MAT 11a : Corrigé du contrôle continu 3

Question de cours

Les primitives sont, à une constante près :

$$F(x) = \ln(|x|),\ G(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ H(x) = x(\ln(x) - 1).$$

Exercice 1

1) D'après le cours, on a $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. Donc :

$$\int_0^x \cos^2(t)dt = \int_0^x \frac{1+\cos(2t)}{2} = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$$

est une primitive de f.

2) On calcule en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)^2$ par IPP :

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t)^2 &= \left[t\ln(t)^2\right]_1^x - 2\int_1^x \ln(t) = x\ln(x)^2 - 2\left[t(\ln(t)-1)\right]_1^x \\ &= x\ln(x)^2 - 2x(\ln(x)-1) + 2\end{aligned}$$

donc une primitive de g est $G(x) = x\ln(x)^2 - 2x(\ln(x) - 1)$

3) On a $h(x) = \frac{1}{2}\left[2x(x^2+1)^3\right]$ donc une primitive est $H(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]$.

Exercice 2

1) On a

$$\begin{aligned} &\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 3}{x(1+x^2)} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{1+x^2} \text{ pour tout } x \neq 0. \\ \Leftrightarrow\ &\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 3}{x(1+x^2)} = \frac{ax^3 + bx^2 + (a+c)x + b}{x(1+x^2)} \text{ pour tout } x \neq 0. \\ \Leftrightarrow\ &x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = ax^3 + bx^2 + (a+c)x + b \text{ pour tout } x \neq 0. \\ \Leftrightarrow\ &a = 1,\ b = -3,\ c = 2. \end{aligned}$$

2) Une primitive de $f(x) = \frac{x^3-3x^2+3x-3}{x(1+x^2)} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{1+x^2}$ sur $]-\infty, 0[$ est donc

$$F(x) = x - 3\ln(-x) + 2\arctan(x).$$

Exercice 3

1) On pose $x(t) = \sqrt(t)$ (donc $x'(t) = \frac{1}{2\sqrt(t)}$) et $f(x) = 2x\cos(x)$. Par la formule de changement de variables, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{t})dt = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{f(x(t))}{2x(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} f(x(t))x'(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(x)dx.$$

2) On utilise une IPP en posant $u'(x) = \cos(x)$ et $v(x) = x$:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx = [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1.$$

3) On a :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{t})dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx = 2\left(\frac{\pi}{2} + 1\right).$$

Exercice 4

1) a) On considère le trinôme $x^2 - 2x + 2$. Son discriminant est $\Delta = -4 < 0$, donc d'après le cours, les solutions sont

$$x_1 = \frac{2 + i\sqrt{4}}{2} = 1 + i \text{ et } x_2 = \frac{2 - i\sqrt{4}}{2} = 1 - i.$$

Par conséquent, d'après le cours, les solutions de (E1) sont les fonctions de la forme :

$$u(t) = e^t\left(K_1\cos(t) + K_2\sin(t)\right),\ K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

b) La solution de (E1) qui vaut 2 en $t = 0$ et $e^{\frac{\pi}{2}}$ en $t = \frac{pi}{2}$ est

$$u_1(t) = e^t\left(2\cos(t) + \sin(t)\right)$$

2) a) L'équation homogène associée est

$$u' - 2tu = 0. \tag{H}$$

D'après le cours, les solutions de (H) sont les fonctions de la forme $u(t) = Ke^{A(t)}$, où A est une primitive de $t \mapsto 2t$. Par conséquent ce sont les

$$u(t) = Ke^{t^2},\ K \in \mathbb{R}.$$

b) Dérivons $u_0(t) = ae^t$. On trouve $u_0'(t) = ae^t$. Donc

$$u_0'(t) - 2tu_0(t) + (2t-1)e^t = 0 \Leftrightarrow te^t(2-2a) + e^t(a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

On a donc $u_0(t) = e^t$ qui est solution particulière de (E2).

c) D'après le cours, les solutions de (E2) sont les fonctions de la forme :

$$u(t) = Ke^{t^2} + e^t,\ K \in \mathbb{R}.$$

d) On cherche u_1 de la forme ci-dessus telle $u_1(0) = 2$, ce qui équivaut à $Ke^0 + e^0 = 2$, donc $K = 1$. La solution de (E2) qui vaut 2 en $t = 0$ est donc :

$$u_1(t) = e^{t^2} + e^t.$$