L1-MATH II-(2005-2006).

Résumé sur les Intégrales Impropres & exercices supplémentaires

Une fonction définie sur un intervalle I est dite *localement intégrable* sur I si f est Riemann-intégrable sur tout intervalle $[a,b] \subseteq I$.

1. Définitions.

(1) Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a,b[$ (on peut avoir $b = +\infty$) et localement intégrable sur I. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est *convergente* en b si la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ définie sur } [a,b[,$$

admet une limite finie quand x tend vers b (Cette limite finie est appelée l'intégrale de f sur $[a,b[$ et est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$). Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est *divergente*.

(2) Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I =]a,b]$ (on peut avoir $a = -\infty$) et localement intégrable sur I. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est *convergente* en a si la fonction

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt, \text{ définie sur }]a,b],$$

admet une limite finie quand x tend vers a (Cette limite finie est appelée l'intégrale de f sur $]a,b]$ et est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$). Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est *divergente*.

Exemples.

(a). On a $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}dt = 1 - \mathrm{e}^{-x}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}dt$ est convergente et vaut 1.

(b). On a $\displaystyle\int_0^x \cos(t)dt = \sin(x)$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin(x)$ n'existe pas, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)dt$ est divergente.

(c). On a $\displaystyle\int_x^2 \frac{1}{t-1}dt = -\ln(x-1)$, pour $x > 1$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to1} \ln(x-1) = -\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t-1}dt$ est divergente.

(d). On a $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2 - 2\sqrt{x}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to0} \sqrt{x} = 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est convergente.

(3) Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I =]a,b[$ (on peut avoir $a = -\infty$, $b = +\infty$) et localement intégrable sur I. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est *convergente* (en a et b) s'il existe $c \in]a,b[$ (ou d'une facon équivalente si pour tout $c \in]a,b[$) l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ est convergente en a et l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ est convergente en b. Par définition on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

(4) Soit f une fonction définie sur une réunion $\bigcup_{1\leq i\leq n}]a_i, b_i[$, avec $b_i \leq a_{i+1}$ (on peut avoir $a_1 = -\infty$, $b_n = +\infty$) et localement intégrable sur chaque $]a_i, b_i[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est *convergente* si pour tout i, l'intégrale $\int_{a_i}^{b_i} f(t)dt$ est convergente. Par définition on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{a_i}^{b_i} f(t)dt.$$

Exemples.

(a). Montrons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est convergente. La fonction $\frac{1}{1+t^2}$ est définie et continue (donc localement intégrable) sur $\mathbb{R}$, donc il faut (et il suffit) de montrer que les intégrales $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}dt$, $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ sont convergentes.

On a $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(x)$, $(x \geq 0)$, $\int_x^0 \frac{1}{1+t^2} = -\arctan(x)$, $(x \leq 0)$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \pi/2$ et $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\pi/2$, les intégrales $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2}dt$ et $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ sont convergentes et par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est convergente et vaut π.

(b). Montrons que l'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{t-1}dt$ est divergente. La fonction $\frac{1}{t-1}$ est définie sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. Donc on étudie les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{t-1}dt$ et $\int_1^2 \frac{1}{t-1}dt$. D'après ce qui précède, $\int_1^2 \frac{1}{t-1}dt$ est divergente et par conséquent $\int_0^2 \frac{1}{t-1}dt$ est divergente.

On considère dans la suite une fonction f définie et localement intégrable sur $I = [a, b[$ et on étudie la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$. Toutes les autres intégrales se ramènent à ce cas.

2. La convergence absolue.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est *absolument convergente* (en b) si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente (en b).

Théorème 1 *Une intégrale absolument convergente est convergente.*

3. Intégrales Impropres des fonctions à signe constant.

Si f est négative sur I, alors $-f$ est positive sur I et la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ se ramène à celle de l'intégrale $\int_a^b -f(t)dt$. Par conséquent, dans la suite on ne considère que le cas des fonctions positives.

Critère de la convergence majorée. *Si f est positive alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente (en b) si et seulement si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est bornée sur $[a, b[$.*

Critère de comparaison. *Soit f et g deux fonctions positives, définies et localement intégrables sur $[a,b[$. S'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)\le Mg(x)$ pour tout $x\in[a,b[$, alors la convergence de l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ entraîne celle de $\int_a^b f(t)dt$.*

Critère de la convergence dominée. *Soit f et g deux fonctions positives, définies et localement intégrables sur $[a,b[$.*

(1). *Si $f=O_b(g)$ alors la convergence de l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ entraîne celle de $\int_a^b f(t)dt$.*

(2). *Si $f=o_b(g)$ alors la convergence de l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ entraîne celle de $\int_a^b f(t)dt$.*

Rappel. Soit f et g deux fonctions définie sur D, où D est une réunion d'intervalles disjoints. Soit $b\in\bar{D}$ où $\bar{D}$ est l'adhérence de D dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

(1). On dit que f est négligeable devant g au voisinage de b et on écrit $f=\mathrm{o}_b(g)$ s'il existe une fonction ε, définie sur D, telle que $f=g\varepsilon$ au voisinage de b et $\lim\limits_{x\to b}\varepsilon(x)=0$.

(2) On dit que f est dominée par g au voisinage de b et on écrit $f=\mathrm{O}_b(g)$, s'il existe une fonction ε définie sur D, bornée, telle que $f=g\varepsilon$ au voisinage de b.

Remarques.

(1). Si g ne s'annule pas sur $D-\{b\}$, alors f est dominée par g au voisinage de b si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de b.

(2). Si g ne s'annule pas sur $D-\{b\}$, alors f est négligeable devant g au voisinage de b si et seulement si $\lim\limits_{x\to b}\frac{f}{g}=0$.

(3). $f=\mathrm{o}_b(g)\Rightarrow f=\mathrm{O}_b(g)$.

$f=\mathrm{O}_b(g)$ implique, quand f et g sont positives, et $b\in\mathbb{R}$, qu'il existe $M\in\mathbb{R}^+$ et $\delta>0$ tels que pour tout $x\in D\cap]b-\delta,b+\delta[$, $f(x)\le Mg(x)$. (Enoncer la propriété analogue pour $b=-\infty$ et $b=+\infty$).

Par conséquent on voit, d'après le critère de la convergence majorée ou celui de comparaison, que si $\int_a^b g(t)dt$ est convergente alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Exemples.

(a). Pour tout $t\ge1$, on a $e^{-t^2}\le e^{-t}$ et donc $e^{-t^2}=\mathrm{O}_{+\infty}(e^{-t})$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}dt$ est convergente, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt$ est aussi convergente.

(b). Montrons que l'intégrale $\int_1^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente où $\alpha>0$. Cherchons une fonction $g(t)$ devant laquelle f est négligeable au voisinage de $+\infty$. On a

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\alpha+1}}{e^t}=0.$$

Donc $t^{\alpha-1}e^{-t}=\mathrm{o}_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ et d'après le critère de la convergence dominée, l'intégrale $\int_1^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente.

Critère des équivalents. *Soit f et g deux fonctions positives, définies et localement intégrables sur $[a,b[$. Si f est équivalente à g au voisinage b, alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b g(t)dt$ sont de la même nature.*

Exemples.

(a). Montrons que l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente où $\alpha > 0$ (Rappelons que $t^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln t}$ et donc la fonction $f(t) = t^{\alpha-1}e^{-t}$ n'est pas définie en 0). Cherchons une fonction $g(t)$ équivalente à f au voisinage de 0. On a

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{t^{\alpha-1}} = \lim_{t\to 0} e^{-t} = 1.$$

Donc $t^{\alpha-1}e^{-t} \sim_0 t^{\alpha-1}$ et d'après le critère des équivalents l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente car l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$ est convergente.

4. Intégrales de références.

(a). (Intégrales de Riemann). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$, ($a > 0$), est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

$\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}dt$, ($a > 0$), est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

(b) (Intégrales de Bertrand). Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}dt$, ($a > 0$), est convergente si et seulement si ($\alpha > 1$) ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

(c) (Intégrale de Gauss). L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(d) (Intégrale de Dirichlet). L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

(e) (Intégrales de Fresnel). Les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt$ sont convergentes et leurs valeurs est $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales suivantes et, lorsqu'elles convergent, les calculer.

$$\int_0^1 \ln t\, dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}dt, \quad \int_0^1 \frac{t}{(1-t)^2}dt$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t(t+1)}}, \quad \int_0^{\pi/2} \tan(t)\, dt, \quad \int_0^1 \frac{e^t}{t}\, dt.$$

Exercice 2.

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} (t^2+1)t^{-2}dt, \quad \int_1^{+\infty} \frac{t^3}{\ln t + t^4}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^3-t^2}}\, dt.$$

Exercice 3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}$ est convergente. Calculer sa valeur.

Exercice 4. Montrer que les intégrales suivantes sont absolument convergentes.

$$\int_0^1 (\ln t)(\sin(\frac{1}{t}))dt, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos t\, dt,$$

$$\int_0^{+\infty} te^{-t^2}(t^2\sin t - \cos(\frac{1}{t}))\, dt, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln t\cos t}{t^{3/2}}dt$$

Exercice 5.

1. Déterminer, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} (x-1)^\alpha e^{-t^2} dt$.
2. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-t} dt$.

Exercice 6. Etudier, suivant les valeurs des réels a et b, la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\, dt \ (b>0), \quad \int_0^{1/2} \frac{(\sin t)^a}{(\ln t)^b}\, dt, \quad \int_{1/2}^{1} \frac{(\sin(\pi t))^a}{(\ln t)^b}\, dt.$$