Groupes valués et théorème de Kurosh-Neumann revisité

Abderezak OULD HOUCINE

Résumé

Dans le but d'axiomatiser l'argument de Nielsen sur les sous-groupes des groupes libres, R.C. Lyndon avait introduit des groupes équipés d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{N}$ et qui vérifient certains axiomes. Le but de l'article est de présenter une généralisation du théorème de Kurosh-Neumann aux groupes valués ayant une forme normale.

1 Définitions et premières propriétés

On va étudier quelques propriétés des groupes équipés d'une fonction $\ell : G \to \mathbb{N}$ et qui vérifient certains axiomes. Ce genre de groupe a été étudié pour la première fois par R.C. Lyndon [10], où il a introduit 5 axiomes qui résument les propriétés essentielles des formes normales des groupes libres et des produits libres.

Commençons par quelques définitions très générales. Soit $(\Lambda, \leq)$ un groupe abélien ordonné. Soit G a group équipé d'une fonction $\ell : G \to \Lambda$ et soit $c(x,y) = \frac{1}{2}(\ell(x) + \ell(y) - \ell(xy^{-1}))$. On dit que ℓ est une fonction de ***Lyndon*** si elle vérifie les axiomes suivants :

$\mathcal{A}_0$. $\ell(1) = 0$,
$\mathcal{A}_1$. Pour tout $g \in G$, $\ell(g^{-1}) = \ell(g)$,
$\mathcal{A}_2$. Pour tout $x, y, z \in G$, $c(x,y) \geq \min\{c(x,z), c(z,y)\}$,

et dans ce cas on dit que (G, ℓ) est un groupe Λ-**valué**. Dans le cas où $\Lambda = \mathbb{Z}$ avec l'ordre usuel, on dit que (G, ℓ) est un groupe valué. A partir des axiomes on a les propriétés immédiates suivantes:

(i) $c(x,y) = c(y,x)$ et $\ell(x) \geq 0$, pour tout $x, y \in G$.
(ii) $|\ell(x) - \ell(y)| \leq \ell(xy) \leq \ell(x) + \ell(y)$, pour tout $x, y, z \in G$, où $|.|$ est la valeur absolue de Λ.
(iii) $0 \leq c(x,y) \leq \min\{\ell(x), \ell(y)\}$, pour tout $x, y \in G$.

On définit $B(G) = \{x \in G \mid \ell(x) = 0\}$, noté B s'il n'y a pas de confusion. Alors B est un sous-groupe de G.

On s'intéressera aussi a ce type de fonctions : soit G un group engendré par S. On définie ℓ_S, la fonction **longueur des mots** par : pour tout $g \in G$, $\ell_S(g)$ est la longueur du plus petit mot w sur $S^{\pm 1}$ tel que $g = w$ dans G. Alors ℓ_S

prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, et elle vérifie $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ et $\ell_S(xy) \leq \ell_S(x) + \ell_S(y)$, pour tout $x, y \in G$.

2 Exemples

• ***Groupes libres***. Soit (F, ℓ_X) un groupe libre de bas X et ℓ_X la fonction des longueurs des mots. Alors (F, ℓ_X) est un groupe valué qui vérifie en plus l'axiome suivant (introduit par Lyndon):

$$\mathcal{A}_3.\ \ \ell(x^2) > \ell(x) \text{ pour tout } x \neq 1$$

Remarquons qu'on a dans ce cas $B = 1$.

• ***Produits libres***. Soit $G = G_1 * G_2$. Posons $S = (G_1 \cup G_2) \setminus \{1\}$. Alors (G, ℓ_S) est un groupe valué qui vérifie en plus l'axiomes suivant (introduit par Lyndon):

$$\mathcal{A}_4.\ \ c(x, y) + c(x^{-1}, y^{-1}) > \ell(x) = \ell(y) \Rightarrow x = y$$

Bien sûr $\ell_S(g)$ est la longueur de la forme normale qui représente g. Remarquons que dans ce cas aussi on a $B = 1$.

• ***Produits libres amalgamés***. Soit $G = G_1 *_A G_2$. Soit $\ell(g)$ la longueur des formes normales de g si $g \notin A$ et $\ell(g) = 0$ si $g \in A$. Alors (G, ℓ) est un groupe valué avec $B = A$.

• ***HNN-extensions***. Soit $G^* = \langle G, t | A^t = B \rangle$. Soit $\ell(x)$ le nombre des occurences de $t^{\pm}$ dans la forme normale de x. Alors (G, ℓ) est un groupe valué avec $B = G$. Remarquons que dans ce cas $\ell(t) = 1$ et $\ell(t^2) = 2$, contrairement du cas du produit libre (amalgamé) où on a $\ell(x^2) \leq 1$ pour tout x tel que $\ell(x) \leq 1$.

• ***Modèles de la théorie universelle des groupes libres non-abéliens***. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de la théorie universelle des groupes libres non-abéliens. Alors $\mathcal{M}$ se plonge dans une ultrapuissance ${}^*F$ de F_2. On peut munir ${}^*F$ par une fonction de Lyndon ${}^*\ell$ à valeurs dans ${}^*\mathbb{Z}$ qui vérifie en plus l'axiome $\mathcal{A}_3$. Alors $(\mathcal{M}, {}^*\ell | \mathcal{M})$ est un groupe valué qui vérifie en plus $\mathcal{A}_3$.

Cette méthode a permis à I. Chiswell et V.Remeslennikov [6] de redémonter le résultat d'Appel et Lorents (dont la démonstration était incomplète) sur les solutions des systèmes d'équations à une variable dans un groupe libre.

Cela à permis aussi à P.H. Pfander [12] de démontrer qu'un groupe de type fini modèle de la théorie universelle des groupes libres (un groupe limite) possède une fonction de Lyndon ayant ses valeurs dans $\mathbb{Z}^n$ avec l'ordre lexicographique. Cela lui a permis de déduire que ces groupes sont de présentation finie.

• ***Groupes agissant sur un Λ-arbre.***(I. Chiswell)[3] Soit (X, d) un Λ-arbre. Soit G un groupe agissant par isométries sur X. Soit $x \in X$ et soit $\ell(g) = d(x, gx)$. Alors (G, ℓ) est un groupe Λ-valué.

• ***Certains groupes linéaires.*** (I. Chiswell) [4] Soit (K, v) un corps valué où v est discrète. Alors d'après un résultat de Serre $\mathrm{GL}_2(K)$ agit sur un arbre. Par conséquent il possède une fonction de Lyndon. I. Chiswell a donné la forme

explicite de cette fonction. Si on munie $\mathbb{Q}$ de la valuation p-adic v_p, on obtient $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ comme un groupe valué.

3 Théorèmes de décomposition

Dans toute la suite on ne considère que des groupes valués. On va définir quelques sous-ensembles intéressants d'un groupe valué (G, ℓ).

Soit

$$N = \{g \in G \mid \ell(g^2) \leq \ell(g)\},$$

et soit $\equiv$ la relation définie, dans N, par :

$$x \equiv y \text{ ssi } \ell(xy^{-1}) \leq \ell(x) = \ell(y).$$

Cette relation a été introduite par R.C. Lyndon[1]. Alors $\equiv$ est une relation d'equivalence dans N.

On note $N(x)$ la classe d'équivalence de x. Alors $N(1) = B(G)$.

Soit S un sous-ensemble de G. Soit $(s_1, \cdots, s_n)$ une suite d'éléments de $S \cup S^{-1} \setminus \{1\}$. On dit que $(s_1, \cdots, s_n)$ est ***pseudo-reduite*** si :

(i) $s_i.s_{i+1} \neq 1$,

(ii) si $s_i, s_{i+1} \in (S \cup S^{-1}) \cap N$, alors $s_i \not\equiv s_{i+1}$.

On considère aussi l'axiome suivant (introduit par Lyndon) :

$$\mathcal{A}_0^*. \ \ell(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Théorème 3.1 (R.C. Lyndon) [10]

Soit (G, ℓ) un groupe valué vérifiant $\mathcal{A}_0^*$ et $\mathcal{A}_4$. Alors :

(1) *pour tout $x \in N$, l'ensemble $N(x) \cup \{1\}$ est un sous-groupe de G,*

(2) *il existe un sous-ensemble S qui engendre G tel que : pour toute suite pseudo-réduite $(s_1, \cdots, s_n)$ de $S \cup S^{-1}$ on a :*

$$\ell(s_1 \cdots s_n) = \sum_{i=1,n} \ell(s_i) - 2 \sum_{i=1,n-1} c(s_i, s_{i+1}^{-1}),$$

(3) *on a $G = F *_i G_i$ où F est un groupe libre et $G_i = N(x) \cup \{1\}$ pour un $x \in S \cap N$.* □

Remarquons que ce Théorème donne immédiatement le théorème de Kurosh sur les sous-groupes des produit libres.

Théorème 3.2 (R.C. Lyndon) [10]

Un groupe valué (G, ℓ) qui satisfait $\mathcal{A}_3$ est un groupe libre qui se plonge dans un groupe libre F de base X tel que $2\ell = \ell_X | G$. □

4 Groupes valués avec forme normale

B.M. Hurley [8, 9] avait étudié des groupes munie de formes normales et qu'il a appellés "NFS-groups". Il a démontré que ces groupes sont les groupes valués qui vérifient l'axiome suivant :

$$\mathcal{A}_6.\ G \text{ est engendré par } \{x \in G \mid \ell(x) \leq 1\}$$

Un groupe valué qui vérifie l'axiome $\mathcal{A}_6$ est appelé un *groupe valué avec forme normale*. Cette définition est justifiée grâce à la proposition qui suit. Soit $(G\ ,\ \ell)$ un groupe valué avec forme normale. Posons $S = \{x \mid \ell(x) \leq 1\}$. On dit d'une suite $(s_1, \ldots, s_n)$ qu'elle est S-réduite si $s_i.s_{i+1} \notin S$.

Proposition 4.1 (B.M. Hurley)[8, 9] *Soit (G, ℓ) un groupe valué avec forme normale.*

• *Si $(s_1, \ldots, s_n)$ avec $n \geq 2$ est une suite S-réduite alors $\ell(s_1 \cdots s_n) = \ell_S(s_1 \cdots s_n) = n$.*

• *Pour tout élément $g \in G \setminus B$, il existe une suite S-réduite $(s_1, \ldots, s_n)$ telle que $g = s_1 \cdots s_n$ et $\ell(g) = \ell_S(g) = n$.*

Donc si $(s'_1, \ldots, s'_m)$ est une autre suite S-réduite telle que $g = s'_1 \cdots s'_m$ alors $m = n$. □

Definition 4.2 *Une **forme normale** de g est une suite $(s_1, \ldots, s_n)$ S-réduite telle que $g = s_1 \cdots s_n$. (Si $g \in B$, une forme normale de g est g).*

Théorème 4.3 (I. Chiswell)[5] *Tout groupe valué (G, ℓ) se plonge dans un groupe valué (H, ℓ') avec forme normale tel que $\ell'|G = \ell$.*

5 Théorème de Kurosh-Neumann revisité

Le but de cette section est de démontrer la généralisation suivante du théorème de Kurosh-Neumann aux groupes valués avec forme normale.

Théorème 5.1 (Théorème de Kuroch-Neumann pour les groupes valués ayant une frome normale)

Soit (G, ℓ) un groupe valué ayant une forme normale. Soit K un sous-groupe de G tel que tout conjugué de K intersecte B trivialement. Alors :

$$K = F *_i G_i$$

où F est un groupe libre et $G_i = K \cap aN(x)a^{-1}$ pour un certain $a \in G$ et $x \in S \cap N$, $\ell(x) = 1$.

On intrdouit le nouvel axiome suivant :

$$\mathcal{A}_4^*.\ Si\ c(x, y) + c(x^{-1}, y^{-1}) > \ell(x) = \ell(y),\ alors\ xy^{-1} \in B^G,$$

où B^G est l'ensemble des conjugués de B.

On montre d'abord le théorème suivant :

Théorème 5.2 *Un groupe valué (G, ℓ) avec forme normale satisfait l'axiome $\mathcal{A}_4^*$. En particulier un produit libre amalgamé ou une HNN-extension vérifie $\mathcal{A}_4^*$.*

Démonstration On voit que le cas $\ell(x) = \ell(y) = 0$ est impossible. Montrons $\mathcal{A}_4^*$ pour le cas $\ell(x) = \ell(y) = 1$. Donc on a :

$$\frac{1}{2}(\ell(x) + \ell(y) - \ell(xy^{-1})) + \frac{1}{2}(\ell(x) + \ell(y) - \ell(x^{-1}y)) > 1$$

Par conséquent $\ell(xy^{-1}) + \ell(x^{-1}y) < 2$. Donc $\ell(xy^{-1}) = 0$ ou $\ell(x^{-1}y) = 0$.

Si $\ell(xy^{-1}) = 0$ c'est fini : $xy^{-1} \in B$.

Si $\ell(x^{-1}y) = 0$, alors $x^{-1}y = b$ où $b \in B$, d'où $xy^{-1} = x.b^{-1}.x^{-1} \in B^G$.

Soient $x, y \in G$ vérifant $c(x, y) + c(x^{-1}, y^{-1}) > \ell(x) = \ell(y)$ et $\ell(x) = \ell(y) = n \geq 2$.

Le même type de calcul nous donne : $\ell(xy^{-1}) + \ell(x^{-1}y) < 2n$. Donc $\ell(xy^{-1}) < 2n$.

Soient $x = s_1 \cdots s_n$ et $y = t_1 \cdots t_n$ en écriture normale. Donc on a : $\ell(s_n.t_n^{-1}) \leq 1$.

Si $\ell(s_n.t_n^{-1}) = 1$ alors $\ell(xy^{-1}) = 2n - 1$ et par conséquent $\ell(x^{-1}y) = 0$ et dans ce cas la conclusion est immédiate (comme dans le cas $\ell(x) = 1$).

Traitons le cas $\ell(s_n.t_n^{-1}) = 0$.

Soit $\beta = t_i \cdots t_n$ le morçeau maximal vérifiant : $\ell(s_i \cdots s_n.t_n^{-1} \cdots t_i^{-1}) = 0$. Soit $b = s_i \cdots s_n$, donc on peut écrire :

$$x = a.b, \quad \ell(x) = \ell(a) + \ell(b)$$

$$y = \alpha.\beta, \quad \ell(y) = \ell(\alpha) + \ell(\beta),$$

et remarquons que $\ell(a) = \ell(\alpha)$ et $\ell(b) = \ell(\beta)$.

Comme $c(x, y) + c(x^{-1}, y^{-1}) > \ell(x) = \ell(y)$ et $\ell(y) - c(x, y) = c(y^{-1}, xy^{-1})$ on a :

$$c(x^{-1}, y^{-1}) > c(y^{-1}, xy^{-1})$$

Par conséquent d'après l'axiome $\mathcal{A}_2$ on a : $c(y^{-1}, xy^{-1}) = c(x^{-1}, xy^{-1})$. Un calcul simple nous donne : $\ell(x^{-1}yx^{-1}) = \ell(x)$.

Donc on a : $\ell(b^{-1}a^{-1}.\alpha\beta.b^{-1}.a^{-1}) = \ell(a.b)$.

On va montrer que $\ell(a^{-1}.\alpha) = 0$. Posons $w = a^{-1}.\alpha.\beta.b^{-1}$.

On traite les deux cas suivants :

• $\ell(b^{-1}.w.a^{-1}) = \ell(b^{-1}.w) + \ell(a^{-1})$.

Comme $\ell(\beta.b^{-1}) = 0$, on a $\ell(b^{-1}.w) = \ell(b^{-1}a^{-1}.\alpha)$ et $\ell(w) = \ell(a^{-1}\alpha)$.

Comme $\ell(b^{-1}.a^{-1}) = \ell(b^{-1}) + \ell(a^{-1})$ et $\ell(a) = \ell(\alpha)$, alors $\ell(b^{-1}a^{-1}.\alpha) = \ell(b^{-1}) + \ell(a^{-1}.\alpha)$.

Donc $\ell(b^{-1}.w) = \ell(b^{-1}a^{-1}.\alpha) = \ell(b^{-1}) + \ell(w)$. Donc $\ell(b^{-1}.w.a^{-1}) = \ell(b^{-1}.w) + \ell(a^{-1}) = \ell(b^{-1}) + \ell(w) + \ell(a^{-1})$. Donc $\ell(w) = 0$. D'où $\ell(a^{-1}.\alpha) = 0$, contradiction.

• $\ell(b^{-1}.w.a^{-1}) < \ell(b^{-1}.w) + \ell(a^{-1})$.

Alors $c(b^{-1}w, a) > 0$ et comme $c(b^{-1}, a) = 0$, d'après l'axiome A_2 on a : $c(b^{-1}, b^{-1}w) = 0$.

Donc, après calcul, $\ell(\beta^{-1}\alpha^{-1}a.b) = \ell(b) + \ell(b^{-1}a^{-1}\alpha\beta b^{-1})$. Comme dans la cas précédent on a $\ell(b^{-1}a^{-1}\alpha\beta b^{-1}) = \ell(b^{-1}a^{-1}\alpha) = \ell(b) + \ell(a^{-1}\alpha)$. Par conséquent :

$$\ell(x^{-1}y) = \ell(y^{-1}x) = \ell(\beta^{-1}\alpha^{-1}a.b) = 2\ell(b) + \ell(a^{-1}\alpha),$$

mais, en utilisant les formes normales,

$$(*) \qquad \ell(xy^{-1}) = \ell(a(b\beta^{-1})\alpha) = \ell(a) + \ell(\alpha)$$

$$\text{ou } \ell(xy^{-1}) = \ell(a(b\beta^{-1})\alpha) = \ell(a) + \ell(\alpha) - 1.$$

D'où ;

$$\ell(xy^{-1}) + \ell(x^{-1}y) = 2\ell(b) + \ell(a^{-1}\alpha) + \ell(a) + \ell(\alpha) - 1 = 2n + \ell(a^{-1}\alpha) - 1$$

car le cas (*) est impossible. D'où $\ell(a^{-1}\alpha) - 1 < 0$ et donc $\ell(a^{-1}\alpha) = 0$.

Par conséquent on a : $\ell(a^{-1}yx^{-1}a) = \ell(a^{-1}.\alpha.\beta.b^{-1}) = 0$, donc $a^{-1}yx^{-1}a = h$ avec $h \in B$, d'où $yx^{-1} \in B^G$. □

Proposition 5.3 *Soit (G, ℓ) un groupe valué ayant une forme normale. Soit $x \in N \setminus S$. Alors :*

$$x = s_1 \cdots s_n.h.s_n^{-1} \cdots s_1^{-1}, \quad \ell(s_i) = 1, \quad \ell(x) = 2n + \ell(h), \quad h \in N \cap S.$$

Démonstration Autrement dit on a :
si $\ell(x)$ est pair alors $x = s_1 \cdots s_n.h.s_n^{-1} \cdots s_1^{-1}$, $\ell(s_i) = 1$, $\ell(x) = 2n$, $\ell(h) = 0$,
si $\ell(x)$ est impair alors $x = s_1 \cdots s_n.h.s_n^{-1} \cdots s_1^{-1}$, $\ell(s_i) = 1$, $\ell(x) = 2n + 1$, $\ell(h) = 1$ et $h \in N$.

Un argument par récurrence montre : pour tout $x \in G$ on peut écrire x sous une des formes *normales* suivantes :

$$x = s_1 \cdots s_n.a_1 \cdots a_m.s'_1 \cdots s'_n \text{ ou } x = s_1 \cdots s_n.s'_1 \cdots s'_n$$

avec : $\ell(s'_1 \cdots s'_n.s_1 \cdots s_n) = 0$, et $\ell(a_m s'_1 \cdots s'_n.s_1 \cdots s_n a_1) \neq 0$, $m \geq 1$.

Posons $s'_1 \cdots s'_n.s_1 \cdots s_n = h$. Alors $s'_1 \cdots s'_n = hs_n^{-1} \cdots s_1^{-1}$ et donc $x = s_1 \cdots s_n.a_1 \cdots a_m hs_n^{-1} \cdots s_1^{-1}$ ou $x = s_1 \cdots s_n hs_n^{-1} \cdots s_1^{-1}$.

Alors $x = s_1 \ldots s_n.a_1 \cdots a_m.s'_1 \cdots s'_n$ et comme $x \in N$, on a : $\ell(x^2) \leq \ell(x)$ et donc $m = 1$. Par conséquent on a $x = s_1 \cdots s_n.a_1 hs_n^{-1} \cdots s_1^{-1}$. Comme $x \in N$, on doit avoir $a_1 h \in N$. Donc on a le résultat voulu.

Si $\ell(x)$ est pair alors $x = s_1 \cdots s_n.h.s_n^{-1} \cdots s_1^{-1}$. □

Démonstration du théorème 5.1 Comme G vérifie A_5^* et K vérifie $gKg^{-1} \cap B = \{1\}$, alors K vérife A_5. Par conséquent d'après le théorème 3.1:

$$K = F *_i G_i \text{ où } F \text{ est libre et } G_i = K \cap N(x_i) \text{ avec } x_i \in N \cap K \ .$$

Il reste à montrer que $G_i = K \cap aN(x)a^{-1}$ *pour un certain* $a \in G$ *et* $x \in S \cap N$.

Si $x_i \in S \cap N$, c'est fini. Donc supposons que $x_i \notin S \cap N$. D'après le lemme précédent:

$$x_i = s_1 \cdots s_n.h.s_n^{-1} \cdots s_1^{-1},$$

$\ell(s_i) = 1, \ell(x_i) = 2n+\ell(h), \ell(h) \leq 1$ et $h \in N$. Comme $(s_1 \cdots s_n)^{-1} G_i (s_1 \cdots s_n) \cap B = \{1\}$, on a $\ell(h) = 1$.

Montrons que $K \cap s_1 \cdots s_n N(h) s_n^{-1} \cdots s_1^{-1} = K \cap N(x_i)$.

(1) $K \cap s_1 \cdots s_n N(h) s_n^{-1} \cdots s_1^{-1} \subseteq K \cap N(x_i)$.

Soit $\beta \in N$ et $y = s_1 \cdots s_n.\beta.s_n^{-1} \cdots s_1^{-1} \in K$. Montrons que $\ell(y) = 2n + 1$. Sinon, on doit avoir :

$$\ell(s_n.\beta) \leq 1 \quad ou \quad \ell(\beta.s_n^{-1}) \leq 1$$

et comme $\beta \equiv h$ on doit avoir :

$$\ell(s_n.h) \leq 1 \quad ou \quad \ell(h.s_n^{-1}) \leq 1.$$

Par conséquent $\ell(x) < 2n + \ell(h)$, contradiction avec $\ell(x) = 2n + \ell(h)$.

Donc on a $\ell(y) = 2n + 1 = \ell(x_i)$. Mais on a aussi :

$$\ell(x_i y) = \ell(s_1 \cdots s_n.h\beta.s_n^{-1} \cdots s_1^{-1}) \leq \ell(y)$$

Par conséquent $x_i \equiv y$ et donc $y \in K \cap N(x_i)$.

(2) $K \cap s_1 \cdots s_n N(h) s_n^{-1} \cdots s_1^{-1} \supseteq K \cap N(x_i)$.

Soit $y \in K \cap N(x_i)$. Alors d'après le lemme précédent il existe β tel que $y = t_1 \cdots t_n.\beta.t_n^{-1} \cdots t_1^{-1} \in K$. Comme $x_i \equiv y$, on a $\ell(\beta) = 1$ et $\ell(x_i y) \leq \ell(x_i)$. Par conséquent on doit avoir :

$$\ell(h.s_n^{-1} \cdots s_1^{-1}.t_1 \cdots t_n\beta) \leq 1$$

et donc on doit avoir : $\ell(s_n^{-1} \cdots s_1^{-1}.t_1 \cdots t_n) = 0$. Par conséquent : $t_1 \cdots t_n = s_1 \cdots s_n.\gamma$ où $\gamma \in B$. Donc

$$y = s_1 \cdots s_n \gamma.\beta\gamma^{-1}.s_n^{-1} \cdots s_1^{-1}$$

Comme $\gamma.\beta\gamma^{-1} \in N$ et $\ell(h.s_n^{-1} \cdots s_1^{-1}.t_1 \cdots t_n\beta) = \ell(h.\gamma\beta) = \ell(h.\gamma\beta\gamma^{-1}) \leq 1$, on a : $h \equiv \gamma.\beta\gamma^{-1}$.

D'où $y \in K \cap s_1 \cdots s_n N(h) s_n^{-1} \cdots s_1^{-1}$. □

References

[1] H. Bass. *Group actions on non-Archimedean trees.* In Arboreal group theory (Berkeley, CA, 1988), volume 19 of Math. Sci. Res. Inst. Publ., pages 69–131. Springer, New York, 1991.

[2] I.M. Chiswell, *Abstract length functions in groups*, Math.Proc.Cambridge Philos.Soc.86(1976), 451-463 .

[3] I.M. Chiswell, *Introduction to* Λ*-tree*, Word Scientific, 2001.

[4] I.M. Chiswell, *An exemple of an integer-valued length function on a group*, J. London Math. Soc. (2), 16 (1977), 67-75.

[5] I.M. Chiswell, *Embedding theorems for groups with an integer -valued length function*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 85 (1979), no. 3, 417-429.

[6] I.M. Chiswell, V.N. Remeslennikov, *Equations in Free Groups with One Variable: 1*, J. Group Theory 3 (2000), 445-466.

[7] A.H.M. Hoare, *On length functions and Nielson methods in free groups*, J.London Math.Soc. 14 (1976), 188-192.

[8] B.M. Hurley, *On length functions and normal forms in groups*, Math.Proc.Camb.Phil.Soc. (1978), 84, 455-464.

[9] B.M. Hurley, *Small concellation theory over groups equipped with an integer-valued length function*, Word Problem II. Volume 95, (1980).

[10] R.C. Lyndon, *Length functions in groups*, Math.Scand. 12 (1963), 209-234.

[11] R.C. Lyndon, P.E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Springer, 1977.

[12] P.H. Pfander, *Finitely generated subgroups of the free* $\mathbb{Z}[t]$ *group on two generators*, In: Model theory of groups and automorphism groups, London Math. Soc. Lecture Notes 244, pp. 166-187, Cambridge: University Press 1997.

Abderezak OULD HOUCINE,
Institut Camille Jordan,
Université Claude Bernard Lyon-1,
Bâtiment Braconnier, 21 Avenue Claude Bernard,
69622 Villeurbanne Cedex, France.
ould@math.univ-lyon1.fr