Une inégalité intégrale

Abderezak OULD HOUCINE
Équipe de Logique Mathématique, Université de Paris VII
75251 Paris, France
ould@logique.jussieu.fr

Proposition 0.1 *Soit (X, μ) un espace musuré tel que $\mu(X) < \infty$. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-intégrable. Alors*

$$\int_{X\times X} |f(x) + f(y)|\ d\mu(x)d\mu(y) \geq \mu(X) \int_X |f(x)|\ d\mu(x)$$

Proof

Supposons d'abord que f est une fonction *étagée*.

Posons $X_1 = \{x \in I \mid f(x) < 0\}$ et $X_2 = \{x \in I \mid f(x) \geq 0\}$. Désignons par $\mu(X_1)$, $\mu(X_2)$ la mesure de X_1 et X_2. Pour alléger les écritures on note $d\mu$ au lieu de $d\mu(x)$ ou $d\mu(y)$ et l'appartenance des variables sera sous-entendu.

Alors

$$\int_{X\times X} |f(x) + f(y)|\ d\mu d\mu = \int_{X_1\times X_1} |f(x) + f(y)|\ d\mu d\mu + \int_{X_1\times X_2} |f(x) + f(y)|\ d\mu d\mu$$

$$+ \int_{X_2\times X_1} |f(x) + f(y)|\ d\mu d\mu + \int_{X_2\times X_2} |f(x) + f(y)|\ d\mu d\mu$$

Comme f garde un signe constant sur X_1 et X_2 on a $|f(x) + f(y)| = |f(x)| + |f(y)|$, d'où

$$\int_{X_1\times X_1} |f(x)+f(y)|\, d\mu d\mu = \int_{X_1\times X_1} |f(x)|+|f(y)|\, d\mu d\mu = \int_{X_1\times X_1} |f(x)|\, d\mu d\mu + \int_{X_1\times X_1} |f(y)|\, d\mu d\mu$$

$$= 2\mu(X_1) \int_{X_1} |f(x)|\ d\mu$$

De même on a :

$$\int_{X_2\times X_2} |f(x) + f(y)|\ d\mu d\mu = 2\mu(X_2) \int_{X_2} |f(x)|\ d\mu$$

On voit aussi que :

$$\int_{X_1\times X_2} |f(x) + f(y)|\ d\mu d\mu = \int_{X_2\times X_1} |f(x) + f(y)|\ d\mu d\mu$$

D'où finalement on a :

$$\int_{X\times X} |f(x)+f(y)|\, d\mu d\mu = 2\mu(X_1)\int_{X_1} |f(x)|\, d\mu + 2\mu(X_2)\int_{X_2} |f(x)|\, d\mu + 2\int_{X_1}(\int_{X_2} |f(x)+f(y)|\, d\mu(y))d\mu(x)$$

Si $\mu(X_1) = 0$ ou $\mu(X_2) = 0$ alors :

$$\int_{X_1}(\int_{X_2} |f(x)+f(y)|\, d\mu(y))d\mu(x) = 0 \text{ et}$$

$$\int_{X\times X} |f(x)+f(y)|\, d\mu d\mu = 2\mu(X_1)\int_{X_1} |f(x)|\, d\mu + 2\mu(X_2)\int_{X_2} |f(x)|\, d\mu = 2\mu(X)\int_X |f(x)|\, d\mu$$

et dans ca cas la conclusion est immédiate. Donc on suppose que $\mu(X_1) \neq 0$ et $\mu(X_2) \neq 0$.

Comme f change de signe sur X_1 et X_2, on a

$$|f(x)+f(y)| = \max(|f(x)|,|f(y)|) - \min(|f(x)|,|f(y)|)$$

Comme f est une fonction étagée alors, il n'est pas difficile de voir que les focntions $(x,y) \to \max(|f(x)|,|f(y)|)$, et $(x,y) \to \min(|f(x)|,|f(y)|)$ sont des fonctions étagées, donc intégrables et d'où

$$\int_{X_1}(\int_{X_2} |f(x)+f(y)|\, d\mu(y))d\mu(x)$$

$$= \int_{X_1\times X_2} \max(|f(x)|,|f(y)|)\, d\mu d\mu - \int_{X_1\times X_2} \min(|f(x)|,|f(y)|)\, d\mu d\mu$$

On a pour tout $(x,y) \in X_1 \times X_2$,

$$\min(|f(x)|,|f(y)|) \leq |f(x)|, \text{ et } \min(|f(x)|,|f(y)|) \leq |f(y)|$$

D'où

$$\int_{X_1} \min(|f(x)|,|f(y)|)\, d\mu \leq \int_{X_1} |f(x)|\, d\mu, \text{ et } \int_{X_2} \min(|f(x)|,|f(y)|)\, d\mu \leq \int_{X_2} |f(y)|\, d\mu$$

D'où

$$\int_{X_2}(\int_{X_1} \min(|f(x)|,|f(y)|)\, d\mu)\, d\mu \leq \mu(X_2)\int_{X_1} |f(x)|\, d\mu, \text{ et}$$

$$\int_{X_1}(\int_{X_2} \min(|f(x)|,|f(y)|)\, d\mu)\, d\mu \leq \mu(X_1)\int_{X_2} |f(y)|\, d\mu$$

D'où

$$\int_{X_2}\int_{X_1} \min(|f(x)|,|f(y)|)\, d\mu d\mu \leq \min\,(\mu(X_2)\int_{X_1} |f(x)|\, d\mu, \mu(X_1)\int_{X_2} |f(y)|\, d\mu)$$

Donc

$$-2\int_{X_2}\int_{X_1} \min(|f(x)|,|f(y)|)\, d\mu d\mu \geq -2\min\,(\mu(X_2)\int_{X_1} |f(x)|\, d\mu, \mu(I_1)\int_{X_2} |f(y)|\, d\mu)$$

De même on trouve

$$\int_{X_2}(\int_{X_1}\max(|f(x)|,|f(y)|)\ d\mu)\ d\mu \geq \mu(X_2)\int_{X_1}|f(x)|\ d\mu,\ \text{et}$$
$$\int_{X_1}(\int_{X_2}\max(|f(x)|,|f(y)|)\ dy)\ d\mu \geq \mu(X_1)\int_{X_2}|f(y)|\ d\mu$$

D'où finalement on a

$$\int_{X\times X}|f(x)+f(y)|\ d\mu d\mu = \mu(X_1)\int_{X_1}|f(x)|\ d\mu+\mu(X_2)\int_{X_2}|f(x)|\ d\mu+2\int_{X_2}(\int_{X_1}\max(|f(x)|,|f(y)|)\ d\mu)\ d\mu$$

$$+\mu(X_1)\int_{X_1}|f(x)|\ d\mu+\mu(X_2)\int_{X_2}|f(x)|\ d\mu-2\int_{X_2}\int_{X_1}\min(|f(x)|,|f(y)|)\ d\mu d\mu$$

$$\geq \mu(X_1)\int_{X_1}|f(x)|\ d\mu+\mu(X_2)\int_{X_2}|f(x)|\ d\mu+\mu(X_2)\int_{X_1}|f(x)|\ d\mu+\mu(X_1)\int_{X_2}|f(y)|\ d\mu$$

$$+\mu(X_1)\int_{X_1}|f(x)|\ d\mu+\mu(X_2)\int_{X_2}|f(x)|\ d\mu-2\ \min\ (\mu(X_2)\int_{X_1}|f(x)|\ d\mu,\mu(X_1)\int_{X_2}|f(y)|\ d\mu)$$

$$=\mu(X)\int_X|f(x)|\ d\mu+\mu(X_1)\int_{X_1}|f(x)|\ d\mu+\mu(X_2)\int_{X_2}|f(x)|\ d\mu-2\ \min\ (\mu(X_2)\int_{X_1}|f(x)|\ d\mu,\mu(X_1)\int_{X_2}|f(y)|\ d\mu)$$

Mais on a

$$\min\ (\mu(X_2)\int_{X_1}|f(x)|\ d\mu,\mu(X_1)\int_{X_2}|f(y)|\ d\mu)=$$

$$\min\ \Big(\mu(X_2)\mu(X_1)(\int_{X_1}\frac{1}{\mu(X_1)}|f(x)|\ d\mu),\mu(X_1)\mu(X_2)(\int_{X_2}\frac{1}{\mu(I_2)}|f(y)|\ d\mu)\Big)=$$

$$\mu(X_2)\mu(X_1)\ \min\ \Big(\int_{X_1}\frac{1}{\mu(X_1)}|f(x)|\ d\mu,\int_{X_2}\frac{1}{\mu(X_2)}|f(y)|\ d\mu\Big)$$

Posons

$$\alpha=\int_{X_1}\frac{1}{\mu(X_1)}|f(x)|\ d\mu,\quad \beta=\int_{X_2}\frac{1}{\mu(X_2)}|f(y)|\ d\mu$$

Alors on a :

$$\mu(X_1)\int_{X_1}|f(x)|\ d\mu+\mu(X_2)\int_{X_2}|f(x)|\ d\mu-2\ \min\ (\mu(X_2)\int_{X_1}|f(x)|\ d\mu,\mu(X_1)\int_{X_2}|f(y)|\ d\mu)$$

$$=\mu(X_1)^2\alpha+\mu(X_2)^2\beta-2\min(\alpha,\beta)\mu(X_1)\mu(X_2)$$

$$\geq \min(\alpha,\beta)\Big(\mu(X_1)^2+\mu(X_2)^2-2\mu(X_1)\mu(X_2)\Big)=\min(\alpha,\beta)(\mu(X_1)-\mu(X_2))^2\geq 0$$

D'où le résultat

$$\int_{X\times X}|f(x)+f(y)|\ d\mu d\mu\geq\int_{X\times X}|f(x)|\ d\mu+\min(\alpha,\beta)(\mu(X_1)-\mu(X_2))^2\geq\int_{X\times X}|f(x)|\ d\mu$$

et ceci achève la preuve dans le cas ou f est étagée.

Soit maintenant f une fonction Lebesgue-intégrable sur X. Comme l'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^1(X)$ il existe une suite de fonctions étagées f_n qui converge vers f, i.e.

$\lim_{n\to+\infty}\int_X |f_n(x)-f(x)|\ d\mu = 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{I\times I} |f_n(x)|\ d\mu d\mu = \int_{I\times I} |f(x)|\ d\mu d\mu$$

De même on voit que :

$$\Big|\int_{X\times X} |f_n(x)+f_n(y)|\ d\mu d\mu - \int_{X\times X} |f(x)+f(y)|\ d\mu d\mu\Big| \leq$$

$$\int_{X\times X}\Big||f_n(x)+f_n(y)|-|f(x)+f(y)|\Big|\ d\mu d\mu \leq \int_{X\times X} |f_n(x)-f(x)|+|f_n(y)-f(y)|\ d\mu d\mu$$

$$\leq \mu(X)\int_X |f_n(x)-f(x)|\ d\mu + \mu(X)\int_X |f_n(y)-f(y)|\ d\mu$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{X\times X} |f_n(x)+f_n(y)|\ d\mu d\mu = \int_{X\times X} |f(x)+f(y)|\ d\mu d\mu$$

Comme d'après ce qui précède on a

$$\int_{X\times X} |f_n(x)+f_n(y)|\ d\mu d\mu \geq \int_{X\times X} |f_n(x)|\ d\mu d\mu$$

au passage à la limite on obtient

$$\int_{X\times X} |f(x)+f(y)|\ d\mu d\mu \geq \int_{X\times X} |f(x)|\ d\mu d\mu$$

□