Cours de théorie des modèles des groupes

Abderezak OULD HOUCINE

ICJ, Université Claude Bernard, Lyon, France

20 septembre 2006

Deux parties

Deux parties

Partie I : Introduction à la théorie des modèles

Deux parties

Partie I : Introduction à la théorie des modèles

- language du premier ordre, structure mathématique du premier ordre, sous-structure élémentaire, théorème de compacité, ...

Deux parties

Partie I : Introduction à la théorie des modèles

- language du premier ordre, structure mathématique du premier ordre, sous-structure élémentaire, théorème de compacité, ...
- construction des sous-structures et extensions élémentaires, théories catégoriques, théorème de Morley, stabilité, ...

Deux parties

Partie I : Introduction à la théorie des modèles

- language du premier ordre, structure mathématique du premier ordre, sous-structure élémentaire, théorème de compacité, ...
- construction des sous-structures et extensions élémentaires, théories catégoriques, théorème de Morley, stabilité, ...

Partie II : Théorie des modèles des groupes

Deux parties

Partie I : Introduction à la théorie des modèles

- language du premier ordre, structure mathématique du premier ordre, sous-structure élémentaire, théorème de compacité, ...
- construction des sous-structures et extensions élémentaires, théories catégoriques, théorème de Morley, stabilité, ...

Partie II : Théorie des modèles des groupes

- groupes stables, groupes ω-stables, superstables, groupes de rang de Morley fini, ...

Deux parties

Partie I : Introduction à la théorie des modèles

- language du premier ordre, structure mathématique du premier ordre, sous-structure élémentaire, théorème de compacité, ...
- construction des sous-structures et extensions élémentaires, théories catégoriques, théorème de Morley, stabilité, ...

Partie II : Théorie des modèles des groupes

- groupes stables, groupes ω-stables, superstables, groupes de rang de Morley fini, ...
- un peu de théorie géométrique des groupes : action sur les arbres et groupes limites.

Modèle ??

Modèle ??

Language du premier ordre

Modèle ??

Language du premier ordre

Language qui permet de dire des choses sur une structure mathématique :

$$\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$$

Modèle ??

Language du premier ordre

Language qui permet de dire des choses sur une structure mathématique :

$$\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$$

$\mathcal{F} =$ symboles de fonctions

Modèle ??

Language du premier ordre

Language qui permet de dire des choses sur une structure mathématique :

$$\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$$

$\mathcal{F} =$ symboles de fonctions

$\mathcal{R} =$ symboles de relations

Modèle ??

Language du premier ordre

Language qui permet de dire des choses sur une structure mathématique :

$$\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$$

$\mathcal{F} =$ symboles de fonctions

$\mathcal{R} =$ symboles de relations

$\mathcal{C} =$ symboles de constantes

Modèle ??

Modèle ??

Exemple

$\mathcal{L} = \{., x \to x^{-1}, 1\}$

Modèle ??

Exemple

$\mathcal{L} = \{., x \to x^{-1}, 1\}$

une structure dans ce language : $(X, ., x \to x^{-1}, 1)$

Modèle ??

Exemple

$\mathcal{L} = \{., x \to x^{-1}, 1\}$
une structure dans ce language : $(X, ., x \to x^{-1}, 1)$

X est un groupe $\Leftrightarrow$ X vérifie la théorie

$$T_{gp} = \begin{cases} \forall x \forall y \forall z (x.(y.z) = (x.y).z), \\ \forall x (x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1), \\ \forall x (x.1 = 1.x = x). \end{cases}$$

Modèle ??

Exemple

$\mathcal{L} = \{., x \to x^{-1}, 1\}$
une structure dans ce language : $(X, ., x \to x^{-1}, 1)$

X est un groupe $\Leftrightarrow$ X vérifie la théorie

$$T_{gp} = \begin{cases} \forall x \forall y \forall z (x.(y.z) = (x.y).z), \\ \forall x (x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1), \\ \forall x (x.1 = 1.x = x). \end{cases}$$

$(X, ., x \to x^{-1}, 1)$ est un groupe

$$\Updownarrow$$

$(X, ., x \to x^{-1}, 1)$ est ***modèle*** de T_{gp}.

Théorie des modèles

Théorie des modèles

- Etude d’une structure mathématique du point de vue de sa théorie du premier ordre.

Théorie des modèles

- Etude d'une structure mathématique du point de vue de sa théorie du premier ordre.
- Etude des modèles d'une théorie donnée :

Théorie des modèles

- Etude d'une structure mathématique du point de vue de sa théorie du premier ordre.
- Etude des modèles d'une théorie donnée :
  - catégoricité, ...

Théorie des modèles

- Etude d'une structure mathématique du point de vue de sa théorie du premier ordre.
- Etude des modèles d'une théorie donnée :
  - catégoricité, ...
  - stabilité, ...
  - ...

Groupes et Théorie des modèles

Plusieurs contextes :

Groupes et Théorie des modèles

Plusieurs contextes :

- Groupes d'automorphismes d'une structure.

Groupes et Théorie des modèles

Plusieurs contextes :

- Groupes d'automorphismes d'une structure.
- Etude modèle-théorique d'un groupe : exemple des groupes libres.

Groupes et Théorie des modèles

Plusieurs contextes :

- Groupes d'automorphismes d'une structure.
- Etude modèle-théorique d'un groupe : exemple des groupes libres.
- Classification des groupes ayant certaines propriétés modèles-théoriques : groupes simples de rang de Morley fini et *conjecture de Cherlin-Zilber* :

Groupes et Théorie des modèles

Plusieurs contextes :

- Groupes d'automorphismes d'une structure.
- Etude modèle-théorique d'un groupe : exemple des groupes libres.
- Classification des groupes ayant certaines propriétés modèles-théoriques : groupes simples de rang de Morley fini et *conjecture de Cherlin-Zilber* :

  Un groupe simple de rang de Morley fini est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

Groupes et Théorie des modèles

Plusieurs contextes :

- Groupes d'automorphismes d'une structure.
- Etude modèle-théorique d'un groupe : exemple des groupes libres.
- Classification des groupes ayant certaines propriétés modèles-théoriques : groupes simples de rang de Morley fini et *conjecture de Cherlin-Zilber* :

  Un groupe simple de rang de Morley fini est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

- Etude "pure" : stabilité, superstabilité, simplicité, supersimplicité, ...
- ...