MAT 11a : Correction du contrôle continu 1

Exercice 1

1. – La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, donc f est définie sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ et dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$. Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}.$$

   – La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour connaître le domaine de définition et de dérivabilité de g, on doit donc résoudre l'inéquation $x^2 - 3x + 2 > 0$. C'est un trinôme de discriminant $\Delta = 1$, et donc de racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. Le signe du coefficient de x^2 étant strictement positif, on en déduit que $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$. Donc le domaine de définition et de dérivabilité de g est $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$. Sa dérivée est

$$g'(x) = \frac{2x-3}{x^2 - 3x + 2}.$$

   – La fonction $x \mapsto \cos(x)$ étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, on en déduit que le domaine de définition et de dérivabilité de h est $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. De plus, la dérivée de h est

$$h'(x) = -\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \sin(\frac{x+1}{x+2}) = -\frac{1}{(x+2)^2} \sin(\frac{x+1}{x+2}).$$

2. On considère la fonction $f(x, y, z) = y + 3x^2 e^{xyz}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 6xe^{xyz} + 3x^2yze^{xyz} = 3xe^{xyz}(2 + xyz)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 1 + 3x^3ze^{xyz}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3x^3ye^{xyz}$$

Exercice 2

On considère la fonction $f(x) = \arctan(\frac{1+x}{x})$.

– **Domaine de définition et de dérivabilité :** la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Il suffit donc de s'assurer que le quotient est bien défini, c'est-à-dire que $x \neq 0$. Donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

– **Calcul de la dérivée :** la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, on en déduit par la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions que :

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{1 + (\frac{1+x}{x})^2} = \frac{-1}{x^2 + (1+x)^2} = \frac{-1}{2x^2 + 2x + 1}$$

La forme $\frac{-1}{x^2+(1+x)^2}$ nous donne immédiatement que la dérivée est toujours négative.

– **Calcul des limites en $\pm\infty$:** en remarquant que $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1+x}{x} = 1$ on obtient que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

– **Calcul des limites en 0 :** par composition, on obtient :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

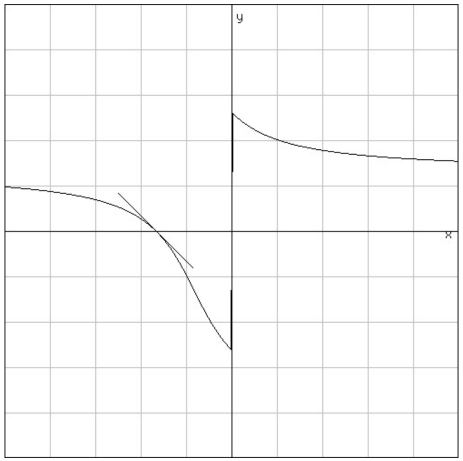
– **Tableau de variations :** on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	
f	$\frac{\pi}{4}$	↘ $-\frac{\pi}{2}$	‖	$\frac{\pi}{2}$ ↘	$\frac{\pi}{4}$

- **Calcul de la tangente en -1 :** l'équation de la tangente en -1 est donnée par :

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = -x - 1$$

- **Graphe :**



Exercice 3

1. – On note $P(n)$ la proposition : « $1+3+\dots(2n-1) = n^2$ ».
   - **Initialisation :** $P(1)$: « $1 = 1^2$ » est vraie.
   - **Hérédité :** on montre que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ aussi. Or $P(n)$ est vraie par hypothèse de récurrence :

   $$1+3+\dots(2n-1) = n^2.$$

   On ajoute de chaque coté de l'égalité le terme suivant de la somme, c'est-à-dire $2(n+1)-1 = 2n+1$. On obtient alors :

   $$1+3+\dots(2n-1)+(2n+1) = n^2+2n+1$$

   On reconnait à droite le développement de $(n+1)^2$, ce qui permet d'obtenir $P(n+1)$.
   - **Conclusion :** on a montré que pour tout $n \geq 1$, $P(n)$ était vraie.
2. On cherche a résoudre $(x+1)(x^2+x-5) < (x+1)$:

$$\begin{aligned} &(x+1)(x^2+x-5) < (x+1) \\ \Leftrightarrow &(x+1)(x^2+x-5) - (x+1) < 0 \\ \Leftrightarrow &(x+1)(x^2+x-6) < 0 \end{aligned}$$

Il faut alors étudier le signe de l'expression obtenue. Pour cela, on étudie le signe de x^2+x-6. C'est un trinôme de discriminant $\Delta = 25$, et donc de racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$. On obtient le tableau de signes suivant :

<table>
<tr><td>x</td><td colspan="4">$-\infty$ -3 -1 2 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$x+1$</td><td colspan="2">$-$</td><td colspan="2">$+$</td></tr>
<tr><td>x^2+x-6</td><td>$+$</td><td colspan="2">$-$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td></td><td>$-$</td><td>$+$</td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr>
</table>

On obtient donc comme solution l'ensemble $]-\infty,-3[\cup]-1,2[$.

Exercice 4

On considère la propriété : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

1. Une fonction vérifie cette propriété si et seulement si elle est croissante.
2. La négation de la propriété est : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$ et $f(x) > f(y)$. On peut noter que $x \leq y$ peut être remplacer par $x < y$.

Exercice 5

1. On considère la fonction $f(x) = e^{\sin(x)}$. f étant dérivable en 0, la formule du taux d'accroissement donne :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{sin(x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$$

Or $f'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ d'où $f'(0) = 1$. On en conclut donc que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{sin(x)}-1}{x} = 1$$

2. Pour que la fonction g soit continue en 0, il faut et il suffit que la limite en 0 de la formule donnée pour $x \neq 0$ coïncide avec la valeur donnée en 0. Or on a montré que c'était le cas dans la première partie de l'exercice, g est donc continue.