.

Rang d'un groupe libre

Rang d'un groupe libre

Propriété : Soient F_X et F_Y deux groupes libres. Alors F_X et F_Y sont isomorphes ssi X et Y ont le même cardinal.

Rang d'un groupe libre

Propriété : Soient F_X et F_Y deux groupes libres. Alors F_X et F_Y sont isomorphes ssi X et Y ont le même cardinal.

Pour un groupe libre F_X, le cardinal de X est appelé le rang de F_X. Si $|X| = \lambda$, on note F_λ le groupe libre F_X.

Sous-groupes des groupes libres

Théorème 1 (Nielsen-Schreier)

Un sous-groupe d'un groupe libre est libre. □

Groupes libres : graphe de Cayley

Groupes libres : graphe de Cayley

- Soit G un groupe engendré par un ensemble S.

Groupes libres : graphe de Cayley

- Soit G un groupe engendré par un ensemble S.
  Le graphe de Cayley $Cay(G, S)$ est définit de la façon suivante :

Groupes libres : graphe de Cayley

- Soit G un groupe engendré par un ensemble S.
  Le graphe de Cayley $Cay(G, S)$ est définit de la façon suivante : l'ensemble des sommets est G, et deux éléments $g, h \in G$ sont reliés par une arrête ssi il existe $s \in S^{\pm 1}$ tel que $h = gs$ et orienté positivement par $G \times S$.

Groupes libres : graphe de Cayley

- Soit G un groupe engendré par un ensemble S.
  Le graphe de Cayley $Cay(G, S)$ est définit de la façon suivante : l'ensemble des sommets est G, et deux éléments $g, h \in G$ sont reliés par une arrête ssi il existe $s \in S^{\pm 1}$ tel que $h = gs$ et orienté positivement par $G \times S$.
- G agit par multiplication à gauche librement et sans inversions sur $Cay(G, S)$.

Groupes libres : graphe de Cayley

- Soit G un groupe engendré par un ensemble S.
  Le graphe de Cayley $Cay(G, S)$ est définit de la façon suivante : l'ensemble des sommets est G, et deux éléments $g, h \in G$ sont reliés par une arrête ssi il existe $s \in S^{\pm 1}$ tel que $h = gs$ et orienté positivement par $G \times S$.
- G agit par multiplication à gauche librement et sans inversions sur $Cay(G, S)$.
- Un arbre simplicial est un graphe connexe sans circuits.

Groupes libres : graphe de Cayley

- Soit G un groupe engendré par un ensemble S.
  Le graphe de Cayley $Cay(G, S)$ est définit de la façon suivante : l'ensemble des sommets est G, et deux éléments $g, h \in G$ sont reliés par une arrête ssi il existe $s \in S^{\pm 1}$ tel que $h = gs$ et orienté positivement par $G \times S$.
- G agit par multiplication à gauche librement et sans inversions sur $Cay(G, S)$.
- Un arbre simplicial est un graphe connexe sans circuits.
- Le graphe $Cay(F_X, X)$ est un arbre simplicial.

Groupes libres : graphe de Cayley

- Soit G un groupe engendré par un ensemble S.
  Le graphe de Cayley $Cay(G, S)$ est définit de la façon suivante : l'ensemble des sommets est G, et deux éléments $g, h \in G$ sont reliés par une arrête ssi il existe $s \in S^{\pm 1}$ tel que $h = gs$ et orienté positivement par $G \times S$.
- G agit par multiplication à gauche librement et sans inversions sur $Cay(G, S)$.
- Un arbre simplicial est un graphe connexe sans circuits.
- Le graphe $Cay(F_X, X)$ est un arbre simplicial.

Théorème 2 (Bass-Serre)

Un groupe est libre ssi il agit librement et sans inversions sur un arbre simplicial. □

Produits libres

Produits libres

Soient G_1 et G_2 deux groupes et soit $A \leq G_1$, $A \leq G_2$.

Produits libres

Soient G_1 et G_2 deux groupes et soit $A \leq G_1$, $A \leq G_2$.
Il existe un unique groupe, appelé le produit libre amalgamé de G_1 et G_2 au-dessus de A, noté $G_1 *_A G_2$, qui vérifie la propriété universelle suivante :

Produits libres

Soient G_1 et G_2 deux groupes et soit $A \leq G_1$, $A \leq G_2$.
Il existe un unique groupe, appelé le produit libre amalgamé de G_1 et G_2 au-dessus de A, noté $G_1 *_A G_2$, qui vérifie la propriété universelle suivante :
si H est un groupe, si $f_1 : G_1 \to H$, $f_2 : G_2 \to H$ sont deux homomorphismes tels que pour tout $a \in A$, $f_1(a) = f_2(a)$, alors il existe un homomorphisme $f : G_1 *_A G_2 \to H$ qui étend f_1 et f_2.

Produits libres

Soient G_1 et G_2 deux groupes et soit $A \leq G_1$, $A \leq G_2$.
Il existe un unique groupe, appelé le produit libre amalgamé de G_1 et G_2 au-dessus de A, noté $G_1 *_A G_2$, qui vérifie la propriété universelle suivante :
si H est un groupe, si $f_1 : G_1 \to H$, $f_2 : G_2 \to H$ sont deux homomorphismes tels que pour tout $a \in A$, $f_1(a) = f_2(a)$, alors il existe un homomorphisme $f : G_1 *_A G_2 \to H$ qui étend f_1 et f_2.

Remarque : si $A = 1$ alors $G_1 *_A G_2$ est appelé le produit libre de G_1 et G_2 et est noté $G_1 * G_2$.

HNN-extensions

HNN-extensions

Soient G un groupe, A, B deux sous-groupes de G et $f : A \to B$ un isomorphisme.

HNN-extensions

Soient G un groupe, A, B deux sous-groupes de G et $f : A \to B$ un isomorphisme.
La HNN-extension de G relativement à A et B est le groupe $G * \langle t \rangle$ quotienté par la clôture normale de l'ensembe $\{t^{-1}at(f(a))^{-1}\}$.

HNN-extensions

Soient G un groupe, A, B deux sous-groupes de G et $f : A \to B$ un isomorphisme.
La HNN-extension de G relativement à A et B est le groupe $G * \langle t \rangle$ quotienté par la clôture normale de l'ensembe $\{t^{-1}at(f(a))^{-1}\}$.
Il est noté $\langle G, t | a^t = f(a), a \in A \rangle$.

Sommaire

1. Un peu de théorie des modèles
   - Langages, structures, extensions élémentaires
   - Le cas de la théorie des groupes
2. Groupes libres, produits amalgamés, HNN-extensions
   - Groupes libres
   - Produits libres & HNN-extensions
3. Théorie élémentaire des groupes libres
   - Problème de Tarski
   - Approche de Sela et groupes limites

Problème de Tarski

Problème de Tarski

F_X le groupe libre de base X, $|X|$ le cardinal de X.

Problème de Tarski

F_X le groupe libre de base X, $|X|$ le cardinal de X.

Tarski autour de 1945 pose les problèmes suivants :

Problème de Tarski

F_X le groupe libre de base X, $|X|$ le cardinal de X.

Tarski autour de 1945 pose les problèmes suivants :

Pb1: Est-ce que F_X et F_Y ont la même théorie élémentaire pour $|X|, |Y| \geq 2$?

Problème de Tarski

F_X le groupe libre de base X, $|X|$ le cardinal de X.

Tarski autour de 1945 pose les problèmes suivants :

Pb1: Est-ce que F_X et F_Y ont la même théorie élémentaire pour $|X|, |Y| \geq 2$?

Pb2: Est-ce que $Th(F_X)$ est décidable ?

Problème de Tarski

Problème de Tarski

Théorème 3 (Vaught, 1955)

Si $X \subseteq Y$ et X est ifnini alors F_X est une sous-structure élémentaire de F_Y.

Problème de Tarski

Théorème 3 (Vaught, 1955)

Si $X \subseteq Y$ et X est ifnini alors F_X est une sous-structure élémentaire de F_Y.

Preuve.

Problème de Tarski

Théorème 3 (Vaught, 1955)

Si $X \subseteq Y$ et X est ifnini alors F_X est une sous-structure élémentaire de F_Y.

Preuve. On utilise le test Tarski-Vaught qui dit la chose suivante :

Problème de Tarski

Théorème 3 (Vaught, 1955)

Si $X \subseteq Y$ et X est ifnini alors F_X est une sous-structure élémentaire de F_Y.

Preuve. On utilise le test Tarski-Vaught qui dit la chose suivante : si $H \leq G$, alors

Problème de Tarski

Théorème 3 (Vaught, 1955)

Si $X \subseteq Y$ et X est ifnini alors F_X est une sous-structure élémentaire de F_Y.

Preuve. On utilise le test Tarski-Vaught qui dit la chose suivante : si $H \leq G$, alors

$$H \preceq G$$

Problème de Tarski

Théorème 3 (Vaught, 1955)

Si $X \subseteq Y$ et X est ifnini alors F_X est une sous-structure élémentaire de F_Y.

Preuve. On utilise le test Tarski-Vaught qui dit la chose suivante : si $H \leq G$, alors

$$H \preceq G \Leftrightarrow \begin{cases} \text{pour toute formule } \phi(x;\bar{z}), \text{ pour tout } \bar{h} \in H, \\ \exists c \in G, G \models \phi(c;\bar{h}) \Rightarrow \exists c \in H, G \models \phi(c,\bar{h}) \end{cases}$$

Problème de Tarski

Théorème 3 (Vaught, 1955)

Si $X \subseteq Y$ et X est ifnini alors F_X est une sous-structure élémentaire de F_Y.

Preuve. On utilise le test Tarski-Vaught qui dit la chose suivante : si $H \leq G$, alors

$$H \preceq G \Leftrightarrow \begin{cases} \text{pour toute formule } \phi(x;\bar{z}), \text{ pour tout } \bar{h} \in H, \\ \exists c \in G, G \models \phi(c;\bar{h}) \Rightarrow \exists c \in H, G \models \phi(c,\bar{h}) \end{cases}$$

Il faut montrer :

$$F_Y \models \phi(\bar{g};b) \Rightarrow \exists b' \in F_X, F_Y \models \phi(\bar{g};b').$$

$F_Y \models \phi(\bar{g}; b) \Rightarrow \bar{g} \in \langle X_0 \rangle, b \in \langle X_0, Y_0 \rangle$, avec $X_0 \subseteq X$, $Y_0 \subseteq Y$, $X_0 \cap Y_0 = \emptyset$, X_0 et Y_0 sont finis.

$F_Y \models \phi(\bar{g}; b) \Rightarrow \bar{g} \in \langle X_0 \rangle, b \in \langle X_0, Y_0 \rangle$, avec $X_0 \subseteq X$, $Y_0 \subseteq Y$, $X_0 \cap Y_0 = \emptyset$, X_0 et Y_0 sont finis.
Soit $X_1 \subseteq X \setminus X_0$ tel que $|X_1| = |Y_0|$.

$F_Y \models \phi(\bar{g}; b) \Rightarrow \bar{g} \in \langle X_0 \rangle, b \in \langle X_0, Y_0 \rangle$, avec $X_0 \subseteq X$, $Y_0 \subseteq Y$, $X_0 \cap Y_0 = \emptyset$, X_0 et Y_0 sont finis.
Soit $X_1 \subseteq X \setminus X_0$ tel que $|X_1| = |Y_0|$.
Soit $f : Y \to Y, f(X \setminus X_1) = X \setminus X_1, f(Y_0) = X_1, f(X_1) = f(Y_0)$, et qui laisse le reste inchangé. Alors f se prolonge en un automorphisme et $f(\bar{g}) = \bar{g}$.

$F_Y \models \phi(\bar{g}; b) \Rightarrow \bar{g} \in \langle X_0 \rangle, b \in \langle X_0, Y_0 \rangle$, avec $X_0 \subseteq X$, $Y_0 \subseteq Y$, $X_0 \cap Y_0 = \emptyset$, X_0 et Y_0 sont finis.
Soit $X_1 \subseteq X \setminus X_0$ tel que $|X_1| = |Y_0|$.
Soit $f : Y \to Y, f(X \setminus X_1) = X \setminus X_1, f(Y_0) = X_1, f(X_1) = f(Y_0)$, et qui laisse le reste inchangé. Alors f se prolonge en un automorphisme et $f(\bar{g}) = \bar{g}$. Donc
$F_Y \models \phi(\bar{g}; f(b)), f(b) \in F_X$. □

Groupes libres dans d'autres variétés

Groupes libres dans d'autres variétés

Que peut-on dire des groupes libres dans d'autres variétés?

Groupes libres dans d'autres variétés

Que peut-on dire des groupes libres dans d'autres variétés?

- $\mathbb{Z}_n :=$ le groupe abélien libre de rang n.

Groupes libres dans d'autres variétés

Que peut-on dire des groupes libres dans d'autres variétés?

- $\mathbb{Z}_n :=$ le groupe abélien libre de rang n.
  $Th(\mathbb{Z}_n) = Th(\mathbb{Z}_m)$ ssi $n = m$.

Groupes libres dans d'autres variétés

Que peut-on dire des groupes libres dans d'autres variétés?

- $\mathbb{Z}_n :=$ le groupe abélien libre de rang n.
  $Th(\mathbb{Z}_n) = Th(\mathbb{Z}_m)$ ssi $n = m$.
  $Th(\mathbb{Z}_n)$ est décidable (Szmielew, 1955).

Groupes libres dans d'autres variétés

Que peut-on dire des groupes libres dans d'autres variétés?

- $\mathbb{Z}_n :=$ le groupe abélien libre de rang n.

  $Th(\mathbb{Z}_n) = Th(\mathbb{Z}_m)$ ssi $n = m$.

  $Th(\mathbb{Z}_n)$ est décidable (Szmielew, 1955).

- $N_n^c :=$ le groupe libre nilpotent de classe c et de rang n.

Groupes libres dans d'autres variétés

Que peut-on dire des groupes libres dans d'autres variétés?

- $\mathbb{Z}_n :=$ le groupe abélien libre de rang n.
  $Th(\mathbb{Z}_n) = Th(\mathbb{Z}_m)$ ssi $n = m$.
  $Th(\mathbb{Z}_n)$ est décidable (Szmielew, 1955).
- $N_n^c :=$ le groupe libre nilpotent de classe c et de rang n.
  $Th(N_c^n) = Th(N_{c'}^{n'})$ ssi $n = n'$ et $c = c'$.

Groupes libres dans d'autres variétés

Que peut-on dire des groupes libres dans d'autres variétés?

- $\mathbb{Z}_n :=$ le groupe abélien libre de rang n.
  $Th(\mathbb{Z}_n) = Th(\mathbb{Z}_m)$ ssi $n = m$.
  $Th(\mathbb{Z}_n)$ est décidable (Szmielew, 1955).
- $N_n^c :=$ le groupe libre nilpotent de classe c et de rang n.
  $Th(N_c^n) = Th(N_{c'}^{n'})$ ssi $n = n'$ et $c = c'$.
  for $c \geq 2, n \geq 2$, $Th(N_c^n)$ est indécidable (Mal'cev, 1960).

Groupes libres dans d'autres variétés

Que peut-on dire des groupes libres dans d'autres variétés?

- $\mathbb{Z}_n :=$ le groupe abélien libre de rang n.
  $Th(\mathbb{Z}_n) = Th(\mathbb{Z}_m)$ ssi $n = m$.
  $Th(\mathbb{Z}_n)$ est décidable (Szmielew, 1955).
- $N_n^c :=$ le groupe libre nilpotent de classe c et de rang n.
  $Th(N_c^n) = Th(N_{c'}^{n'})$ ssi $n = n'$ et $c = c'$.
  for $c \geq 2, n \geq 2$, $Th(N_c^n)$ est indécidable (Mal'cev, 1960).
- $S_n^c :=$ le groupe résoluble libre de class c et de rang n.

Groupes libres dans d'autres variétés

Que peut-on dire des groupes libres dans d'autres variétés?

- $\mathbb{Z}_n :=$ le groupe abélien libre de rang n.
  $Th(\mathbb{Z}_n) = Th(\mathbb{Z}_m)$ ssi $n = m$.
  $Th(\mathbb{Z}_n)$ est décidable (Szmielew, 1955).
- $N_n^c :=$ le groupe libre nilpotent de classe c et de rang n.
  $Th(N_c^n) = Th(N_{c'}^{n'})$ ssi $n = n'$ et $c = c'$.
  for $c \geq 2, n \geq 2$, $Th(N_c^n)$ est indécidable (Mal'cev, 1960).
- $S_n^c :=$ le groupe résoluble libre de class c et de rang n.
  $Th(S_n^c) = Th(S_{n'}^c)$ ssi $n = n'$ et $c = c'$.

Groupes libres dans d'autres variétés

Que peut-on dire des groupes libres dans d'autres variétés?

- $\mathbb{Z}_n :=$ le groupe abélien libre de rang n.
  $Th(\mathbb{Z}_n) = Th(\mathbb{Z}_m)$ ssi $n = m$.
  $Th(\mathbb{Z}_n)$ est décidable (Szmielew, 1955).
- $N_n^c :=$ le groupe libre nilpotent de classe c et de rang n.
  $Th(N_c^n) = Th(N_{c'}^{n'})$ ssi $n = n'$ et $c = c'$.
  for $c \geq 2, n \geq 2$, $Th(N_c^n)$ est indécidable (Mal'cev, 1960).
- $S_n^c :=$ le groupe résoluble libre de class c et de rang n.
  $Th(S_n^c) = Th(S_{n'}^c)$ ssi $n = n'$ et $c = c'$.
  for $c, n \geq 2$, $Th(S_n^c)$ est indécidable (Mal'cev, 1960).

Groupes libres dans d'autres variétés

Groupes libres dans d'autres variétés

Remarque.

Groupes libres dans d'autres variétés

Remarque. Le Théorème 3 reste vrai pour les groupes libres des variétés.

Groupes libres dans d'autres variétés

Remarque. Le Théorème 3 reste vrai pour les groupes libres des variétés. en particulier:

$$N_X^c := \text{le groupe libre nilpotent de classe } c, \text{ sur } X$$

$$X \subseteq Y, X \text{ infini } \Rightarrow N_X^c \preceq N_Y^c,$$

$$S_X^c := \text{le groupe libre résoluble de classe } c, \text{ sur } X$$

$$X \subseteq Y, X \text{ infini } \Rightarrow S_X^c \preceq S_Y^c.$$

Théorie universelle

Théorie universelle

- Une formule universelle $\phi(\bar{z})$, avec variable libres $\bar{z}$, est une formule de la forme :

Théorie universelle

- Une formule universelle $\phi(\bar{z})$, avec variable libres $\bar{z}$, est une formule de la forme :

$$\forall \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{z}),$$

où $\varphi(\bar{x}, \bar{z})$ est sans-quantificateurs.

Théorie universelle

- Une formule universelle $\phi(\bar{z})$, avec variable libres $\bar{z}$, est une formule de la forme :

$$\forall \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{z}),$$

où $\varphi(\bar{x}, \bar{z})$ est sans-quantificateurs.

- Formule universelle close:= formule universelle sans variables libres.

Théorie universelle

- Une formule universelle $\phi(\bar{z})$, avec variable libres $\bar{z}$, est une formule de la forme :

$$\forall \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{z}),$$

où $\varphi(\bar{x}, \bar{z})$ est sans-quantificateurs.

- Formule universelle close:= formule universelle sans variables libres.
- Soit G un groupe.

Théorie universelle

- Une formule universelle $\phi(\bar{z})$, avec variable libres $\bar{z}$, est une formule de la forme :

$$\forall \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{z}),$$

où $\varphi(\bar{x}, \bar{z})$ est sans-quantificateurs.

- Formule universelle close:= formule universelle sans variables libres.
- Soit G un groupe.La théorie universelle de G,

$Th_{\forall}(G)$:= l'ensemble des formules universelles closes vraies dans G.

Théorie universelle

Théorie universelle

F_ω se plonge dans F_2.

Théorie universelle

F_ω se plonge dans F_2.
En effet : $F_2 = \langle a, b | \rangle$, le sous-groupe $\langle a^{-n} b a^n ; i \in \mathbb{N} \rangle$ est isomorphe à F_ω.

Théorie universelle

F_ω se plonge dans F_2.
En effet : $F_2 = \langle a, b | \rangle$, le sous-groupe $\langle a^{-n} b a^n ; i \in \mathbb{N} \rangle$ est isomorphe à F_ω.
Conséquence (avec le Théorème 3):

Théorie universelle

F_ω se plonge dans F_2.
En effet : $F_2 = \langle a, b | \rangle$, le sous-groupe $\langle a^{-n} b a^n ; i \in \mathbb{N} \rangle$ est isomorphe à F_ω.
Conséquence (avec le Théorème 3):
$Th_\forall(F_X) = Th_\forall(F_Y)$, pour $|X|, |Y| \geq 2$.

Théorie universelle

F_ω se plonge dans F_2.
En effet : $F_2 = \langle a, b | \rangle$, le sous-groupe $\langle a^{-n} b a^n ; i \in \mathbb{N} \rangle$ est isomorphe à F_ω.
Conséquence (avec le Théorème 3):
$Th_\forall(F_X) = Th_\forall(F_Y)$, pour $|X|, |Y| \geq 2$.

$\Longrightarrow$ Les groupes libres non-abéliens ont la même théorie universelle.

Théorème de Merzljakov

Théorème de Merzljakov

Une formule $\phi(\bar{z})$ est une $\forall\exists$-formule si elle est de la forme $\forall\bar{x}\exists\bar{y}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, où $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ est une formule sans-quantificateur.

Théorème de Merzljakov

Une formule $\phi(\bar{z})$ est une $\forall\exists$-formule si elle est de la forme $\forall\bar{x}\exists\bar{y}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, où $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ est une formule sans-quantificateur.

Théorème 4 (Merzljakov, 1966, (fonctions implicites))

Théorème de Merzljakov

Une formule $\phi(\bar{z})$ est une $\forall\exists$-formule si elle est de la forme $\forall\bar{x}\exists\bar{y}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, où $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ est une formule sans-quantificateur.

Théorème 4 (Merzljakov, 1966, (fonctions implicites))

- *Soit F un groupe libre non-abélien.*

Théorème de Merzljakov

Une formule $\phi(\bar{z})$ est une $\forall\exists$-formule si elle est de la forme $\forall\bar{x}\exists\bar{y}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, où $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ est une formule sans-quantificateur.

Théorème 4 (Merzljakov, 1966, (fonctions implicites))

- *Soit F un groupe libre non-abélien. Si*

$$F \models \forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n \; w(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n; \bar{a}) = 1,$$

Théorème de Merzljakov

Une formule $\phi(\bar{z})$ est une $\forall\exists$-formule si elle est de la forme $\forall\bar{x}\exists\bar{y}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, où $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ est une formule sans-quantificateur.

Théorème 4 (Merzljakov, 1966, (fonctions implicites))

- *Soit F un groupe libre non-abélien. Si*

$$F \models \forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n \; w(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n; \bar{a}) = 1,$$

alors, il existe des mots, avec paramètres dans F, $v_1(x_1), v_2(x_1, x_2), \ldots, v_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tels que

Théorème de Merzljakov

Une formule $\phi(\bar{z})$ est une $\forall\exists$-formule si elle est de la forme $\forall\bar{x}\exists\bar{y}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, où $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ est une formule sans-quantificateur.

Théorème 4 (Merzljakov, 1966, (fonctions implicites))

- *Soit F un groupe libre non-abélien. Si*

$$F \models \forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n \; w(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n; \bar{a}) = 1,$$

alors, il existe des mots, avec paramètres dans F, $v_1(x_1), v_2(x_1, x_2), \ldots, v_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tels que

$$F[x_1, \ldots, x_n] \models w\big(x_1, v_1(x_1), \ldots, x_n, v_n(x_1, \ldots, x_n); \bar{a}\big) = 1.$$

où $F[x_1, \ldots, x_n] = F * \langle x_1, \ldots, x_n | \rangle$.

Théorème de Merzljakov

Une formule $\phi(\bar{z})$ est une $\forall\exists$-formule si elle est de la forme $\forall\bar{x}\exists\bar{y}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, où $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ est une formule sans-quantificateur.

Théorème 4 (Merzljakov, 1966, (fonctions implicites))

- *Soit F un groupe libre non-abélien. Si*

$$F \models \forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n \; w(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n; \bar{a}) = 1,$$

alors, il existe des mots, avec paramètres dans F, $v_1(x_1), v_2(x_1, x_2), \ldots, v_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tels que

$$F[x_1, \ldots, x_n] \models w\big(x_1, v_1(x_1), \ldots, x_n, v_n(x_1, \ldots, x_n); \bar{a}\big) = 1.$$

où $F[x_1, \ldots, x_n] = F * \langle x_1, \ldots, x_n | \rangle$.

- *Si $\phi(\bar{z})$ est une formule $\forall\exists$, alors :*

Théorème de Merzljakov

Une formule $\phi(\bar{z})$ est une $\forall\exists$-formule si elle est de la forme $\forall\bar{x}\exists\bar{y}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, où $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ est une formule sans-quantificateur.

Théorème 4 (Merzljakov, 1966, (fonctions implicites))

- *Soit F un groupe libre non-abélien. Si*

$$F \models \forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n \; w(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n; \bar{a}) = 1,$$

alors, il existe des mots, avec paramètres dans F, $v_1(x_1), v_2(x_1, x_2), \ldots, v_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tels que

$$F[x_1, \ldots, x_n] \models w\big(x_1, v_1(x_1), \ldots, x_n, v_n(x_1, \ldots, x_n); \bar{a}\big) = 1.$$

où $F[x_1, \ldots, x_n] = F * \langle x_1, \ldots, x_n | \rangle$.

- *Si $\phi(\bar{z})$ est une formule $\forall\exists$, alors :*

pour tout $\bar{g} \in F$, $F \models \phi(\bar{g})$ ssi $F[x] \models \phi(\bar{g})$.

Décidabilité

Décidabilité

Que peut-on dire sur la décidabilité

Décidabilité

Que peut-on dire sur la décidabilité

Théorème 5 (Makanin)

Décidabilité

Que peut-on dire sur la décidabilité

Théorème 5 (Makanin)

(1) *Il existe un algorithme qui décide si une équation a une solution ou pas dans un groupe libre. (1982).*

Décidabilité

Que peut-on dire sur la décidabilité

Théorème 5 (Makanin)

(1) *Il existe un algorithme qui décide si une équation a une solution ou pas dans un groupe libre. (1982).*
(2) *La théorie universelle et la théorie positive d'un groupe libre sont décidables (1985).*

Equations

Equations

La première étape pour comprendre la théorie élémentaire d'un groupe est de comprendre les solutions des équations.

Equations

La première étape pour comprendre la théorie élémentaire d'un groupe est de comprendre les solutions des équations.

Théorème 6 (Lorents 1963, Appel 1968, Chiswell & Remeslennikov 2000)

L'ensemble des solutions d'un système d'équations avec une seule variable dans un groupe libre est une réunion finie de points et de cosets de centraisateurs. □

Equations & approche de Sela

Equations & approche de Sela

Sommaire:

Equations & approche de Sela

Sommaire:

Soit $w(\bar{x}) = 1$ une équation.

Equations & approche de Sela

Sommaire:

Soit $w(\bar{x}) = 1$ une équation. Soit $H_w = \langle \bar{x} | w(\bar{x}) = 1 \rangle$.

Equations & approche de Sela

Sommaire:
Soit $w(\bar{x}) = 1$ une équation. Soit $H_w = \langle \bar{x} | w(\bar{x}) = 1 \rangle$. Soit G un groupe.

Equations & approche de Sela

Sommaire:
Soit $w(\bar{x}) = 1$ une équation. Soit $H_w = \langle \bar{x} | w(\bar{x}) = 1 \rangle$. Soit G un groupe.

- Si $\bar{g} \in G$ tel que $G \models w(\bar{g}) = 1$, alors il existe un homomorphisme $f : H_w \to G$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{g}$.

Equations & approche de Sela

Sommaire:
Soit $w(\bar{x}) = 1$ une équation. Soit $H_w = \langle \bar{x} | w(\bar{x}) = 1 \rangle$. Soit G un groupe.

- Si $\bar{g} \in G$ tel que $G \models w(\bar{g}) = 1$, alors il existe un homomorphisme $f : H_w \to G$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{g}$.
- Réciproquement, si $f : H_w \to G$ est un homomorphisme $f(\bar{x})$ est une solution de $w(\bar{x}) = 1$.

Equations & approche de Sela

Sommaire:
Soit $w(\bar{x}) = 1$ une équation. Soit $H_w = \langle \bar{x} | w(\bar{x}) = 1 \rangle$. Soit G un groupe.

- Si $\bar{g} \in G$ tel que $G \models w(\bar{g}) = 1$, alors il existe un homomorphisme $f : H_w \to G$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{g}$.
- Réciproquement, si $f : H_w \to G$ est un homomorphisme $f(\bar{x})$ est une solution de $w(\bar{x}) = 1$.

$\Longrightarrow$ correspondance entre les solutions de $w(\bar{x}) = 1$ et $\mathrm{Hom}(H_w, G)$.

Equations & approche de Sela

Equations & approche de Sela

Si G a une "bonne" action sur un "bon" espace, on peut comprendre l'ensemble des solutions des équations.

Equations & approche de Sela

Si G a une "bonne" action sur un "bon" espace, on peut comprendre l'ensemble des solutions des équations.
Soit F un groupe libre et $f_n : H \longrightarrow F$ une "bonne" suite d'homomorphismes.

Equations & approche de Sela

Si G a une "bonne" action sur un "bon" espace, on peut comprendre l'ensemble des solutions des équations.
Soit F un groupe libre et $f_n : H \to F$ une "bonne" suite d'homomorphismes.
$\Longrightarrow$ on obtient une séquence d'actions σ_n de H sur le graphe de Cayley de F, en définissant :

$$h.x = f_n(h).x$$

Equations & approche de Sela

Si G a une "bonne" action sur un "bon" espace, on peut comprendre l'ensemble des solutions des équations.
Soit F un groupe libre et $f_n : H \to F$ une "bonne" suite d'homomorphismes.
$\Longrightarrow$ on obtient une séquence d'actions σ_n de H sur le graphe de Cayley de F, en définissant :

$$h.x = f_n(h).x$$

$\Longrightarrow$ on peut extraire une sous-suite qui converge dans la topologie de Gormov-Hausdorff à une action sur un arbre réel.

Equations & approche de Sela

Si G a une "bonne" action sur un "bon" espace, on peut comprendre l'ensemble des solutions des équations.
Soit F un groupe libre et $f_n : H \to F$ une "bonne" suite d'homomorphismes.
$\Longrightarrow$ on obtient une séquence d'actions σ_n de H sur le graphe de Cayley de F, en définissant :

$$h.x = f_n(h).x$$

$\Longrightarrow$ on peut extraire une sous-suite qui converge dans la topologie de Gormov-Hausdorff à une action sur un arbre réel.
$\Longrightarrow$ une "bonne" action sur un arbre réel.

Equations & approche de Sela

Si G a une "bonne" action sur un "bon" espace, on peut comprendre l'ensemble des solutions des équations.
Soit F un groupe libre et $f_n : H \to F$ une "bonne" suite d'homomorphismes.
$\Longrightarrow$ on obtient une séquence d'actions σ_n de H sur le graphe de Cayley de F, en définissant :

$$h.x = f_n(h).x$$

$\Longrightarrow$ on peut extraire une sous-suite qui converge dans la topologie de Gormov-Hausdorff à une action sur un arbre réel.
$\Longrightarrow$ une "bonne" action sur un arbre réel.
$\Longrightarrow$ la structure de H (modulo le noyau de l'action) : H se décompose comme produit libre amalgamé au-dessu de groupes cyclique ou comme une HNN-extension.

Equations & approche de Sela

Equations & approche de Sela

Definition

Soit F un groupe libre et G un groupe.

Equations & approche de Sela

Definition

Soit F un groupe libre et G un groupe.

Equations & approche de Sela

Definition

Soit F un groupe libre et G un groupe.

- Une suite d'homomorphismes $f_n : G \to F$ est dite stable si pour tout $g \in G$, l'un des ensembles suivants est fini :

$$S_1(g) = \{n | f_n(g) = 1\}, \quad S_2(g) = \{n | f_n(g) \neq 1\}.$$

Equations & approche de Sela

Definition

Soit F un groupe libre et G un groupe.

- Une suite d'homomorphismes $f_n : G \to F$ est dite stable si pour tout $g \in G$, l'un des ensembles suivants est fini :

$$S_1(g) = \{n | f_n(g) = 1\}, \quad S_2(g) = \{n | f_n(g) \neq 1\}.$$

- $\ker_\infty(f_n) = \{g \in G | S_2(g) \text{ est fini}\}$.

Equations & approche de Sela

Definition

Soit F un groupe libre et G un groupe.

- Une suite d'homomorphismes $f_n : G \to F$ est dite stable si pour tout $g \in G$, l'un des ensembles suivants est fini :

$$S_1(g) = \{n | f_n(g) = 1\}, \quad S_2(g) = \{n | f_n(g) \neq 1\}.$$

- $\ker_\infty(f_n) = \{g \in G | S_2(g) \text{ est fini}\}$.
- H est un *groupe limite*, si $H = G/ker_\infty(f_n)$ pour un groupe G et une suite stable $f_n : G \to F$.

Equations & approche de Sela

Equations & approche de Sela

Liens avec la théorie universelle:

Equations & approche de Sela

Liens avec la théorie universelle: les propriétés suivantes sont équivalentes:

Equations & approche de Sela

Liens avec la théorie universelle: les propriétés suivantes sont équivalentes:
(1) H est un groupe limite,

Equations & approche de Sela

Liens avec la théorie universelle: les propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) H est un groupe limite,

(2) H est ω-résiduellement libre : pour tout sous-ensemble fini S de H tel que $1 \notin S$, il existe un homomorphisme $f : H \to F$ tel que $1 \notin f(S)$.

Equations & approche de Sela

Liens avec la théorie universelle: les propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) H est un groupe limite,

(2) H est ω-résiduellement libre : pour tout sous-ensemble fini S de H tel que $1 \notin S$, il existe un homomorphisme $f : H \to F$ tel que $1 \notin f(S)$.

(3) H est modèle de la théorie universelle d'un groupe libre.

Approche de Sela : élimination des quantificateurs

Approche de Sela : élimination des quantificateurs

Definition

Soit T une théorie et S un ensemble de formules.

Approche de Sela : élimination des quantificateurs

Definition

Soit T une théorie et S un ensemble de formules.
On dit que T a l'élimination des quantificateurs au-dessus de S si pour toute formule $\phi(\bar{x})$,

Approche de Sela : élimination des quantificateurs

Definition

Soit T une théorie et S un ensemble de formules.
On dit que T a l'élimination des quantificateurs au-dessus de S si pour toute formule $\phi(\bar{x})$, il existe une combinaison booléene de formules de S, $\varphi(\bar{x})$, tel que $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}))$.

Approche de Sela : élimination des quantificateurs

Definition

Soit T une théorie et S un ensemble de formules.
On dit que T a l'élimination des quantificateurs au-dessus de S si pour toute formule $\phi(\bar{x})$, il existe une combinaison booléene de formules de S, $\varphi(\bar{x})$, tel que $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}))$.

$T \models \phi$ signifie $M \models T \Rightarrow M \models \phi$.

Approche de Sela : élimination des quantificateurs

Definition

Soit T une théorie et S un ensemble de formules.
On dit que T a l'élimination des quantificateurs au-dessus de S si pour toute formule $\phi(\bar{x})$, il existe une combinaison booléene de formules de S, $\varphi(\bar{x})$, tel que $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}))$.

$T \models \phi$ signifie $M \models T \Rightarrow M \models \phi$.

Théorème 7 (Sela)

Approche de Sela : élimination des quantificateurs

Definition

Soit T une théorie et S un ensemble de formules.
On dit que T a l'élimination des quantificateurs au-dessus de S si pour toute formule $\phi(\bar{x})$, il existe une combinaison booléene de formules de S, $\varphi(\bar{x})$, tel que $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}))$.

$T \models \phi$ signifie $M \models T \Rightarrow M \models \phi$.

Théorème 7 (Sela)

Soit F un groupe libre non-abélien de rang fini.

Approche de Sela : élimination des quantificateurs

Definition

Soit T une théorie et S un ensemble de formules.
On dit que T a l'élimination des quantificateurs au-dessus de S si pour toute formule $\phi(\bar{x})$, il existe une combinaison booléene de formules de S, $\varphi(\bar{x})$, tel que $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}))$.

$T \models \phi$ signifie $M \models T \Rightarrow M \models \phi$.

Théorème 7 (Sela)

Soit F un groupe libre non-abélien de rang fini. Alors F a l'élimination des quantificateurs au-dessus des formules $\forall\exists$.

Approche de Sela : élimination des quantificateurs

Definition

Soit T une théorie et S un ensemble de formules.
On dit que T a l'élimination des quantificateurs au-dessus de S si pour toute formule $\phi(\bar{x})$, il existe une combinaison booléene de formules de S, $\varphi(\bar{x})$, tel que $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}))$.

$T \models \phi$ signifie $M \models T \Rightarrow M \models \phi$.

Théorème 7 (Sela)

Soit F un groupe libre non-abélien de rang fini. Alors F a l'élimination des quantificateurs au-dessus des formules $\forall\exists$.
En plus, pour toute formule $\phi(\bar{x})$, il existe une combinaison booléene de $\forall\exists$-formules, $\varphi(\bar{x})$, telle que : $F \models \forall x(\phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}))$, pour tout groupe libre non-abélien F.

La solution du problème de Tarski

La solution du problème de Tarski

Théorème 8 (Sela, Kharlampovich&Myasnikov)

$F_n \preceq F_m$ *pour* $m \geq n \geq 2$. □

La solution du problème de Tarski

Théorème 8 (Sela, Kharlampovich&Myasnikov)

$F_n \preceq F_m$ pour $m \geq n \geq 2$. □

Théorème 9 (Kharlampovich&Myasnikov)

$Th(F_n)$ est décidable pour $n \geq 2$. □

La solution du problème de Tarski

Théorème 8 (Sela, Kharlampovich&Myasnikov)

$F_n \preceq F_m$ pour $m \geq n \geq 2$. □

Théorème 9 (Kharlampovich&Myasnikov)

$Th(F_n)$ est décidable pour $n \geq 2$. □

Conséquence:

$F_X \preceq F_Y$ pour $X \subseteq Y, |X| \geq 2$.

$Th(F_X)$ est décidable.