Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2012-2013
Licence Math-Info 1re année
Analyse 2 : intégration et approximation

Primitives et intégrales

Feuille d'exercices no 3

Intégration par parties

Exercice 1. Calculer par parties les intégrales ou primitives suivantes :

$$\text{a)}\quad \int_0^1 xe^{-x}\,dx,\qquad \text{b)}\quad \int x\sin 2x\,dx,\qquad \text{c)}\quad \int_0^{\pi/2} x^2\cos 3x\,dx$$
$$\text{d)}\quad \int x^2\ln x\,dx\ \text{ et }\ \text{e)}\quad \int x^n\ln x\,dx\ (\text{avec } n\in\mathbb{Z}).$$

Exercice 2. Calculer

$$a)\ \int_0^1 \arctan x\,dx \quad \text{puis} \quad b)\ \int_0^1 x\arctan^2 x\,dx.$$

Exercice 3. Calculer par parties les intégrales ou primitives suivantes :

$$\text{a)}\quad \int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx,\qquad \text{b)}\quad \int \frac{\ln(1+2x)}{x^2}\,dx \qquad \text{c)}\quad \int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx,$$
$$\text{d)}\quad \int_0^{\pi/2}\cos x\ln(1+\cos x)\,dx,\qquad \text{e)}\quad \int e^x\cos x\,dx,$$
$$\text{f)}\quad \int x\arctan x\,dx,\qquad \text{g)}\quad \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx,\qquad \text{h)}\quad \int \sin(\ln x)\,dx\ \text{ et}$$
$$\text{i)}\quad \int_{-1}^1 (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx.$$

Exercice 4. Pour tout entier $n\geq 0$, on pose

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx.$$

a) Calculer I_0 et I_1.
b) Montrer que l'on a, pour tout entier $n\geq 2$:

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

c) En déduire les valeurs de I_{2n} et I_{2n+1} pour tout entier $n\geq 0$.

Changements de variables

Exercice 5. Calculer les primitives suivantes en effectuant le changement de variable indiqué.

$$\text{a)}\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}\ (\text{poser } x = 1/t), \qquad \text{b)}\quad \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}\ (\text{poser } x = -\ln t),$$

$$\text{c)}\quad \int x(5x^2-3)^7 dx\ (\text{poser } t = 5x^2-3)\ \text{ et }\ \text{d)}\quad \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}\ (\text{poser } t = \sqrt{x+1}).$$

Exercice 6. Calculer les primitives ou intégrales suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

$$\text{a)}\quad \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}\ (\text{poser } x = \tan u), \qquad \text{b)}\quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}\ (\text{poser } u = \tan(x/2)),$$

$$\text{c)}\quad \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}\ (\text{poser } u = e^{-x}), \qquad \text{d)}\quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x + \sin x}\ (\text{poser } u = \tan(x/2)),$$

$$\text{e)}\quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}\, dx\ (\text{poser } u = \sin x).$$

Exercice 7. Calculer les primitives ou intégrales suivantes en utilisant un changement de variable :

$$\text{a)}\quad \int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx, \qquad \text{b)}\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{e^x-1}}\ \text{ et }\ \text{c)}\quad \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\, dx.$$

Exercice 8. Calculer les primitives ou intégrales suivantes en utilisant un changement de variable :

$$\text{a)}\quad \int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx, \qquad \text{b)}\quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}, \qquad \text{c)}\quad \int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\, dx,$$

$$\text{d)}\quad \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}, \qquad \text{e)}\quad \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx\ (\text{avec } a \in \mathbb{R})\ \text{ et }\ \text{f)}\quad \int \frac{dx}{x \ln x}.$$

Exercice 9. Calculer les primitives ou intégrales suivantes en utilisant un changement de variable :

$$\text{a)}\quad \int_1^4 \frac{x\, dx}{\sqrt{4x+2}}, \qquad \text{b)}\quad \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx, \qquad \text{c)}\quad \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{1+x}},$$

$$\text{d)}\quad \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\, dx\ \text{ et }\ \text{e)}\quad \int (x+2)\sin(x^2+4x-6)\, dx.$$

Exercice 10. Calculer les primitives ou intégrales suivantes en utilisant un changement de variable :

$$\text{a)}\quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}, \qquad \text{b)}\quad \int \frac{1}{x\tan(\ln x)}\, dx,$$

$$\text{c)}\quad \int_0^1 \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\, dx, \qquad \text{d)}\quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}\ \text{ et }\ \text{e)}\quad \int_0^1 \arcsin^2 x\, dx.$$

Exercice 11. En utilisant le changement de variable $x = \tan u$, calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \arcsin \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

On rappelle la formule $\sin 2u = \dfrac{2\tan u}{1+\tan^2 u}$.

Exercice 12.

a) Montrer, en utilisant un changement de variable, que

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}\, du.$$

b) Calculer

$$\int \frac{u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}\, du$$

et en déduire la valeur de

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x}.$$

Primitives et intégrales des fractions rationnelles

Exercice 13. Calculer les primitives et intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\, dx$, b) $\displaystyle\int \frac{5x+2}{x^3-5x^2+4x}\, dx$, c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x(x+1)^2}$,

d) $\displaystyle\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\, dx$, e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4+1}$, f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$,

g) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}\, dx$ et h) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\, dx$.

Exercice 14. Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x}{x+1}\, dx$, b) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-9x^2}$, c) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)^3}$,

d) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+10}$ et e) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-4x-3}$.

Exercice 15. Calculer les intégrales et primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^3(x+1)}$, b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}$, c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$,

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\, dx$,

Primitives et intégrales des fonctions circulaires

Exercice 16. En utilisant la formule :

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

calculer :

$$\text{a)} \quad \int \sin^2 x\, dx, \qquad \text{b)} \quad \int_0^{\pi/4} \cos^2 x\, dx \ \text{ et } \ \text{c)} \quad \int \sin^4 x\, dx.$$

Exercice 17. En utilisant la décomposition du produit

$$\cos x \cos 3x \sin 5x$$

en une somme de $\sin 9x$, $\sin 7x$, $\sin 3x$ et $\sin x$, calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \cos 3x \sin 5x\, dx.$$

Exercice 18. En utilisant le fait que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$, calculer les primitives suivantes :

$$\text{a)} \quad \int \tan x\, dx, \qquad \text{b)} \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx \ \text{ et } \ \text{c)} \quad \int \cos^3 x\, dx.$$

Exercice 19. En utilisant la formule pour la dérivée de $\tan x$, calculer :

$$\text{a)} \quad \int \tan^2 x\, dx, \qquad \text{b)} \quad \int \tan^3 x\, dx.$$

Exercice 20. Calculer les primitives suivantes :

$$\text{a)} \quad \int \cos^3 x\, dx, \qquad \text{b)} \quad \int \sin^2(x/2)\cos^3(x/2)\, dx,$$
$$\text{c)} \quad \int \sin 3x \cos 5x\, dx \ \text{ et } \ \text{d)} \quad \int \sin 9x \sin x\, dx.$$

Autres exercices...

Exercice 21. Trouver la formule de récurrence permettant de calculer l'intégrale

$$\int x^n e^{-x}\, dx$$

où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22. Calculer $\int x^3 \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\, dx$.

Exercice 23. Calculer la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_x^{x^2+1} e^{-t^2}\, dt.$$

Exercice 24. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ par la formule

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}\, dt.$$

a) Montrer que f est impaire.

b) Tracer sommairement le graphe de f.

c) Montrer que $f(x) \leq x$ si $0 \leq x \leq \pi/4$.

Sommes de Riemann

Exercice 25. Calculer :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n}\right)$.

b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2}$.

Longueurs, surfaces, volumes

Exercice 26. Montrer que l'aire du disque unité vaut π.

Exercice 27. a) Calculer $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$.

b) Déterminer la longueur de l'arc de la parabole $y = x^2$ compris entre $x = 0$ et $x = a$.

Exercice 28. a) Montrer que le volume d'une boule de rayon r est $4\pi r^3/3$.

b) Déterminer le volume obtenu par la rotation de l'arc de parabole $x = z - z^2$, avec $0 \leq z \leq 1$, autour de l'axe Oz.