Rapport sur les principaux travaux

Valentin Ovsienko

Les thèmes de ma recherche sont liés à des domaines variés des mathématiques, comme la géométrie différentielle, l'algèbre et les systèmes intégrables. Mes objectifs et les principaux intérêts sont de chercher des liens entre les différents sujets, ainsi qu'entre les résultats anciens et nouveaux.

Contents

1 Géométrie, algèbre et intégrabilité

L'idée d'intégrabilité est l'un des concepts les plus remarquables en mathématiques. Une partie de mes travaux est consacrée à l'étude des structures géométriques et algèbriques liées d'une façon ou d'une autre aux systèmes intégrables.

1.1 Virasoro *vs* KdV, (b)KP et autres équations

Le groupe de Virasoro (trouvé par Gelfand et Fuchs) est une extension centrale du groupe des difféomorphismes du cercle.

Théorème 1. *La célèbre équation de Korteweg - de Vries (KdV):*

$$u_t = u_x u + c\, u_{xxx},$$

est le flot géodésique pour la L_2-métrique sur le groupe de Virasoro.

Ce résultat est assez connu maintenant, il a été publié dans un de mes premiers articles [1].

Ce travail est cité régulièrement (35 citations selon MathSciNet), divers auteurs ont généralisé notre observation pour d'autres équations (Camassa-Holm, Hunter-Saxton, etc.).

Vingt ans plus tard [2], nous avons appliqué la méthode au cas de dimension 2. Nous introduisons une nouvelle algèbre de Lie (associée au tore $\mathbb{T}^2$) qui admet deux extensions centrales: l'une est de type "Virasoro" et l'autre est de type "Kac-Moody".

Théorème 2. *Les équations*

$$u_{tx} = u_{xx}\, u_y - u_{xy}\, u_x + c\, u_{yy}, \qquad u_{tx} = u_{xy} u_y - u_{yy} u_x$$

où $u = u(x, y, t)$ et $c \in \mathbb{C}$ sont des flots géodésiques bi-hamiltoniens.

Ces équations sont connues par les physiciens comme "Universal Equations" (Martìnez Alonso–Shabat, 2004, Ferapontov, 2006, Pavlov, 2006,...).

Il se trouve que ce travail est le premier résultat de ce type connu en dimension 2. L'une des raisons est qu'un article de Zakharov-Konopelchenko (1984) contient un "no-go theorem" qui affirme la non-existence de systèmes bi-hamiltoniens en dimension 2+1; notre travail est donc un "contre-exemple" pour ce théorème... Notons, pour démystifier et rassurer l'éventuel lecteur que l'une des conditions (que Zakharov et Konopelchenko croyaient technique) n'est pas satisfaite dans notre cas.

Ce travail a rapidement généré une activité considérable, surtout parmi les jeunes physiciens-mathématiciens (cf. par exemple arXiv:0807.1294).

[1] *Korteweg-de Vries (super)-equation as an Euler equation*, Funct. Anal. Appl., **21:4** (1987) 329–331 (avec B. Khesin).

[2] *Looped cotangent Virasoro algebra and non-linear integrable systems in dimension* $2+1$, Comm. Math. Phys. **273** (2007), 357–378 (avec C. Roger); et *Bi-Hamiltonian nature of the equation* $u_{tx} = u_{xy}u_y - u_{yy}u_x$, Adv. in Pure and Appl. Math., Vol. 1, N1 (2009)

1.2 Pentagramme: géométrie et integrabilité

L'application pentagramme est une belle illustration du principe: les mathématiques sont indivisibles. La géométrie élémentaire ou la géométrie symplectique, la combinatoire ou les systèmes dynamique sont différentes façons de décrire la même chose.

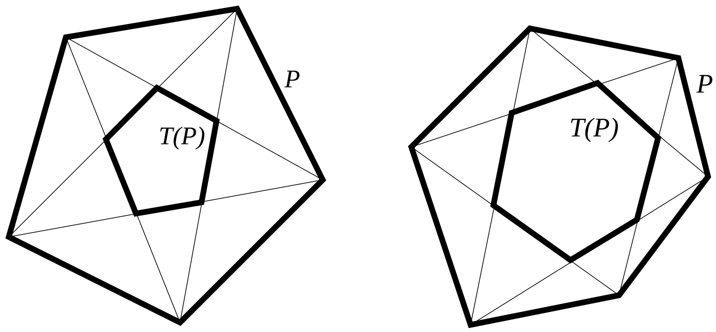

Figure 1: L'application pentagramme pour un pentagone et un hexagone

L'application pentagramme associe à un n-gone P un autre n-gone, $T(P)$, obtenu comme l'enveloppe convexe d'intersections des diagonales les plus courtes de P. Cette application a des propriétés surprenantes dans le cas $n = 5$. Si P est un pentagone, il existe une transformation projective qui lie P et $T(P)$. Ce résultat classique et les expériences numériques ont amené R. Schwartz à conjecturer l'intégrabilité de T. Nous démontrons cette conjecture[3].

Théorème 3. *L'application pentagramme est un système intégrable.*

L'espace des n-gones est présenté par l'espace d'équations en différences. Etant données deux suites n-périodiques (a_i), (b_i) avec $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{Z}$, telles que $a_{i+n} = a_i$, $b_{i+n} = b_i$, on associe à ces suites l'équation

$$V_{i+3} = a_i \, V_{i+2} + b_i \, V_{i+1} + V_i.$$

Cette interprétation définit un système de coordonnées globales $(a_i,\, b_i)$ sur l'espace des n-gones. Nous trouvons la formule explicite pour l'application T:

$$T^* a_i = a_{i+2} \prod_{k=1}^{m} \frac{1 + a_{i+3k+2} \, b_{i+3k+1}}{1 + a_{i-3k+2} \, b_{i-3k+1}}, \qquad T^* b_i = b_{i-1} \prod_{k=1}^{m} \frac{1 + a_{i-3k-2} \, b_{i-3k-1}}{1 + a_{i+3k-2} \, b_{i+3k-1}}$$

[3] *Pentagram map: a discrete integrable system*, soumis, (avec S. Tabachnikov et R. Schwartz); version corte publié dans Electron. Res. Announc. Math. Sci., **16** (2009), 1–8.

et définissons un crochet de Poisson T-invariant sur l'espace des n-gones:

$$\begin{aligned}
\{a_i, a_j\} &= \sum_{k=1}^{m} (\delta_{i,j+3k} - \delta_{i,j-3k})\, a_i\, a_j, \\
\{a_i, b_j\} &= 0, \\
\{b_i, b_j\} &= \sum_{k=1}^{m} (\delta_{i,j-3k} - \delta_{i,j+3k})\, b_i\, b_j.
\end{aligned}$$

Les crochets de ce type ont déjà été trouve dans le contexte des algèbres cluster, introduites au début des années 2000 par Fomin et Zelevinsky et qui connait un développement fulgurant.

Pour mieux comprendre le lien de l'application pentagramme aux systèmes intégrables connus, nous étudions sa limite continue.

Théorème 4. *La limite continue de l'application pentagramme est la célèbre équation de Boussinesq:*

$$\begin{aligned}
u_t &= w_x, \\
w_t &= -\frac{u\, u_x}{3} - \frac{u_{xxx}}{12},
\end{aligned}$$

où $u(t,x), w(t,x)$ sont des fonctions C^∞.

L'application pentagramme est un nouveau système intégrable. Son intérêt est un lien inattendu entre les domaines comme: géométrie projective, systémes intégrables, algèbres cluster.

1.3 Géométrie projective, orbites de Virasoro, feuilles symplectiques

Le lien entre l'algèbre de Virasoro et la géométrie projective différentielle a été compris par A.A. Kirillov et G. Segal en 1980. ll existe un lien remarquable entre la représentation coadjointe du groupe de Virasoro et la dérivée de Schwarz.

J'ai obtenu [4] (thèse doctorat, 1989) une généralisation du théorème de Kirillov-Segal. J'ai classifié les feuilles symplectiques du crochet d'Adler-Gelfand-Dickey sur l'espace des opérateurs différentiels d'ordre 3:

$$A = \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + u(x)\,\frac{d}{dx} + v(x),$$

où u et v sont des fonctions périodiques. Le crochet d'Adler-Gelfand-Dickey est une structure de Poisson très compliquée sur cet espace. J'ai remarqué que la situation se simplifie si on représente les opérateurs par les courbes dans $\mathbb{RP}^2$.

[4] *Classification of third-order linear differential equations and of symplectic leaves of the Gelfand-Dikii bracket*, Math. Notes **47** (1990), 465–470

Théorème 5. *Les feuilles symplectiques du crochet d'Adler-Gelfand-Dickey correspondent au classes d'homotopie des courbes non dégénérées dans* $\mathbb{RP}^2$.

J'ai en suite appliqué le théorème de John Little (1970) qui affirme l'existence de 3 classes d'homotopie des courbes fermées non dégénérées, cf. Figure 2.

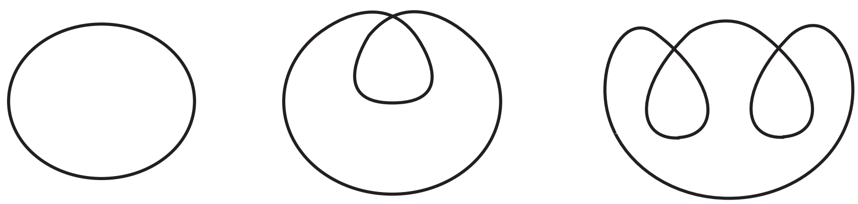

Figure 2: Trois classes de courbes correspondant aux trois feuilles symplectiques

Ce lien à la géométrie classique a été inattendu et crucial pour ce travail. Pour les opérateurs d'ordre quelconque cette classification a été ensuite généralisée [5].

Le lien entre les algèbres de dimension infinie (Virasoro, Adler-Gelfand-Dickey, etc.) et la géométrie des courbes, trouvée dans ma thèse, est à l'origine d'une direction de recherche exploitée pas la suite par plusieurs chercheurs (B. Khesin, B. et M. Shapiro, etc.). Ce point de vue est à la base de notre livre avec S. Tabachnikov.

2 Géométrie projective différentielle

Pour comprendre des nouvelles structures, il est nécessaire de travailler sur les sujets classiques.

2.1 Livre: "Projective Differential Geometry Old and New"

Le livre [6] contient une grande partie de mon travail de recherche.

Beaucoup de résultats de géométrie différentielle projective obtenus dans les années 30-50 ont été redécouverts plusieurs fois. Parmi les exemples on trouve le théorème de Kuiper (1953) de classification des structures projectives sur le cercle (redécouvert par Lazutkin-Pankratova, Kirillov, Segal), le théorème de Barner (1956) sur les courbes projectives (Arnold), etc. Un des buts de ce livre est de présenter les résultats classiques d'un point de vue contemporain; nous obtenons des résultats récents (d'Arnold, Ghys,...) en tant que corollaires.

[5] *Symplectic leaves of the Gelfand-Dikii bracket and homotopy classes of nondegenerate curves*, Funct. Anal. Appl., **24:1** (1990) 38–47, avec B. Khesin.

[6] "Projective Differential Geometry Old and New, From the Schwarzian Derivative to Cohomology of Diffeomorphism Groups", Cambridge Univ. Press, Cambridge Tracts in Math. **165**, 2005, (avec S. Tabachnikov).

Un autre but de ce livre est d'élaborer un point de vue "synthétique" sur le sujet. Par exemple, la dérivée de Schwarz est considérée comme un cocycle sur le groupe de difféomorphismes de S^1. Cela permet de relier cet objet classique à une théorie plus récente, celle de cohomologie de Gelfand-Fuchs. Nous discutons une large classe de problèmes de géométrie et de physique mathématique où l'apparition de la dérivée de Schwarz peut paraître mystérieuse.

Les démonstrations de certains théorèmes connus sont nouvelles et publiées pour la première fois dans ce livre:

- classification des orbites coadjointes de l'algèbre de Virasoro (Kirillov-Segal, 1980), p.23;
- classification à homotopie près des courbes non dégénérées dans S^2 (Little 1970), p.35;
- théorème sur les points d'inflexion des courbes strictement convexes dans $\mathbb{RP}^n$ (Barner 1956), p.82;
- l'équivalence des structures projectives homotopes à monodromie fixée, p.158.

2.2 La dérivée de Schwarz

La dérivée de Schwarz classique:

$$S\left(f(x)\right) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

est un objet fascinant, le lecteur est invité à consulter [7].

La recherche des analogues multi-dimensionnels de la dérivée de Schwarz est un sujet assez developpé. J'ai contribué à ce sujet [8]. Soit $f(x)$ une famille de $n \times n$-matrices symétriques avec une condition: $f'(x)$ est non dégénérée et définie positivement pour tout x. J'ai trouvé la formule suivante:

$$LS(f) = \sqrt{(f')^{-1}}\left(f''' - \frac{3}{2}\, f''\,(f')^{-1}\, f''\right)\sqrt{(f')^{-1}}^{\,t},$$

que j'ai appelé la dérivée de Schwarz lagrangienne. Cette expression définit un invariant d'une courbe dans la grassmanienne lagrangienne Λ_n. Une application de la dérivée de Schwarz lagrangienne aux systèmes intégrables a été trouvée par G. Marì Beffa (2007).

La propriété essentielle de la dérivée de Schwarz est le fait que c'est un *cocycle* sur le groupe de difféomorphismes. Nous montrons dans [9] que ce cocycle distingue l'espace des opérateurs différentiels par rapport à l'espace des champs de tenseurs. Il fournit une obstruction pour la quantification équivariante. Ce point de vue est developpé dans mon livre.

[7] *WHAT IS... the Schwarzian Derivative?"*, Notices AMS, **56**, N.1 (2009) (avec S. Tabachnikov).
[8] *Lagrange Schwarzian derivative and symplectic Sturm theory*, Ann. Fac. Sci. Toulouse (6) **2** (1993), 73–96.
[9] *Cohomology of the vector fields Lie algebra and modules of differential operators on a smooth manifold*, Compositio Math., **124** (2000) 95–110 (avec P. Lecomte).

D'autres généralisations de la dérivée de Schwarz à coéfficients dans les opérateurs différentiels sont trouvées dans [10]. Par exemple, l'application

$$f \mapsto S(f)\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\lambda+1}{2}S(f)'\frac{d}{dx} + \frac{\lambda(2\lambda+1)}{10}S(f)'' - \frac{\lambda(\lambda+3)}{5}S(f)^2,$$

où λ est un paramètre, est un 1-cocycle sur le groupe de difféomorphismes du cercle.

Ce sujet a donné une méthode efficace pour calculer certains espaces de cohomologie des groupes de difféomorphismes, voir notre livreChapitre 7.

2.3 Autour du théorème des 4 sommets

Le célèbre théorème des 4 sommets affirme que la courbure euclidienne d'une courbe convexe fermée dans $\mathbb{R}^2$ s'annule au moins 4 fois; son analogue affine dit que la courbure affine s'annule au moins 6 fois.

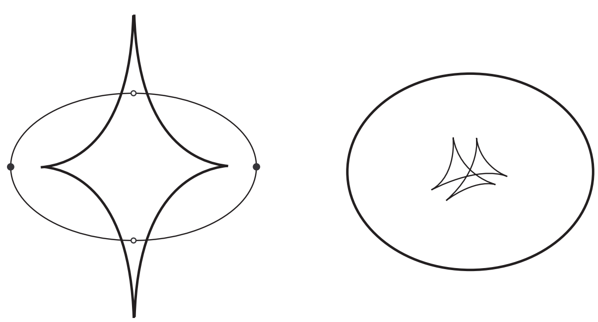

Figure 3: Les sommets des caustiques euclidienne et affine

Ces résultats classiques (Mukhopadhyaya 1909) et leurs multiples généralisations sont toujours d'actualité grâce aux travaux d'Arnold. L'aspect contemporain de la théorie est le lien à la géométrie symplectique (caustiques, front d'ondes).

E. Ghys a démontré un très joli analogue du théorème des 4 sommets: *la dérivée de Schwarz d'un difféomorphisme de* $\mathbb{RP}^1$ *s'annule au moins dans quatre points distincts.* Nous proposons[11] une démonstration différente de ce théorème et quelques applications à la géométrie des courbes legendriennes dans $\mathbb{RP}^3$.

Une version discrète de la théorie est proposée dans[12].

[10] *Three cocycles on* $\mathrm{Diff}(S^1)$ *generalizing the Schwarzian derivative*, IMRN 1998, no. 1, 25–39 (avec S. Bouarroudj).

[11] *Sturm theory, Ghys theorem on zeroes of the Schwarzian derivative and flattening of Legendrian curves*, Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), 297–307 (avec S. Tabachnikov).

[12] *Projective geometry of polygons and discrete 4-vertex and 6-vertex theorems*, Enseign. Math. **47** (2001), 3–19 (avec S. Tabachnikov).

2.4 Géométrie des surfaces dans $\mathbb{RP}^3$

La célèbre conjecture de Carathéodory affirme qu'une surface lisse convexe fermée dans $\mathbb{R}^3$ a au moins 2 points ombilicaux. L'histoire de cette conjecture est compliquée et controversée, on la suppose démontrée pour les surfaces analytiques réelles.

Nous considérons[13] une surface hyperbolique ("convexe-concave") fermée dans l'espace projectif. On cherche des points "quadratiques", où la surface peut avoir un contact d'ordre 3 avec

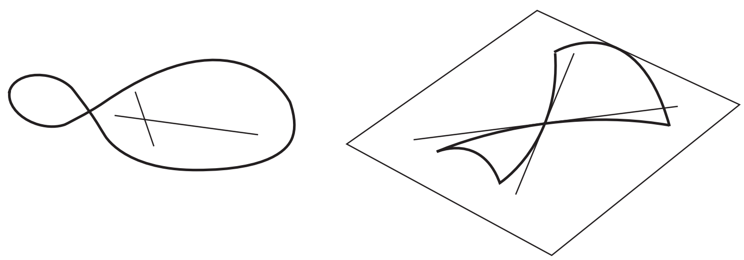

Figure 4: Surfaces hyperboliques

une quadrique (en un point générique l'ordre de contact est ≤ 2). Nous conjecturons qu'une surface hyperbolique dans $\mathbb{RP}^3$ a au moins 8 points quadratiques.

Notre conjecture géométrique s'exprime en termes analytiques par:

Conjecture 1. *Soit $f(x,y)$ une fonction périodique avec $(x,y) \in [0,1) \times [0,1)$, il existe au moins 8 points tels que*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_{xxx} + f_x & = & 0, \\ f_{yyy} + f_y & = & 0. \end{array} \right.$$

A noter que l'analogue unidimensionnel est le théorème de Hurwitz: *si $f(x)$ est une fonction périodique alors la fonction $f''' + f'$ s'annule au moins 4 fois sur la période.*

2.5 Structures projectives et formes de contact

La géométrie de contact est l'analogue de la géométrie symplectique dans le cas de la dimension impaire. La jolie "formule":

$$\frac{\text{affine}}{\text{projective}} = \frac{\text{symplectique}}{\text{contact}}$$

permet de comprendre le lien à la géométrie projective. Cette formule (ainsi que toute la résponsabilité) revient à Vladimir Igorevitch Arnold.

[13] *Hyperbolic Carathéodory conjecture*, Proc. Steklov Inst., **258** (2007), 178–193 (avec S. Tabachnikov).

Théorème 6. *L'existence d'une structure projective plate sur une variété simplement connexe de dimension $2n-1$ est équivalente à l'existence de $2n$ fonctions $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$ telles que la 1-forme*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} (f_i dg_i - g_i df_i)$$

soit une forme de contact.

Ce résultat[14] a plusieurs corollaires, par exemple: *deux structures projectives sur une variété compacte sont difféomorphes si et seulement si elles sont homotopes dans une classe des structures à monodromie fixée* (voir mon livre pour la démonstration).

2.6 Champs de contact

L'espace des fonctions sur une variété de contact est muni d'une structure d'algèbre de Lie, analogue au crochet de Poisson. Cette analogie n'est pas parfaite... Plusieurs auteurs repètent: "malheureusement, le crochet de contact ne satisfait pas l'identité de Leibniz". De plus, la notion de l'hamiltonien de contact n'est définie que si l'on fixe une forme de contact particulière.

Mon article [15] contient la notion de hamiltonien de contact intrinsèque: *un champ de vecteurs de contact sur une variété de contact de dimension $2n+1$ correspond à une densité de poids $-\frac{1}{n+1}$*, et non à une fonction. Le crochet de Poisson coïncide alors avec la dérivée de Lie:

$$\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\} = L_{X_{\mathcal{H}_1}}(\mathcal{H}_2),$$

où $X_{\mathcal{H}}$ est le champ de contact avec hamiltonien $\mathcal{H}$ vu comme densité. L'espace de toutes les densités est une algèbre de Poisson, en particulier, l'identité de Leibniz est satisfaite.

3 Quantification équivariante

Nous avons crée ce sujet avec Christian Duval et Pierre Lecomte. La "quantification" est un isomorphisme entre l'espace des opérateurs différentiels sur une variété M et l'espace des polynômes sur T^*M. On considère l'action d'un groupe de Lie G sur M et on cherche l'isomorphisme qui commute avec l'action de G.

Il s'agit donc de l'étude de l'espace des opérateurs différentiels, vu comme module sur le groupe des difféomorphismes de M. C'est un problème naturel de la géométrie différentielle qui n'a pratiquement pas été consideré.

[14] *Projective structures and contact forms*, Funct. Anal. Appl. **28** (1994), 187–197.
[15] *Vector fields in the presence of a contact structure*, Enseign. Math., **52** (2006), 215–229.

3.1 Modules des opérateurs différentiels

Tout a commencé dans[16]. Soient M une variété lisse, et $\mathcal{D}(M)$ l'espace des opérateurs différentiels sur $C^\infty(M)$. Cet espace a une structure de module, $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(M)$, sur le groupe de difféomorphismes, $\mathrm{Diff}(M)$ qui dépend de deux paramètres réels λ, μ. Soit $\mathcal{F}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, l'espace de λ-densités sur M, i.e., des sections du fibré en droites $|\wedge^n T^*M|^\lambda$, où $n = \dim M$. L'espace $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(M)$ correspond aux opérateurs différentiels linéaires de $\mathcal{F}_\lambda$ à $\mathcal{F}_\mu$.

Nous classifions d'abord les $\mathrm{Diff}(M)$-modules, $\mathcal{D}^2_{\lambda,\lambda}(M)$, des opérateurs différentiels d'ordre 2 dans le cas $\lambda = \mu$.

Théorème 7. *Les modules $\mathcal{D}^2_{\lambda,\lambda}(M)$ sont isomorphes entre eux, sauf pour les valeurs particulières $\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1$.*

A noter que le cas $\dim M = 1$ est spécial, nous avons obtenu une classification complète[17]. Le problème a été par la suite résolu dans des travaux de P. Lecomte et P. Mathonet.

3.2 Quantification et géométrie conforme/projective

L'application de quantification est une application linéaire:

$$\mathcal{Q} : \mathrm{Pol}(T^*M) \to \mathcal{D}_{\lambda,\mu}(M),$$

Nous considérons un groupe de Lie G qui agit sur M et cherchons les applications de quantification G-équivariantes. Parmi les cas les plus intéressants on trouve:

$$G = \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R}), \quad \text{et} \quad G = \mathrm{SO}(p+1, q+1), \quad \text{où} \quad n = p + q = \dim M;$$

on dit que M est munie d'une structure projective ou conforme plate. Nous démontrons[18] [19]

Théorème 8. *La quantification projectivement/conformément invariante existe et est unique pour presque tout λ, μ.*

On trouve des valeurs *résonnantes* de $\delta = \mu - \lambda$ pour lesquelles les espaces des opérateurs et des symboles ne sont pas G-isomorphes. Ces travaux ont été beaucoup cités (45 et 28 citations respectivement selon MathSciNet).

---

[16] *Space of second order linear differential operators as a module over the Lie algebra of vector fields*, Adv. in Math. **132** (1997), 316–333 (avec C. Duval).

[17] *Modules of differential operators on the line*, Funct. Anal. Appl. **35** (2001), 13–18 (avec H. Gargoubi).

[18] *Projectively equivariant symbol calculus*, Lett. Math. Phys. **49** (1999), 173–196 (avec P. Lecomte).

[19] *Conformally equivariant quantization: existence and uniqueness*, Ann. Inst. Fourier. **49** (1999), 1999-2029 (avec C. Duval et P. Lecomte).

Exemple. Dans le cas d'opérateurs d'ordre 2 sur une variété (pseudo-)riemannienne (M, g), nous obtenons[20] une unique quantification qui ne dépend que de la classe conforme $[\mathrm{g}]$. Pour l'hamiltonien du flot géodésique, dans le cas $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, on a

$$\mathcal{Q}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(H) = -\hbar^2 \left(\Delta - \frac{n^2}{4(n-1)(n+2)} \, R \right),$$

où Δ est l'opérateur de Laplace et R la courbure scalaire. Les valeurs résonnantes de $\delta = \mu - \lambda$, sont

δ	$\frac{2}{n}$	$\frac{n+2}{2n}$	1	$\frac{n+1}{n}$	$\frac{n+2}{n}$
λ	$\frac{n-2}{2n}$	$0, \frac{n-2}{2n}$	0	$0, -\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n}$
μ	$\frac{n+2}{2n}$	$\frac{n+2}{2n}, 1$	1	$\frac{n+1}{n}, 1$	$\frac{n+1}{n}$

Dans chaque cas, il y a des valeurs de (λ, μ) pour lesquelles la quantification existe; on retrouve pour le premier de ces cas résonnants l'opérateur de Yamabe-Laplace.

Le cas des supervariétés est traité dans [21]. Notre travail développe entre autres un article bien connu de Cohen-Manin-Zagier, "Automorphic pseudodifferential operators".

3.3 Fonction hypergéométrique non commutative

Il est remarquable qu'il existe une formule explicite de la quantification projectivement invariante[22]. Dans le cas le plus intéressant de demi-densités la quantification est donnée par la fonction hypergéométrique confluente:

$$\mathcal{Q}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = F \left(\begin{array}{c|c} 2\mathrm{E} & \frac{i\hbar \mathrm{D}}{4} \\ \mathrm{E} & \end{array} \right)$$

où D est la divergence et E l'opérateur d'Euler.

Cette formule est assez compliquée, la quantification est donnée par une fonction hypergéométrique "non commutative" (son argument et les paramètres sont des opérateurs différentiels). L'importance de cette formule est la possibilité de l'appliquer à des systèmes dynamiques concrets. Une application de notre formule à la quantification des paires de Lax (pour des systèmes intégrables) est proposée très récemment par E. Ferapontov.

Dans la cas conforme, la formule explicite de la quantification n'existe que dans des cas particuliers.

---

[20] *Conformally equivariant quantum Hamiltonians*, Selecta Math., NS., **7** (2001) 291–320 (avec C. Duval).

[21] *Differential operators on supercercle: conformally equivariant quantization and symbol calculus*, Lett. Math. Phys. **79** (2007), 51–65 (avec H. Gargoubi et N. Mellouli).

[22] *Projectively equivariant quantization and symbol calculus: noncommutative hypergeometric function*, Lett. Math. Phys., **57** (2001) 61–67 (avec C. Duval).

4 Cohomologie des algèbres de Lie de dimension infinie

La cohomologie représente la technique de base nécessaire pour toute ma recherche. Je présente quelques résultats dans cette direction.

4.1 Modules des opérateurs différentiels et cohomologie

Les modules des opérateurs différentiels peuvent être vus comme *déformations* du module des symboles, i.e., des champs de tenseurs symétriques contravariants. Ce point de vue relie le sujet au cohomologie que généralise la *cohomologie de Gelfand-Fuchs.*

La classe la plus intéressante de cohomologie correspond à la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}^{k-2}_{\frac{1}{2}}(M) \longrightarrow \mathcal{D}^{k}_{\frac{1}{2}}(M) \longrightarrow \mathcal{S}_k \oplus \mathcal{S}_{k-1} \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{S}_k$ est l'espace des champs des tenseurs symétriques contravariants de degré k. Cette classe de cohomologie est liée au cocycle de Moyal-Vey de la quantification par déformations.

Nous calculons[23] le premier espace de cohomologie de $\mathrm{Vect}(M)$ à coefficients dans l'espace des opérateurs $\mathrm{Hom}(\mathcal{S}_k, \mathcal{S}_\ell)$. Cette cohomologie mesure la différence entre $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(M)$ et l'espace des champs de tenseurs associé.

Théorème 9. *Pour* $\dim M \geq 2$ *on a*

$$H^1(\mathrm{Vect}(M); \mathrm{Hom}(\mathcal{S}_k, \mathcal{S}_\ell)) = \begin{cases} \mathbb{R} & , \quad k-\ell = 1, 2 \\ \mathbb{R} \oplus H^1_{\mathrm{DR}}(M) & , \quad k-\ell = 0 \\ 0 & , \quad \textit{sinon} \end{cases}$$

La cohomologie analogue dans le cas $\dim M = 1$, est déterminée dans[24].

Les classes de cohomologie qu'on obtient sont liées, en même temps, à la géométrie différentielle projective (la dérivée de Schwarz) et à la quantification par déformations (le cocycle de Moyal-Vey).

4.2 Extensions du groupe de Virasoro

Les algèbres de Lie des champs de vecteurs sur une variété de dimension ≥ 2 n'ont pas d'extension centrale non triviale. C'est la raison pour laquelle le problème de trouver des généralisations multi-dimensionnelles de l'algèbre de Virasoro est si difficile. Jai défini[25] une série d'extensions de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de contact sur la sphère S^{4k+1}. Cette série d'extensions

[23] *Cohomology of the vector fields Lie algebra and modules of differential operators on a smooth manifold*, Compositio Math., **124** (2000) 95–110 (avec P. Lecomte).

[24] *Three cocycles on* $\mathrm{Diff}(S^1)$ *generalizing the Schwarzian derivative*, Internat. Math. Res. Notices 1998, no. 1, 25–39 (avec S. Bouarroudj).

[25] *Contact Analogues of the Virasoro Algebra*, Func. Anal. Appl. **24** (1990), 54–63.

peut être vue comme analogue de la quantification par déformations sur une variété de contact. A noter que les algèbres de Lie des champs de vecteurs de contact sont rigides (Lichnerowicz).

J'ai également travaillé dans le cas plus traditionnel de dimension 1. Nous classons [26] les extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_\lambda \longrightarrow \widehat{\mathrm{Vir}} \longrightarrow \mathrm{Vir} \longrightarrow 0,$$

du groupe de Virasoro par les modules de λ-densités sur S^1. Le résultat est le suivant.

Théorème 10. *Il existe quatre extensions centrales non triviales: pour $\lambda = 1, 2, 5, 7$.*

Nous construisons donc quatre groupes de Lie de dimension infinie, pour $\lambda = 1, 2, 5, 7$, qui généralisent le groupe Vir. Les 2-cocycles qui correspondent à $\lambda = 5$ et 7 sont particulièrement beaux et liés à la dérivée de Schwarz. Par exemple,

$$B(\varphi, \psi) = \begin{vmatrix} \psi^* S(\varphi) & S(\psi) \\ (\psi^* S(\varphi))' & (S(\psi))' \end{vmatrix} (dx)^5,$$

où $S(\varphi)$ est la dérivée de Schwarz d'un difféomorphisme φ.

5 Algèbres commutatives graduées

Je commence par un algèbre classique des quaternions $\mathbb{H}$. Que peut-on dire de nouveau sur cette algèbre?

5.1 L'algèbre des quaternions est commutative

Une observation amusante[27] permet de voir $\mathbb{H}$ comme algèbre commutative (!) En effet, pour les générateurs standards de $\mathbb{H}$, on définit le "degré triple":

$$\begin{array}{rcl} \sigma(1) & = & (0,0,0), \\ \sigma(i) & = & (0,1,1), \\ \sigma(j) & = & (1,0,1), \\ \sigma(k) & = & (1,1,0), \end{array}$$

L'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$ est alors $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-commutative, i.e.,

$$p \cdot q = (-1)^{\langle \sigma(p), \sigma(q) \rangle} \, q \cdot p,$$

[26] *Generalizations of Virasoro group and Virasoro algebra through extensions by modules of tensor-densities on* S^1, Indag. Math. (N.S.) **9** (1998), 277–288 (avec C. Roger).

[27] *Well, Papa, can you multiply triplets?*, Math. Intelligencer **31**:4 (2009), 1–2, avec S. Morier-Genoud.

pout tous éléments homogènes $p, q \in \mathbb{H}$, et où $\langle\, , \rangle$ est le produit scalaire. Par exemple, $\langle\sigma(i), \sigma(j)\rangle = 1$, alors i, j anticommutent, mais $\langle\sigma(i), \sigma(i)\rangle = 2$, alors le produit de i avec lui-même est commutatif sans contradiction. A noter que notre graduation est un raffinement d'une $(\mathbb{Z}_2)^2$-graduation sur $\mathbb{H}$ connue depuis 1995 (Lychagin).

L'importance de cette observation est due au fait que beaucoup de classes d'algèbres sont stables sous le produit tensoriel par une algèbre commutative. Elle permet de définir la notion de "quaternionisation" (similaire à la complexification) $\mathcal{A} \mapsto \mathbb{H} \otimes \mathcal{A}$.

La théorie d'algèbres graduées commutatives se devéloppe activement dans des multiples travaux (Bahturin, Montgomery, Albuquerque, Majid, Elduque,...). Nous démontrons dans[28] le résultat suivant.

Théorème 11. *Toute algèbre graduée commutative associative simple (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$) est isomorphe à une algèbre de Clifford.*

A noter que les octonions ne sont pas dans cette classification. Il existe cependant une façon élégante de comprendre cette algèbre comme algèbre graduée-associative (Albuquerque-Majid), voir aussi mes projets.

5.2 Algèbres $\mathbb{Z}_2$-graduées

J'ai trouvé dans le contexte de géométrie symplectique [29] une classe d'algèbres $\mathbb{Z}_2$-graduées commutatives non associatives.

L'exemple le plus simple est l'algèbre de dimension $3 = 1 + 2$ (que j'ai baptisée asl_2). Les éléments de base sont $\{\varepsilon;\, a, b\}$, où ε est pair et a, b impairs. Les relations sont:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon \\ &\varepsilon \cdot a = \tfrac{1}{2}\, a, \quad \varepsilon \cdot b = \tfrac{1}{2}\, b, \\ &a \cdot b = \varepsilon. \end{aligned}$$

Il s'est averé que cette algèbre est connue comme "tiny Kaplansky superalgebra", K_3. Elle est complètement caractérisée par ses relations à la superalgèbre de Lie la plus simple $\mathrm{osp}(1|2)$.

Théorème 12. *L'algèbre K_3 est l'unique algèbre graduée commutative telle que son algèbre des dérivations est isomorphe à* $\mathrm{osp}(1|2)$.

Un exemple en dimension infinie est l'algèbre "commutative-conforme" $\mathcal{A}K(1)$. La partie paire est engendrée par les éléments ε_n, avec $n \in \mathbb{Z}$; la partie impaire est engendrée par les

[28] *Simple graded commutative algebras*, avec S. Morier-Genoud, à paraître dans J. of Algebra.
[29] *Lie antialgebras: prémices*, soumis.

éléments a_i, avec $i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Les relations sont:

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon_n \cdot \varepsilon_m & = & \varepsilon_{n+m}, \\ \varepsilon_n \cdot a_i & = & \frac{1}{2}\, a_{n+i}, \\ a_i \cdot a_i & = & (i-j)\, \varepsilon_{i+j}, \end{array}$$

Cette algèbre simple est liée à la superalgèbre conforme de Neveu-Schwarz.

Mon article étudie des propriétés générales des antialgèbres de Lie; il contient également divers résultats de classification. Mais, le plus important est que ce travail propose plus de problèmes ouverts que des réponses. Plusieurs collègues (P. Lecomte, C. Conley, K. Bering, S. Morier-Genoud,...) travaillent actuellement sur ce sujet, voir arXiv:0910.2220.