**MATH111 A/B**
**CHAPITRE 3 : CALCUL MATRICIEL**

## 1. Exemples de systèmes linéaires

1.1. **Premier exemple.** Commençons par un exemple qu'on espère rafraichissant. Un glacier sert deux types de coupes, la coupe Aragon avec deux boules de citron et une de vanille et la coupe Castille avec trois boules de vanille. Dans un bac de 1l il peut faire 10 boules.

(1) Les clients commandent 20 coupes Aragon et 10 coupes Castille. De combien de bacs de chaque espèce le glacier doit-il disposer?
(2) Le glacier dipose de 10 bacs de vanille et 8 de citron. Combien de coupes Aragon et combien de coupes Castille peut il servir en utilisant toute la glace dont il dispose?

*Solution de la question (1)* Appelons $V$ le nombre de boules de glace vanille et $C$ le nombre de glaces citron dont le glacier doit disposer. On a:

$$\begin{aligned} V &= 1.20 + 3.10 = 50 \\ C &= 2.20 + 0.10 = 20 \end{aligned}$$

Le glacier doit donc disposer de 5 bacs de glace à la vanille et de 2 au citron.

*Solution de la question (2)* Appelons $V$ le nombre de boules de glace vanille et $C$ le nombre de glaces citron dont le glacier doit disposer pour préparer $a$ coupes Aragon et $c$ coupes Castille. On a la relation:

$$\begin{aligned} V &= a + 3c \\ C &= 2a \end{aligned}$$

De sorte qu'avec $V = 100$ et $C = 80$, $a$ et $c$ doivent satisfaire le système $(S)$ de deux équations:

$$\begin{aligned} a + 3c &= 100 \\ 2a &= 80 \end{aligned}$$

La seconde ligne fournit $a = 40$, puis en remplaçant $a$ par sa valeur dans la première, il vient $c = 20$. Donc le glacier peut préparer 40 glaces Aragon et 20 Castille.

Donnons un second exemple, d'origine géométrique. Dans le plan rapporté à un repère cartésien déterminer l'intersection de la droite verticale $D_1$ passant par le point de coordonnées $(40, 0)$ et de la droite $D_2$ de vecteur normal $(1, 3)$ passant par le point de coordonnées $(100, 0)$.

*Solution* $D_1$ a pour équation $x = 40$, $D_2$ a pour équation $x + 3y = 100$.
Donc le point cherché - qui est uniquement déterminé puisque les deux droites ne sont pas paralèlles - est le point dont les coordonnées $(x, y)$ vérifient le système $(S')$:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 100 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Ainsi $(x, y) = (40, 20)$.

On remarquera que sous la substitution du nom des inconnues $x \to a$ $y \to c$ le système $(S')$ devient un système équivalent au système $(S)$ alors que l'un est d'origine géométrique et l'autre gastronomique.

Les systèmes $(S)$ et $(S')$ sont des exemples de systèmes linéaires (inhomogènes). Comme ce type de système d'équations intervient dans de nombreuses questions scientifiques en physique (ondes, phénomènes oscillatoires, mécanique quantique), chimie, biologie, mécanique mais aussi en statistique et dans des modèles économiques, la branche des mathématiques (appelée algèbre linéaire) qui les étudie est très développée et son outil principal est le calcul matriciel.

1.2. **Systèmes linéaires** $1 \times 1$. Un autre exemple plus simple de système linéaire est l'équation $(E_{a,b})$ $a.x = b$ où $a$ et $b$ sont deux réels. La résolution de ce système est élémentaire, mais il convient de distinguer 3 cas:

*Cas 1:* On suppose $a \neq 0$. La solution de $(E_{a,b})$ est l'unique réel $x$ qui satisfait la relation $ax = b$ c'est à dire $x = \frac{b}{a}$.

*Cas 2 i* On suppose $a = 0$, $b \neq 0$. Alors, la relation $ax = b$ devient $b = 0$ et aucun réel $x$ ne peut la satisfaire. L'espace des solutions de $(E_{0,b})$ est donc vide.

*Cas 2 i* On suppose $a = b = 0$. L'équation devient alors $0 = 0$ et est satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'espace des solutions de $(E_{0,b})$ est donc $\mathbb{R}$ tout entier.

Cet exemple est trivial mais quand le nombre d'inconnues dans le système d'équations augmente de nouveaux phénomènes entrent en jeu.

1.3. **Systèmes linéaires** $2 \times 2$. Considérons le cas d'un système linéaire (inhomogène) de deux equations de deux variables, c'est à dire d'un système d'équations $S_{2,2}(a, b, c, d; e, f)$ de la forme:

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f. \end{aligned}$$

$a, b, c, d, e, f$ sont des réels. Si $e = f = 0$, le système est dit homogène, inhomogène sinon. Rappelons par deux exemples la méthode de résolution de tels systèmes, dite du pivot de Gauss:

Soit à résoudre $(T)$:

$$\begin{aligned} x+2y &= 1 \qquad (L_1) \\ x+y &= 2 \qquad (L_2). \end{aligned}$$

La méthode de résolution consiste à produire un système équivalent dont l'une des deux équations ne concerne qu'une seule des deux variables. Pour ce faire on remplace une des deux lignes du système en additionnant un multiple judicieusement choisi de l'autre ligne de sorte à faire disparaitre une des deux inconnues. Le terme contenant l'inconnue dans la ligne que l'on multiplie puis additionne à l'autre s'appelle le pivot. Le choix de pivot évident est de prendre le $x$ de la première ligne. Mais comme d'autres choix sont possibles, on choisit le terme en $y$ de la seconde ligne. Ainsi le système équivalent est le système d'équations formé de $L'_1 = -L_1 + 2L_2$ et $L'_2 = L_2$, soit:

$$\begin{aligned} x &= 3 \qquad (L'_1) \\ x+y &= 2 \qquad (L'_2). \end{aligned}$$

La première ligne fournit $x = 3$ et on obtient $y$ en remplaçant $x$ par sa valeur. La solution de $(T)$, qui est unique, est donc le couple $(x, y) = (3, -1)$.

On pourrait appliquer le même traitement au système $S_{2,2}(a, b, c, d; e, f)$. Le pivot pourra être choisi comme le terme $ax$ si $a \neq 0$, $by$ si $b \neq 0$, etc...

Donnons un autre exemple. Soit à résoudre le système $(U)$:

$$\begin{aligned} x+2y &= 1 \\ 2x+4y &= 1. \end{aligned}$$

On choisit comme pivot le $x$ de la première ligne. Ici la méthode du pivot de Gauss marche presque trop bien puisque ce choix élimine aussi $y$! En effet on obtient le système équivalent:

$$\begin{aligned} x+2y &= 1 \\ 0.x+0.y &= -1. \end{aligned}$$

Sa seconde ligne équivaut a $0 = -1$ une relation qui ne saurait être satisfaite! Donc, le système $(U)$ n'a pas de solution.

Notez que si on modiifie la seconde ligne de $(U)$ en considérant $(U')$:

$$\begin{aligned} x+2y &= 1 \\ 2x+4y &= 2, \end{aligned}$$

La seconde ligne est le double de la première. Cette seconde ligne est donc redondante et $(U')$ est équivalent à $x+2y = 1$ et a comme ensemble de solutions la droite passant par $(1, 0)$ de vecteur normal $(1, 2)$.

Plus généralement si d'une part $a$ et $b$ et d'autre part $c$ et $d$ ne sont pas tous les deux nuls le système $S_{2,2}(a, b, c, d; e, f)$ a pour solution les couples $(x, y)$ repésentant en coordonnées cartésiennnes les points de l'intersection de la droite $D_1$ d'équation $ax+by=e$ avec la droite $D_2$ d'équation $cx+dy=f$. Cette intersection est un seul point si $D_1$ et $D_2$ ne sont pas paralèlles, vide si elles sont paralèlles non confondues et la droite $D_1$ si celle ci est confondue avec $D_2$, ce qui est une façon géométrique de comprendre pourquoi l'espace des solutions de $(T)$ n'a qu'un élément, celui de $(U)$ est vide et celui de $(U')$ une droite.

## 2. Vecteurs et Matrices

### 2.1. **Vecteurs.**

2.1.1. *Motivation, défintion.* Les couples $(x,y)$ de nombres réels sont des éléments de l'ensemble qu'on appelle $\mathbb{R}^2$. Comme chaque couple $(x,y)$ est l'expression en coordonées cartésiennes d'un vecteur du plan rapporté à un repère cartésien. On appelle les éléments de $\mathbb{R}^2$ des vecteurs à deux composantes.

Les triplets $(x,y,z)$ de nombres réels forment un ensemble qu'on appelle $\mathbb{R}^3$ et chaque triplet est l'expression en coordonnées cartésiennes d'un vecteur de l'espace rapporté à un repère cartésien. Les éléments de $\mathbb{R}^3$ sont appelés vecteurs à trois composantes.

Pour de nombreuses raisons, il est inévitable de considérer des vecteurs à $n$ composantes, $n \in \mathbb{N}^*$ un nombre entier strictement positif.

**Définition 1.** *L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est l'ensembles des $n$-uplets de nombres réels. On appelle les éléments de $\mathbb{R}^n$ les vecteurs à $n$ composantes.*

Notons le cas particulier $n=1$ où on identifie $\mathbb{R}^1$ à $\mathbb{R}$.

Pour chaque $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et chaque $i \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i \leq n$, on dispose d'un nombre réel $x_i \in \mathbb{R}$ qui est la $i$-ème composante de $\mathbf{x}$. Inversement, $\mathbf{x}$ est complétement déterminé par la donnée des $n$ nombres réels $x_1, \dots, x_n$. Pour des raisons de commodité, on a coutume de noter un vecteur à $n$ composantes comme une colonne de $n$ nombres, par exemple:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ joue un rôle particulier. Il s'agit du vecteur nul, dont toutes les composantes sont égales à 0, on le notera $\mathbf{0}_n$, voire si aucune confusion n'est à craindre $\mathbf{0}$ ou même 0.

La notation des vecteurs comme des colonnes de nombres est différente de celle où ils sont représentés comme des lignes. Ainsi le vecteur à deux composantes $(2,3)$ sera noté désormais $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le passage de la notation ligne a la notation colonne et vice-versa est sans difficulté; la notation colonne est juste plus commode pour le calcul matriciel.

2.1.2. *Quelques exemples concrets de vecteurs.* Considérons un amphi de 180 étudiants venant de passer un partiel, qu'on numérotera de 1 à 180. Chaque étudiant a obtenu une note qui est un nombre entier compris entre 0 et 20. On peut représenter le résultat de l'examen par un vecteur à 180 composantes dont la $i$-ème composante est la note de l'étudiant numéro $i$. Il est à souhaiter que le vecteur des notes de l'examen cette année ne soit pas $\mathbf{0}$.

2.2. **Opérations sur les vecteurs.** On peut additionner les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ selon la régle suivante:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}.$$

On peut multiplier les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par un réel donné selon la régle suivante:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda.\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

**Théorème 1.** *Ces opérations vérifient les régles arithmétiques:*

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} &= \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) \\ \mathbf{x}+\mathbf{y} &= \mathbf{x}+\mathbf{y} \\ \mathbf{x}+\mathbf{0} &= \mathbf{x} \\ \lambda.(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \lambda.\mathbf{x}+\lambda.\mathbf{y} \\ (\lambda+\lambda').\mathbf{x} &= \lambda.\mathbf{x}+\lambda'.\mathbf{x} \\ (\lambda\lambda').\mathbf{x} &= \lambda.(\lambda'.\mathbf{x}) \\ 0.\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ 1.\mathbf{x} &= \mathbf{x} \end{aligned}$$

*pour* $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$.

La preuve, aisée, de ce théorème est laissée au lecteur.

En particulier, on a $(-1).\mathbf{x}+\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ce qui justifie de noter $-\mathbf{x}$ le vecteur $(-1).\mathbf{x}$. De plus la première régle cité, dite d'associativité, permet d'enlever les parenthèses dans chaque expression de la forme $e = (...(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2})+...+\mathbf{x_p})...)$ et de noter simplement $e = \mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}+...+\mathbf{x_p}$ l'ordre des termes étant indifférent par la seconde règle, dite de commutativité. Une autre simplification de notation que ces régles rendent licite est de noter $\lambda\mathbf{x}$ pour $\lambda.\mathbf{x}$. Ces simplifications de notation seront utilisées sans préavis dans la suite.

La multiplication des vecteurs est un sujet très délicat que l'on n'abordera pas [1]. Mais il y a une opération ressemblant à la multiplication qui à deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ associe un nombre réel, leur produit scalaire.

**Définition 2.** *Le produit scalaire de deux vecteurs* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *est le nombre réel* $(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ *défini par la relation suivante:*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad (\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

**Proposition 2.1.** *Les relations suivantes sont satisfaites:*

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= (\mathbf{y}; \mathbf{x}) \\ ((\lambda \mathbf{x}); \mathbf{y}) &= \lambda(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}; \mathbf{z}) &= (\mathbf{x}; \mathbf{z}) + (\mathbf{y}; \mathbf{z}) \end{aligned}$$

*pour tous* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *De plus* $(\mathbf{x}; \mathbf{x})$ *est un nombre positif de racine carrée* $\|\mathbf{x}\|$, *qui est nul si et seulement si* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

La preuve des relations est aisée. Notez que $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Si $n = 2, 3$, le nombre réel $\|\mathbf{x}\|$ est la norme du vecteur $\mathbf{x}$ (si le repère cartésien auquel on rapporte le plan ou l'espace est orthonormal).

On voit souvent la notation $(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \mathbf{x}.\mathbf{y}$ qu'on n'utilisera pas dans ce cours.

## 2.3. **Matrices.**

2.3.1. *Définitions.* Dans notre étude de quelques exemples de systèmes inhomogènes $S_{2,2}(a, b, c, d; e, f)$ de la forme:

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f, \end{aligned}$$

nous avons pu constater que la manière de résoudre et la solution effective du système étaient plus affectée par les nombres $a, b, c, d$ que par les nombres $e$ et $f$. Les nombres $a, b, c, d$ peuvent s'organiser en un vecteur de $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, mais, pour des raisons que nous verrons plus tard, ce n'est pas la meilleure manière d'organiser ces nombres. La manière la plus adaptée est de les représenter sous la forme d'un tableau à deux lignes et deux colonnes, c'est à dire de les représenter comme la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

[1]Le problème de construire une multiplication sur les vecteurs à $n$ composantes n'admet une solution satisfaisante que si $n = 1, 2, 4, 8$.

qu'on appellera la matrice du système $S_{2,2}(a,b,c,d;e,f)$.

Plus généralement, étant donnés deux nombres entiers strictement positifs $n$ et $m$, on peut définir la notion de matrice à $n$ lignes et $m$ colonnes.

**Définition 3.** *Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ deux nombres entiers strictements positifs. Une matrice $A$ (à coefficients réels) est la donnée pour tout couple d'entiers $(i,j)$ tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ d'un nombre réel $a_{i,j}$. L'ensemble des matrices à $n$ lignes et $m$ colonnes est noté $M_{n,m}(\mathbb{R})$.*

Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. On représente $A$ comme suit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Le terme $a_{2,1}$ est mis sur la case située sur la deuxième ligne et la première colonne.

Une matrice est donc un tableau de nombres réels ayant $n$ lignes et $m$ colonnes. Cette donnée est équivalente à la donnée de $nm$ nombres, mais il est important psychologiquement et mathématiquement de penser à une matrice comme à un tableau de nombres. Un vecteur à $n$ composantes est une matrice à $n$ lignes et une seule colonne. Un autre cas particulier mérite une terminologie spéciale.

**Définition 4.** *L'ensemble $M_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté $M_n(\mathbb{R})$. Ses éléments sont appelés matrices carrées $n \times n$.*

Les cases $i, j$ d'une matrice telles que $i = j$ sont appellées la diagonale de la matrice. Les éléments placés sur la diagonale sont dits éléments diagonaux.

En plus de la matrice nulle, la matrice carrée $n \times n$, la matrice $I_n$ définie comme suit:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

joue un rôle particulier. Elle n'a que des 1 sur la diagonale et que des zéros hors de la diagonale.

Enfin si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de $A$ la somme de ses éléments diagonaux et on note:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

2.3.2. *Exemples concrets de matrices.* Certains ensembles de données numériques se représentent plus naturellement sous la forme de matrice que sous la forme de vecteurs. Supposez en effet un commerçant vendant des aspirateurs de 15 modèles différents. A un instant donné, il pourra représenter son stock d'aspirateurs comme un vecteur à 15 composantes, la $i$-ème composante étant le nombre d'aspirateurs du modèle $i$ présents en stock. Maintenant, le commerçant ne saurait se satisfaire d'une vision statique de son stock et préférera représenter son évolution sur un mois de 30 jours comme une matrice à 15 lignes et 30 colonnes, la $j$-ème colonne étant le vecteur colonne correspondant au stock le $j$-ème jour du mois. Organiser les données sous la forme d'une matrice lui permettra de suivre plus facilement l'évolution des stocks (et donc de savoir quels sont les modèles qui ont le plus de succés) que s'il avait structuré sa donnée sous la forme d'un vecteur à 450 composantes.

Les commerçants étant parmi les utilisateurs les plus assidus des programmes informatiques de type tableur, l'exemple suivant de matrices dans la vie professionnelle actuelle ne devrait pas surpendre. La donnée numérique contenue dans une feuille de calcul d'un tableur comme Microsoft Excel est en effet une matrice. Si on ne considère que ses fonctions mathématiques et non ses fonctions de mise en forme, un tableur apparaît comme un programme informatique qui effectue des calculs sur des données qui sont des matrices. Les fonctions mathématiques d'un tableur étant le plus souvent de nature statistique, on ne s'étonnera pas que le calcul matriciel soit un outil important pour les statistiques.

2.4. **Opérations vectorielles sur les matrices.** On peut additionner les matrices à $n$ lignes et $m$ colonnes case par case par la régle suivante:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & \dots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \dots & a_{1,m}+b_{1,m} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & \dots & a_{2,m}+b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \dots & a_{n,m}+b_{n,m} \end{pmatrix}.$$

On peut multiplier une matrice par un nombre réel $\lambda$ par la régle:

$$\lambda . \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,m} \\ \lambda a_{2,1} & \dots & \lambda a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \dots & \lambda a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

La matrice nulle, notée 0, est celle dont tous les coefficients sont nuls et joue un rôle particulier.

Il y a une autre opération importante, la transposition, qui transforme la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j, \leq m}$ à $n$ lignes et $m$ en la matrice ${}^tA = (b_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j, \leq n}$, la transposée de $A$, qui a $m$ lignes et $n$ colonnes et dont le coefficient $b_{i,j}$ vaut par définition $a_{j,i}$. Ainsi,

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

La terminologie suivante est usuelle:

**Définition 5.** *Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si et seulement si ${}^tA = A$. $A$ est dite antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$.*

**Théorème 2.** *Ces opérations vérifient les régles arithmétiques:*

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= A+(B+C) \\
A+B &= B+A \\
A+0 &= A \\
\lambda.(A+B) &= \lambda.A+\lambda.B \\
(\lambda+\lambda').A &= \lambda.A+\lambda.'A \\
(\lambda\lambda').A &= \lambda.(\lambda'.A) \\
0.A &= 0 \\
1.A &= A \\
{}^t(A+B) &= {}^tA+^t B \\
{}^t(\lambda.A) &= \lambda.{}^tA \\
{}^t({}^tA) &= A
\end{aligned}$$

*pour* $A, B, C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$.

2.5. **Multiplication à gauche d'un vecteur par une matrice.** Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Notez que le nombre de colonnes de $A$ est égal au nombre de lignes de $\mathbf{x}$. On définit le vecteur $A.\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ par la formule:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m \end{pmatrix}.$$

Notez que le nombre de lignes de $A.\mathbf{x}$ est égal au nombre de lignes de $A$.

Pour effectuer ce calcul correctement, la régle d'or est que pour calculer la $i$-ème composante de $A.\mathbf{x}$ il faut prendre la $i$-ème ligne de la matrice $A$ et en la lisant de gauche à droite faire la somme des produits avec les coefficients du vecteur $\mathbf{x}$ lu de haut en bas.

Prenons un exemple, soit à calculer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur résultat du calcul aura 2 composantes et sera représenté comme ue colonne de 2 nombres. Le premier de ces nombres est $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 14$, le second est $4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 = 32$. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Le calcul se faisant ligne par ligne par rapport à la matrice $A$, le cas particulier où la matrice $A \in M_{1,m}(\mathbb{R})$, c'est à dire où la matrice est une ligne, mérite d'être regardé à part. Le résultat sera un vecteur à une composante et sera donc complétement déterminé par un nombre. Le calcul est simple:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_nx_n \end{pmatrix}.$$

Or, cette expression est celle utilisée dans la définition du produit scalaire de deux vecteur colonnes. La matrice ligne (on dit aussi le vecteur ligne) $A$ peut être convertie en le vecteur colonne $\mathbf{y} =^t A$ et l'unique coefficient de $A.\mathbf{x}$ est le produit scalaire $(\mathbf{y}; \mathbf{x})$.

**Théorème 3.** *Les relations suivantes sont vérifiées:*

$$\begin{aligned} A.(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) &= \lambda A.\mathbf{x} + \mu A.\mathbf{y} \\ (\lambda A + \mu B).\mathbf{x} &= \lambda A.\mathbf{x} + \mu B.x \end{aligned}$$

*avec* $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ces régles justifient le caractère inoffensif de l'abus de notation qui consiste à noter $A\mathbf{x}$ le produit $A.\mathbf{x}$. Notez que $\mathbf{x}.A$ n'est défini que dans le cas dégénéré $n = m = 1$. Hors de ce cas, il n'y a pas de sens à écrire $\mathbf{x}A = A\mathbf{x}$, une relation qui est pire que fausse: non définie!

2.6. **Matrices et systèmes linéaires.** La notion de produit matriciel permet de formaliser aisément ce qu'est un système linéaire (inhomogène) de $n$ équations à $m$ inconnues.

**Définition 6.** *Le système linéaire homogène de $n$ équations à $m$ inconnues associé à la matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ est l'équation d'inconnue un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ donnée par $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

On notera l'équivalence suivante:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m & = & 0 \\ \vdots & = & 0 \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m & = & 0 \end{array} \right. .$$

**Définition 7.** *Le système linéaire inhomogène de $n$ équations à $m$ inconnues associé à la matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et au vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ est l'équation d'inconnue un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ donnée par $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.*

On notera l'équivalence suivante:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,m}x_m & = & b_n \end{array}\right. .$$

Par exemple le système:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.7. **Produits de matrices.** Soient $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$. Notez que $A$ a autant de colonnes que $B$ a de lignes.

**Définition 8.** *Le produit $A.B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice $C$ telle que, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq p$, le coefficient $c_{i,k}$ est donné par la formule:*

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k}.$$

Le cas $p = 1$ correspond au produit à gauche du vecteur colonne $B$ par la matrice $A$.

Plus généralement, la $k$-ième colonne de $A.B$ est le produit $A.\mathbf{B}_k$ où $\mathbf{B}_k$ est la $k$-ième colonne de $B$. De sorte que le coefficient à la $i$-ème ligne de $A.B$ se calcule en prenant la $i$-ème ligne de $A$ et la $j$-ième colonne de $B$ puis en faisant la somme des produits des termes qui apparaissent en parcourant la ligne de gauche à droite et la colonne du haut en bas. Calculons un exemple:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 5 + 2 \times 0 + 2 \times 1 \\ 0 \times 4 + 3 \times 1 + 1 \times 2 & 0 \times 5 + 3 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notez que si $A.B$ est bien défini, c'est à dire si $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ $B.A$ n'est défini que si $n = p$. Bien sûr, dans le cas particulier $m = n = p$, les deux expressions sont définies. En particulier, on peut multiplier entre elles dans les deux sens les matrices carrées de taille donnée.

**Théorème 4.** *Les relations suivantes sont vérifiées:*

$$\begin{array}{rcl} A.(B.C) & = & (A.B).C \\ A.I_m & = & A \\ I_n.A & = & A \\ 0.A & = & 0 \\ A.0 & = & O \\ (\lambda A + \mu A').B & = & \lambda A.B + \mu A'.B \\ A.(\lambda B + \mu B') & = & \lambda A.B + \mu A.B' \\ {}^t(A.B) & = & {}^tB.{}^tA \end{array}$$

*avec* $A, A' \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $B, B' \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ $C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Preuve. La première et la dernière sont les deux identités les plus compliquées. Prouvons seulement la première identité qui est la plus compliquée.

Le coefficient $i, k$ de $D = A.B$ est $d_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k}$. Par suite, le coefficient $i, l$ de $E = (A.B).C$ est

$$e_{i,l} = \sum_{k=1}^{p} d_{i,k} c_{k,l} = \sum_{k=1}^{p} (\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k}) c_{k,l} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k} c_{k,l}.$$

Le coefficient $j, l$ de $F = (B.C)$ est $\sum_{k=1}^{p} b_{j,k} c_{k.l}$. Par suite, le coefficient $i, l$ de $G = A.(B.C)$ est

$$g_{i,l} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} (\sum_{k=1}^{p} b_{j,k} c_{k.l}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k} c_{k,l}.$$

Ces deux sommes sont égales, donc $E = G$.

$\square$

Ainsi dans un produit bien défini de plusieurs matrices on peut omettre les parenthèses. Tant qu'on ne travaille qu'avec des produits et sommes de matrices bien définis on peut appliquer presque les mêmes régles de calcul algébrique. Mais ce presque est ici une restriction de taille!

En effet, même si $A$ et $B$ sont tels que $A.B$ et $B.A$ sont bien définis, il est généralement faux que $A.B = B.A$. Ce défaut de commutativité est le trait le plus saillant du calcul matriciel et se retrouve dans ses applications les plus simples comme les plus profondes. Donnons un exemple:

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

## 3. Inversion matricielle

Un système linéaire inhomogène de $n$ équations à $n$ inconnues s'écrit sous la forme $A.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée $n \times n$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Dans le cas $n = 1$, cette équation s'écrit sous la forme $E_{a,b}$, $ax = b$ et se résout, si $a \neq 0$, en $x = a^{-1}b$.

Dans le cas général, si nous connaissons une matrice notée $A^{-1}$ (et appelée inverse de $A$) telle que $A^{-1}.A = I_n$ on aurait:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow I_n\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Donc, moyennant la connaissance de $A^{-1}$ et du produit matriciel, le principe de résolution d'un système linéaire de $n$ équations à $n$ inconnues est aussi simple que celui de $E_{a,b}$. En pratique, c'est bien sûr plus compliqué que celà pour deux raisons: il existe des matrices non nulles non inversibles et le calcul de l'inverse n'est pas simple.

Néanmoins l'intérêt de ces problèmes dépasse le strict cadre des systèmes linéaires et nous allons expliquer plus en détail comment reconnaitre les matrices inversibles et calculer, s'il existe, l'inverse d'une matrice carrée.

### 3.1. **Matrices inversibles.**

**Théorème 5.** *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée $n \times n$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *L'unique solution du système linéaire $A\mathbf{x} = 0$ est $\mathbf{x} = 0$.*
(2) *Pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une solution.*
(3) *Pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une solution unique.*
(4) $\exists B \in M_n(R), \quad BA = I_n.$
(5) $\exists B' \in M_n(R), \quad AB' = I_n.$
(6) $\exists B \in M_n(R), \quad BA = AB = I_n.$

*Dans ces conditions, on dit que la matrice $A$ est inversible et on pose $A^{-1} = B$ qu'on appelle l'inverse de $A$. L'ensemble des matrices carrées inversibles est appelé $GL_n(\mathbb{R})$.*

Preuve. Il est facile de voir que la condition 3 implique les conditions 1 et 2. La condition 6 implique les conditions 4 et 5. Le calcul précédent implique que la condition 6 implique la condition 3. De même la condition 4 implique la condition 2, etc... Le fait que la condition 1 implique la condition 6 est l'implication la plus usitée de ce théorème car elle permet facilement de tester l'inversibilité d'une matrice. Hélas, la preuve est trop longue pour être expliquée dans ce cours.
□

La matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas d'inverse. En effet, on a toujours:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De sorte qu'il ne peut pas exister de matrice $F \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $FE = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Voici quelques exemples de matrices inversibles que nous avons rencontrés. Le lecteur est inviter à vérifier ces exemples en effectuant les calculs nécessaires.

**Exemple 3.1.** *La matrice triangulaire supérieure:*

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & t_{1,3} & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & t_{2,2} & t_{2,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

*est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls. Sous cette condition, $T^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure de la forme :*

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & \tau_{1,2} & \tau_{1,3} & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \tau_{2,2} & \tau_{2,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

La même chose est vraie pour les matrices triangulaires inférieures.

**Proposition 3.2.** *$I_n$ est une matrice inversible d'inverse $I_n$. Le produit $AB$ de deux matrices inversibles est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$. Si $A$ est inversible ${}^tA$ est inversible d'inverse ${}^t(A^{-1})$.*

Preuve. Comme $I_n.I_n = I_n$ il suit que $I_n$ est son propre inverse.

Si $A$ et $B$ sont inversibles, on a:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Donc $AB$ est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.

Si $A$ est inversible, on a:

$${}^tA{}^t(A^{-1}) ={}^t (A^{-1}.A) ={}^t I_n = I_n$$

Donc, ${}^tA$ est inversible d'inverse ${}^t(A^{-1})$. □

3.2. **Méthode générale pour déterminer l'inverse.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pour déterminer si $A$ est inversible ou non, on déterminera généralement si le système homogène de matrice $A$ a ou non des solutions non nulles.

Pour calculer l'inverse, on résoudra par la méthode du pivot de Gauss le système inhomogène $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Les coordonnées de la solution $\mathbf{x}$ s'écriront, si $A$ est inversible, sous la forme:

$$x_i = \sum b_{i,j}y_j.$$

La matrice $A^{-1}$ sera la matrice $b_{i,j}$.

Rappelons en le principe; considérons le système $(S^1)$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m & = & b_1 & (L_1^1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m & = & b_2 & (L_2^1) \\ \vdots & = & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,m}x_m & = & b_n & (L_n^1) \end{array}\right. .$$

Deux choses peuvent se passer.

Cas 1: La variable $x_1$ n'apparait pas explicitement dans le système (ce qui a lieu si et seulement si $\forall i, \quad a_{i,1} = 0$). Dans ces conditions, $x_1$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle mais les variables explicitement présentes dans le système avec $n-1$ inconnues. Si les variables $x_2, ..., x_{p-1}$ n'apparaissent pas explicitement mais $x_p$ apparait explicitement, en renumérotant $x'_1 = x_p, x'_2 = x_{p+1}, ...$, on constate que les $x'_i$ satisfont un système a $n-p$ inconnues où la première apparait explicitement.

Cas 2: la variable $x_1$ apparait explicitement dans le système, ce qui se traduit en $\exists 1 \leq i \leq n, a_{i,1} \neq 0$. Soit $i_0$ le plus petit tel $i$. En remplaçant la ligne $(L_1)$ par $(L_1 + L_{i_0})$ et en ne changeant pas les autres, on obtient un système équivalent $(\tilde{S}^1)$

$$\left\{\begin{array}{rcll} \tilde{a}_{1,1}x_1 + \tilde{a}_{1,2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1,m}x_m & = & \tilde{b}_1 & (\tilde{L}_1^1) \\ \tilde{a}_{2,1}x_1 + \tilde{a}_{2,2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2,m}x_m & = & \tilde{b}_2 & (\tilde{L}_2^1) \\ \vdots & = & \vdots & \\ \tilde{a}_{n,1}x_1 + \tilde{a}_{n,2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{n,m}x_m & = & \tilde{b}_n & (\tilde{L}_n^1) \end{array}\right. .$$

avec $\tilde{a}_{1,1} \neq 0$. On obtient alors un système équivalent $(S^2)$ en gardant comme première ligne la ligne $(L_1^2) = (\tilde{L}_1^1)$ et en remplaçant pour $i \geq 2$ la ligne $(\tilde{L}_i^1)$ par $(L_i^2) = (\tilde{L}_i^1) - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}(\tilde{L}_1^1)$. $(S^2)$ a l'allure suivante:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{1,m}x_m & = & \beta_1 & (L_1^2) \\ \alpha_{2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{2,m}x_m & = & \beta_2 & (L_2^2) \\ \vdots & = & \vdots & \\ \alpha_{n,2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,m}x_m & = & \beta_n & (L_n^2) \end{array}\right.$$

$(S^2)$ est la conjonction de $(L_1^2)$ et de $(S^2_-)$ le système formé des $n-1$ lignes suivantes de $(S^2)$. Noter que la ligne $(L_1^2)$ détermine $x_1$ en fonction des autres variables. Ces autres variables sont déterminées en continuant le processus décrit ci-dessus que le pas suivant relève du Cas 1 ou du Cas 2.

3.3. **Matrices inversibles** $2 \times 2$. Voyons ce qui se passe dans le cas de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Nous voulons d'abord donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b, c, d$ telle que $A$ est inversible si et seulement si cette condition est vérifiée. Il suffit donc de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A\mathbf{x} = 0$ ait comme seule solution $\mathbf{x} = 0$. Ce système s'écrit:

$$\begin{array}{rcl} ax + by & = & 0 \\ cx + dy & = & 0. \end{array}$$

Cas 1: $a \neq 0$. On peut choisir ce terme comme pivot et il faut ajouter $-\frac{c}{a}$ la première ligne a la seconde pour obtenir le système équivalent:

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ (d - \frac{c}{a}b)y &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, ce système n'a que la solution nulle si et seulement si $d - \frac{c}{a}b \neq 0$.

Cas 2: $c \neq 0$. On peut choisir ce terme comme pivot et il faut ajouter $-\frac{a}{c}$ la seconde ligne a la première pour obtenir le système équivalent:

$$\begin{aligned} (b - \frac{a}{c}d)y &= 0 \\ cx + dy &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, ce système n'a que la solution nulle si et seulement si $b - \frac{a}{c}d \neq 0$.

Cas 3: $a = c = 0$. $x = 1, y = 0$ est alors solution et la matrice n'est pas inversible.

Le bilan est que $A$ est inversible si et seulement $ad - bc \neq 0$.

**Définition 9.** *Le nombre réel $ad - bc \in \mathbb{R}$ est appelée le déterminant de $A$ et noté* $\det(A)$.

On a établi le critère numérique suivant d'inversibilité.

**Théorème 6.** *$A \in M_2(\mathbb{R})$ est inversible ssi $det(A) \neq 0$.*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R)$ une matrice inversible. Introduisons la matrice $B$ suivante:

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

et calculons:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a établi:

**Proposition 3.3.** *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Alors,*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

On notera qu'il est nécessaire que le déterminant soit non nul pour que cette formule ait un sens.

3.4. **Déterminants.** Le théorème 6 est très pratique car il permet de décider très vite si une matrice $2 \times 2$ est inversible. Un tel critère existe pour les matrices carrées de taille quelconque.

Pour une matrice $3 \times 3$, on définit le déterminant par la formule:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} &= a_{1,1}\det\begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} - a_{2,1}\det\begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ &+ a_{3,1}\det\begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La recette est la suivante: on suit la première colonne, on multiplie $a_{j,1}$ par $(-1)^{j+1}$ fois le déterminant de la matrice $2 \times 2$ obtenue en otant la première colonne et la $j$-ème ligne, puis on fait la somme de ces réels.

Cette recette marche pour définir par récurrence le déterminant d'une matrice $n \times n$:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} &= a_{1,1}\det\begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\ &-a_{2,1}\det\begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\ &+ \dots \\ &+(-1)^{n+1}a_{n,1}\det\begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Une des découvertes mathématiques majeures de la fin du $XVIII^{eme}$ siècle est le critère suivant:

**Théorème 7.** *$A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible ssi $det(A) \neq 0$.*

Il n'y a pas de formule simple pour le déterminant d'une somme. En revanche:

**Théorème 8.** *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices $det(AB) = det(A)det(B)$.*

La preuve de ces théorèmes demande de développer au delà des objectifs de ce cours la théorie des déterminants et sera donc omise.

**Corollaire 3.4.** *Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, $det(P^{-1}) = (det(P))^{-1}$.*
*Soit $A \in M_n(R)$ une matrice, $det(PAP^{-1}) = det(A)$.*

Preuve. Le théorème 8 donne $det(P)det(P^{-1}) = det(PP^{-1}) = det(I_n)$. Avec la définition ci dessus du déterminant, on vérifie aisément que $det(I_n) = 1$. D'où le premier point.

Le second point découle du théorème 8 et du premier point, car:

$$det(PAP^{-1}) = det(P)det(A)det(P^{-1}) = det(A)det(P)det(P)^{-1} = det(A).$$

□

Il existe une formule similaire à celle de la proposition 3.3 pour inverser une matrice $n\times n$ de déterminant non nul. L'intérêt de cette formule relativement complexe étant interne aux mathématiques, elle sera également omise.

## 4. Puissances Matricielles

4.1. **Définition.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On définit $A^0 = I_n$ et $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ par la relation de récurrence $A^{n+1} = A.A^n$. On a $A^1 = A$ et pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ $A^{n+m} = A^n A^m$.

Si $A$ est inversible, on étend la définition à $n \in \mathbb{Z}$ en demandant que $A^n = (A^{-1})^n$ et on voit facilement que pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$ $A^{n+m} = A^n A^m$.

### 4.2. **Suites récurrentes et puissances matricielles.**

4.2.1. *Suite de Fibonaci.* La suite de Fibonacci est la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

avec conditions initiales $u_1 = u_0 = 1$. Ainsi $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, etc...

Cette suite est un des modèles les plus anciens de dynamique des populations et a été proposée en 1202 par Léonard de Pise, dit Fibonacci, pour modéliser la pullulation des lapins.

Introduisons la suite $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donnée par:

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

On a donc $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, etc... La donnée de la suite $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la donnée de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est juste une autre façon d'organiser cette donnée.

Introduisons maintenant la matrice $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons:

$$F\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n + u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{v}_{n+1}.$$

**Lemme 4.1.** *La suite de vecteurs $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait à la relation de récurrence $\mathbf{v}_{n+1} = F.\mathbf{v}_n$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{v}_n = F^n\mathbf{v}_0$.*

Preuve. Le calcul précédent démontre en effet la relation de récurrence. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in N$, la propriété $P(n) : \mathbf{v}_n = F^n \mathbf{v}_0$ est satisfaite.

Pour $n = 0$, $F^0 = I_2$ et $P(0)$ est vrai.

Supposons $P(n)$ satisfaite pour $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathbf{v}_{n+1} = F.\mathbf{v}_n$, il suit que $\mathbf{v}_{n+1} = F.F^n \mathbf{v}_0$, puis que $\mathbf{v}_{n+1} = F^{n+1} \mathbf{v}_0$. Par suite $P(n+1)$ est satisfaite. □

Ainsi calculer les termes de la suite de Fibonacci revient à calculer les puissances de la matrice $F$!

Remarquons une analogie avec les suites géométriques. Une suite de réels $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $w_{n+1} = qw_n$. On a alors $w_n = q^n w_0$.

Ainsi, même si ce n'est pas la terminologie consacrée, on pourrait dire que la suite de vecteurs $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison la matrice $F$.

4.2.2. *Suite de vecteurs satisfaisant une relation de récurrence linéaire du premier ordre.*

**Définition 10.** *Soit $A \in M_m(\mathbb{R})$ une matrice carrée $m \times m$. On dit que la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait à la relation de récurrence linéaire $\mathbf{v}_{n+1} = A.\mathbf{v}_n$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}_{n+1} = A.\mathbf{u}_n$*

**Théorème 9.** *Si la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait à la relation de récurrence linéaire $\mathbf{v}_{n+1} = A.\mathbf{v}_n$, on a $\mathbf{u}_n = A^n \mathbf{u}_0$.*

Preuve. Mutatis mutandis[2], c'est la preuve du lemme 4.1. □

4.2.3. *Suites de réels satisfaisant une relation de récurrence linéaire.* Les suites géométriques et la suite de Fibonacci sont des exemples de la notion plus générale suivante:

**Définition 11.** *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite vérifier une relation de récurrence linéaire d'ordre $p$ si et seulement si il existe des nombres réels $a_0, \ldots, a_{p-1}$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \ldots + a_0 u_n.$$

Une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire est complétement déterminée par les donnée de ses $p$ premiers termes $u_0, \ldots, u_p$.

Une suite géométrique vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 1. La suite de Fibonacci une relation d'ordre 2.

Soit $(u_n)$ une suite vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre $p$:

$$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \ldots + a_0 u_n.$$

En imitant l'astuce utilisée pour la suite de Fibonacci, introduisons une suite de vecteurs $(\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\mathbf{w}_n = \begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ u_{n+p-2} \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

[2] Expression latine signifiant: 'Ce qui doit être changé ayant été changé'.

et la matrice $C \in M_p(\mathbb{R})$:

$$C = \begin{pmatrix} a_{p-1} & a_{p-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exemple 4.2.** *La suite* $(\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfait à la relation de récurrence linéaire* $\mathbf{w}_{n+1} = C\mathbf{w}_n$. *Par suite,* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{w}_n = C^n\mathbf{w}_0$.

4.3. **Matrices diagonalisables.** Puisque l'étude d'une suite réccurente est essentiellement l'étude des puissances d'une matrice, il est utile de disposer de méthodes efficaces de calcul des puissances d'une matrice. Nous allons exposer la plus simple d'entre elles, qui a l'avantage de s'appliquer moyennant une modification mineure dans presque tous les cas.

Une matrice $D \in M_n(\mathbb{R})$ est dite diagonale si et seulement si $d_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.

Ainsi une matrice diagonale a la forme:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & d_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Les puissances d'une matrice diagonale se calculent aisément, juste en prenant les puissances des éléments diagonaux:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & 0 & \dots \\ 0 & d_2^n & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d_3^n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Ceci est valable pour $n \in \mathbb{Z}$ si bien sûr $D$ est inversible ou encore si $\forall i, \ d_i \neq 0$.

**Définition 12.** *Une matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *est dite diagonalisable s'il existe* $P \in GL_n(\mathbb{R})$ *et* $D$ *une matrice diagonale telles que* $A = PDP^{-1}$.

La donnée de $D$ et $P$ telles que $A = PDP^{-1}$ s'appelle une diagonalisation de $A$.

Il est également facile de calculer les puissances d'une matrice diagonalisable.

**Proposition 4.3.** *Soit* $A = PDP^{-1}$ *une matrice diagonalisable. On a* $A^n = PD^nP^{-1}$.

Preuve. Prouvons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $Q(n) : A^n = PD^nP^{-1}$ est satisfaite.

$Q(0)$ est satisfaite car cette relation se réduit à $I_n = PI_nP^{-1}$.

$Q(1)$ l'est également car cette relation se réduit à $A = PDP^{-1}$.

Supposons $Q(n)$ vraie. On a donc $A^n = PD^nP^{-1}$. Ceci donne $A^{n+1} = A.A^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. $\square$

Pour appliquer cette méthode de calcul des puissances d'une matrice $A$ il faut d'abord diagonaliser $A$ c'est à dire déterminer des matrices $P$ et $D$ telles que $A = PDP^{-1}$. Nous allons donner quelques indications sur ce problème.

## 5. Valeurs propres, vecteurs Propres

**5.1. Définitions.** Rappelons la définition de la famille $\{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ de $n$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qu'on appelle la base canonique:

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si $P \in M_n(\mathbb{R})$, soit $\mathbf{c}_j$ le vecteur défini par la j-ème colonne de la matrice $P$. On a $\mathbf{c}_j = P\mathbf{e_j}$.

Soit $A = PDP^{-1}$ une matrice diagonalisable. Calculons $A.\mathbf{c}_j$.

$$A.P\mathbf{e_j} = PDP^{-1}P\mathbf{e_j} = PD\mathbf{e_j} = Pd_j\mathbf{e_j} = d_jP\mathbf{e_j}.$$

Ainsi $\mathbf{c}_j$ vérifie $A\mathbf{c}_j = d_j\mathbf{c}_j$. Cette condition est très contraignante car elle implique que les vecteurs $A\mathbf{c}_j$ et $\mathbf{c}_j$ sont collinéaires.

**Définition 13.** *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.*

*Un réel $\lambda$ est appelé une valeur propre de $A$ s'il existe un vecteur $\mathbf{x}$ non nul tel que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.*

*Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A$. Un vecteur propre de $A$ de valeur propre $\lambda$ est un vecteur non nul $\mathbf{v}$ tel que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.*

**Proposition 5.1.** *Soit $A = PDP^{-1}$ une matrice diagonalisable. Le j-ème élément diagonal $d_j$ est une valeur propre de $A$ et la j-ème colonne de $P$ est un vecteur propre de $A$ de valeur propre $d_j$.*

Ainsi la recherche d'une écriture de $A$ de la forme $A = PDP^{-1}$ est par cette proposition essentiellement réduite à la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de $A$.

**5.2. Matrices symétriques.** Citons sans démonstration le théorème important suivant:

**Théorème 10.** *Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors $S$ est diagonalisable. De plus, la matrice $P$ peut être choisi de façon que ses colonnes $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ soient des vecteurs de norme 1 deux à deux orthogonaux, i.e.: tels que $\forall i \neq j$, $(\mathbf{c}_i; \mathbf{c}_j) = 0$.*

**5.3. Méthode générale de recherche de valeurs propres et de vecteurs propres.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Chercher les valeurs propres de $A$ revient à chercher les réels $\lambda$ tels que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ a des solutions non nulles.

Or $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda.I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Donc, chercher les valeurs propres de $A$ revient à chercher les valeurs du paramètre $\lambda$ pour lesquelles le système linéaire homogène dépendant du paramètre $\lambda$, $(A - \lambda.I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a une solution non triviale. Ceci peut se faire par la méthode du pivot de Gauss.

Les résultats sur la caractérisation des matrices inversibles amènent à la proposition:

**Théorème 11.** *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) $\lambda$ *est une valeur propre de* $A$.
(2) $A - \lambda I_n$ *n'est pas une matrice inversible.*
(3) $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

La dernière condition est particulièrement intéressante. En effet, posons $f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. C'est une fonction de la variable réelle $\lambda$. Un fait fondamental, dont nous omettons la preuve, est que cette fonction est un polynôme de degré $n$. Ainsi, la détermination des valeurs propres d'une matrice est équivalente à la détermination des racines d'un polynôme. Ce problème est généralement difficile à résoudre, mais beaucoup de méthodes existent, notamment numériques.

Une fois ce problème résolu, il est facile de déterminer les vecteurs propres de $A$ de valeur propre $\lambda$ puisque celà revient à résoudre le système homogène $(A - \lambda.I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour lequel la méthode du pivot de Gauss peut être employée.

## 5.4. Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice de Fibonacci.

5.4.1. *Calculs.* Recherchons par cette méthode les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de Fibonacci $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$F - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si son déterminant $d(\lambda) = -\lambda(1-\lambda) - 1.1$ s'annulle. On a : $d(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$. $d$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-1) = 5$. Ses racines sont $\lambda_\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Recherchons les vecteurs propres de $F$ de valeur propres $\lambda_+$. Ce sont les solutions non nulles de $(F - \lambda + I_2)\mathbf{x} = 0$. Ce système est, explicitement

$$\begin{aligned} -\frac{1+\sqrt{5}}{2}x + y &= 0 \\ x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}y &= 0 \end{aligned}$$

Mais, *puisque* $F - \lambda_+ I_2$ *n'est pas inversible*, ces deux lignes sont proportionnelles, et les vecteurs propres de valeur propre $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sont tous de la forme $c.\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ $c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0$.

De même, les vecteurs propres de valeur propre $\lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont tous de la forme $c'.\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ $c' \in \mathbb{R}$, $c' \neq 0$. [3].

On est amené à poser:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de $P$ est $\det(P) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$, $P$ est inversible d'inverse:

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant:

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ \frac{(3-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})-(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{4} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, on a bien: $F = P \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} P^{-1}$.

5.4.2. *Formule explicite pour la suite de Fibonacci.* De sorte que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F^n = P \begin{pmatrix} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

.

Le vecteur $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ associé à la suite de Fibonacci est donc:

$$\mathbf{v}_n = P \begin{pmatrix} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Effectuons le calcul:

[3]Une manière plus simple de le voir est de constater que $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1-5}{4} = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_n &= P\begin{pmatrix} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} P \begin{pmatrix} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} P \begin{pmatrix} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ce calcul fournit l'expression:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}).$$

5.5. **Recherche des valeurs propres d'une matrice $2\times 2$.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

On a $\det(A - \lambda I_2) = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$.

Ainsi $\lambda$ est valeur propre de $A$ si et seulement si $\lambda$ est une racine du trinôme $x^2 + Bx + C$ avec $C = \det(A)$ et $B = -(a+d) = -\mathrm{tr}(A)$.

Si $\Delta = B^2 - 4C > 0$, $A$ a donc deux valeurs propres qui sont des nombres réels et il se révélera toujours possible de diagonaliser $A$.

Si $\Delta = 0$, $A$ n'a qu'une seule valeur propre $\lambda$. Notez que si $A$ est diagonalisable on a nécessairement $A = P\lambda I_2 P^{-1}$ donc $A = \lambda I_2$. En particulier si $A$ n'est pas une homothétie, elle n'est pas diagonalisable.

Si $\Delta < 0$, le polynôme $P$ a deux racines complexes conjuguées. Nous verrons plus tard que ce cas n'est pas très différent du cas $\Delta > 0$.

## 6. Matrices à coefficients complexes

6.1. **Vecteurs et matrices complexes.** On définit un vecteur à $n$ composantes complexes comme un $n$-uplet de nombre complexes. L'ensemble des vecteurs à $n$ composantes complexes forme un ensemble noté $\mathbb{C}^n$. On représente un élément $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ comme une colonne de nombre complexes:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \\ \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ deux nombres entiers strictements positifs. Une matrice $A$ (à coefficients complexes) est la donnée pour tout couple d'entiers $(i, j)$ tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ d'un nombre complexe $a_{i,j}$. L'ensemble des matrices complexes à $n$ lignes et $m$ colonnes est noté $M_{n,m}(\mathbb{C})$.

Il s'avère que tous les théorèmes et définitions donnés pour les matrices à coefficients réels se transposent sans modification pour les matrices complexes aux exceptions suivantes près:

- La positivité de $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, la définition de $\|\mathbf{x}\|$ dans la proposition 2.1 et leurs conséquences.
- Le théorème 10 sur les matrices symétriques.

6.2. **Application à la diagonalisation des matrices réelles.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. $\lambda$ est valeur propre de $A$ si et seulement si $\lambda$ est une racine du trinôme $x^2 + Bx + C$ avec $C = \det(A)$ et $B = -(a + d) = -\mathrm{tr}(A)$.

Le cas $\Delta = B^2 - 4C \geq 0$ a été discuté plus haut.

Si $\Delta < 0$, le polynôme $P$ a deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_\pm = \frac{-B \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Ce sont des valeurs propres *complexes* de $A$ et on pourra diagonaliser $A$ au prix de chercher ses vecteurs propres *complexes* et on pourra donner une diagonalisation $A = PDP^{-1}$ à condition d'accepter que $P$ est une matrice inversible à coefficients complexes.

Plus généralement, presque toutes les matrices réelles ou complexes peuvent se diagonaliser à l'aide de matrices complexes.

Ainsi les matrices complexes ne sont pas un caprice de mathématicien, elles sont presque inévitables si l'on veut calculer efficacement des puissances matricielles, problème qui nous le verrons à des applications concrètes et communes hors des mathématiques.

6.3. **Rappels sur les nombres complexes.** Pour la convenance de l'étudiant, faisons quelques rappels sur les nombres complexes.

Les nombres complexes forment un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$. Tout nombre complexe $z$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$ où $i$ est un nombre vérifiant l'identité $i^2 = -1$.

Soit le nombre complexe $z = x + iy$, alors $x$ est la partie réelle de $z$ (noté $\mathrm{Re}(z)$) et $y$ est sa partie imaginaire (noté $\mathrm{Im}(z)$). En particulier, $z$ appartient à $\mathbb{R}$ si et seulement sa partie imaginaire est nulle. Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé imaginaire pure. Par exemple, $i$ est un imaginaire pur. Dans un repére orthonormé $(O, i, j)$, le nombre complexe $z = x + iy$ est représenté par le point $M$ de coordonnées $(x, y)$ et on dit que $z$ est l'affixe de $M$. Les points dont l'affixe est réel sont sur l'axe $0x$, ceux dont l'affixe est un imaginaire pur sont sur l'axe des $0y$.

Appeler nombres les complexes sous entend la définition d'une addition et d'une multiplication des nombres complexes!

**Définition 14.** *Par définition, on a:*

$$\begin{aligned}(a+ib)+(a'+ib') &= (a+a')+i(b+b')\\ (a+ib).(a'+ib') &= aa'-bb'+i(ab'+ba').\end{aligned}$$

**Théorème 12.** *Pour tous $z, u, t \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\begin{aligned} z+0 &= z\\ z+u &= u+z\\ (z+u)+t &= z+(u+t)\\ z.0 &= 0\\ z.1 &= z\\ z.u &= u.z\\ (z.u).t &= z.(u.t)\\ (z+u).t &= z.t+u.t\end{aligned}$$

*De plus chaque nombre complexe $z$ non nul a un inverse $z^{-1}$ qui vérifie $zz^{-1}=1$.*

Rappelons aussi qu'avec les définitions $\overline{a+ib}=a-ib$, le complexe conjugué de $a+ib$ et $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$ le module de $a+ib$ on a :

$$z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Géométriquement, le point d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe $0x$ du point d'affixe $z$. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que si $z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z.\overline{z}$. Utilisons cette remarque pour écrire sous forme algébrique le nombre complexe $z = \frac{2+i}{1-i}$, en effet $z = \frac{(2+i)(1+i)}{2} = \frac{1+3i}{2}$.
Remarquons aussi que si $z \in \mathbb{C}$, $z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z-\overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$. Nous en déduisons que sont équivalentes les propositions suivantes (pour $z \in \mathbb{C}$).

(i) $z$ est réel.
(ii) $z-\overline{z}=0$.

De même, sont équivalentes les propositions suivantes.

(i) $z$ est imaginaire pur.
(ii) $z+\overline{z}=0$.

Tout nombre complexe $z=x+iy$ (écriture algébrique) non nul peut aussi s'écrire $z=re^{i\theta}$ (écriture trigonométrique) où $r>0$, $\theta\in\mathbb{R}$, et $e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. Dans ce cas, $r$ est le module de $z$ (noté $|z|$) et $\theta$ est appelé son argument (noté arg$z$ et défini à $2\pi$ prés). Si $M$ est le point d'affixe $z=re^{i\theta}$, $r$ représente la distance $OM$ et $\theta$ est l'angle que fait $OM$ avec l'axe $0x$.
Notons que si $z=re^{i\theta}$, $\overline{z}=re^{-i\theta}$.

On peut vérifier que le module de $z=x+iy$ est donné par $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Un nombre complexe de module 1 est de la forme $e^{i\theta}$ ($\theta\in\mathbb{R}$).

*Exemples.* Le nombre 1 est de module 1 et d'argument 0, alors que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Considérons maintenant le nombre complexe $z = 2 + 2i$. Alors, $|z| = 2\sqrt{2}$. Donc,

$$z = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Comme $(re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$ et $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$, on a

$$|zz'| = |z||z'|,\ \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|},\ \mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z'),\ \mathrm{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z').$$

Notons que si $z$ est réel, le module de $z$ est égal à sa valeur absolue. Nous pouvons définir la distance $d(z, z')$ entre deux nombres complexes $z$ et $z'$ par $d(z, z') = |z - z'|$ (qui est aussi la distance entre deux points du plan d'affixe $z$ et $z'$). Cette distance satisfait l'inégalité triangulaire (qui traduit le vieil adage populaire "le plus court chemin pour aller d'un point à une autre est la ligne droite") :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, \forall z'' \in \mathbb{C}, d(z, z') \leq d(z, z'') + d(z'', z').$$

Cette formule découle de l'inégalité triangulaire pour le module :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

En effet,

$$d(z, z') = |z - z'| = |(z - z'') + (z'' - z')| \leq |z - z''| + |z'' - z'| = d(z, z'') + d(z'', z').$$

Rappelons maintenant des formules trés utiles en pratique.

Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ on a:

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}.e^{i\theta'}.$$

De ceci on déduit par récurrence que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\textit{Formule de Moivre :}\ (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Cette formule peut aussi s'écrire $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, et c'est sous cette forme que nous l'utiliserons le plus souvent.

On a également:

$$\textit{Formule d'Euler :}\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Cette formule découle des deux égalités (1) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et (2) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$. En effet, (1)+(2) donne $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ et (1)−(2) donne $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2\sin\theta$, d'où, les formules d'Euler.

## 7. Applications du calcul matriciel

Les deux dernières parties de ce chapitre ont un caractère culturel et, pour l'étudiant curieux, serviront d'amorce de réponse à la question sans doute légitime "À quoi ça sert?".

7.1. **Systèmes à réponse linéaire.** Dans la nature, on rencontre assez souvent des matrices lorsqu'on est en présence de processus cumulatifs.

Par exemple, soit un glacier vendant des coupes composées avec 15 parfums. Supposons qu'il serve 50 types de coupes glacées. Il est raisonnable de représenter la recette d'une de ces coupes glacées par un vecteur colonne à 15 composantes, la $i$-ème composante fournissant le nombre de boules de glace du parfum $i$ servant à composer ledit dessert. Ces vecteurs colonnes peuvent être organisé en une matrice $R$ avec 15 lignes et 50 colonnes dont la $j$-ème colonne est le vecteur représentant la recette de la $j$-ème coupe glacée. La commande des clients, un soir donné est donnée par un vecteur colonne $C$ à 50 composantes dont la $i$ème composante.

Le produit $R.C$ est un vecteur à 15 composantes dont la $i$-ème composante fournit le nombre de boule de glaces du parfum $i$ nécessaire à la préparation de la commande.

Ainsi, l'application $F$ qui a la commande $C$ des clients associe la consommation $F(C)$ en boules de glace du restaurant est elle l'application linéaire associée à la matrice $R$.

En éléctronique (théorique!) existent des filtres à réponse linéaire. Ces filtres sont des dispositifs éléctroniques recevant un signal **In** en entrée, commodément représenté par un vecteur à un certain nombre de composantes, et fournissant en sortie un autre signal **Out** encore représenté par un vecteur, le signal de sortie **Out** $= F$**In** étant décrit par une matrice $F$.

Cette situation est très générale dans les sciences expérimentales et en économie.

7.2. **Phénomènes linéaires en physique.** Dans de nombreux phénomènes ondulatoires comme la propagation des ondes de faible amplitude à la surface d'une étendue liquide, des ondes sismiques dans la croute terrestre ou la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide, les ondes sont décrites par des fonctions vérifiant certaines équations appelées équations des ondes.

Le principe de superposition stipule que si deux fonctions $f_1$ et $f_2$ décrivent chacune un mode de propagation de l'onde, la fonction $f_1 + f_2$ décrit un autre mode de propagation de l'onde. Le principe supplémentaire que chaque mode de propagation de l'onde peut être amplifié sans déphasage se traduit par le fait que si la fonction $f$ décrit un mode de propagation de l'onde, la fonction $\lambda f$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ décrit un autre mode de propagation.

Une conséquence est que les modes de propagation de l'onde peuvent être décrits comme des vecteurs à une infinité de composantes. Plus concrètement, c'est le principe de superposition qui est responsable des phénomènes d'interférences.

Les phénomènes de propagation de la chaleur ont été modélisés par J. Fourier suivant ce type d'idées. Donnons comme exemples suppl'ementaires le comportement quantique non-relativiste des objets subatomiques décrit par l'équation de Schrödinger et l'électron quantique relativiste décrit par l'équation de Dirac.

Quant à Heisenberg, il a carrément réinventé indépendamment le calcul matriciel lorsqu'en 1925 il a mis en en place son formalisme pour la mécanique quantique destiné à rendre compte du comportement étrange des spectres de rayonnement atomiques.

7.3. **Petites perturbations.** Dans la plupart des cas, les systèmes naturels ne répondent pas linéairement. Toutefois, si l'on se fixe à un vecteur d'entrée donné $\mathbf{In}_0$ et qu'on regarde des petites variations du vecteur $\mathbf{In}$ autour de cette entrée, c'est à dire des vecteurs de la forme $\mathbf{In} = \mathbf{In}_0 + \Delta\mathbf{In}$, $\Delta\mathbf{In}$ supposé petit, on a le plus souvent une bonne approximation $\mathbf{Out} = F(\mathbf{In}_0 + \Delta\mathbf{In}) \simeq \mathbf{Out}_0 + F_0\Delta\mathbf{In}$ où $F_0$ est une matrice. Donc, la réponse des systèmes que l'on rencontre dans la nature à de petites perturbations de leurs entrées est généralement une réponse linéaire.

Même dans un système aussi compliqué que l'économie française, la variation du chiffre d'affaires des différentes chaines de supermarché présentes sur le marché français à une petite variation du vecteur revenu des résidents français, toutes choses étant égales par ailleurs, est décrit par une matrice.

Outre leur ubiquité, les systèmes à réponse linéaire jouissent d'un autre trait caractéristique qui fait leur utilité: ce sont les plus faciles à étudier et donc il faut souvent commencer par eux! Le calcul matriciel est l'ensemble des techniques qui permettent de mener à bien cette étude.

Les systèmes de nature non-linéaire sont beaucoup plus courants mais il s'avère souvent impossible d'en faire une étude complète. Faute de mieux, on commence presque toujours par les linéariser, c'est à dire leur attacher des systèmes linéaires qui les approximent.

7.4. **Modèles de dynamique des populations.** L'étude de l'évolution des populations, notamment humaines, a commencé dès le moyen âge et revêt une importance capitale aussi bien pour l'écologie que pour la géographie humaine.

Une des plus simples classes de modèles représente l'évolution temporelle d'une population par une suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où l'on suppose que la population $N_{n+1}$ au temps $n+1$ dépend de manière uniforme de la population $N_n$ au temps $n$. L'usage d'un temps discret $n \in \mathbb{N}$ est justifiée par le fait qu'on recense généralement la population à intervalles de temps réguliers, l'information ainsi obtenue ne décrivant paas précisément ce qui se passe entre deux recensement.

Dans cette classe de modèles, le plus simple est le suivant: on suppose qu'à chaque période temporelle une fraction fixée $d \in [0,1]$ de la population meurt et que le nombre moyen de naissances par individu est un nombre réel positif $b \geq 0$. En termes démographiques, les taux de natalité et de mortalité sont constants. Ceci donne $N_{n+1} = (1+b-d)N_n$ ou posant $\lambda = 1$:

$$N_{n+1} = \lambda N_n.$$

Cette relation est appelée dans ce contexte équation de Malthus en temps discret, puisque ce modèle a été proposé dans l' Essay on the Principle of Population de T. Malthus (1798). Selon, Malthus cette relation gouverne l'évolution d'une population humaine si elle n'est pas contrôlée. Mathématiquement $N_n$ est la suite géométrique $N_n = N_0\lambda^n$. Si $\lambda > 1$ la population croît très vite. Combiné avec le second principe que les ressources disponibles croissent au mieux linéairement, ce principe amenait Malthus à décrire les conséquences déplaisantes d'une croissance incontrôlée de la population.

Un modèle plus ancien est la suite de Fibonacci. C'est la solution d'un problème d'évolution de population de lapins originalement ainsi posé.

> Un homme place un couple de lapins dans un endroit entouré d'un mur. Combien de couples de lapins seront produits si l'on suppose que chaque mois chaque couple fécond engendre un nouveau couple de lapins qui devient fécond au bout d'un mois.

Appelons $u_n$ le nombre de couples de lapins le $n$ième mois. On remarque que, puisque nul lapin n'est supposé mourir ni devenir stérile, le nombre de couples de lapins féconds le $n$ième mois est $u_{n-1}$. Par suite le nombre de couples de lapins le $(n+1)$-ème mois est $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ (les lapins survivent et les lapins féconds se reproduisent). On a aussi $u_0 = 1$ et, ces lapins étant supposés nouveaux-nés au début et ne se reproduisant donc pas le premier mois, $u_1 = 1$. On a vu que ceci impliquait:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}).$$

Pour $n$ assez grand, le premier terme est beaucoup plus grand en valeur absolue que le second et on a:

$$u_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}$$

et la population de lapins peut essentiellement être décrite comme croissant géométriquement avec une raison $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ce qui correpond à un taux de croissance mensuel d'environ 61,8034%.

La méthode matricielle d'étude de la suite de Fibonnacci est une méthode qui est naturelle dans l'étude des populations lorsqu'on cherche à l'affiner par l'intégration des classes d'âge dans le modèle. Notez que la population des lapins de Fibonnacci comporte deux classes d'âge: les bébés lapins, d'une part, et les lapins adultes supposés féconds d'autre part.

Plus généralement, certains modèles amènent à supposer que les individus de la population ont un âge $i = 0, \ldots, M$; $M$ un entier âge maximum possible des membres de la population, l'âge étant compté avec la même unité de temps que celle qui sépare deux recensements.

Soit donc $u_{i|n}$ le nombre d'individus d'âge $i$ à la période $n$.

On appelle $s_i$ la probabilité de survivre de l'âge $i-1$ à l'age $i$, $s_i$ est défini pour $i = 1, \ldots, M$ puisque d'une part, il n'y a pas de bébés d'âge $-1$ et que tout le monde est mort à l'âge $M+1$. On note $s_0$ taux de survie infantile, c'est à dire la proportion des nouveaux-nés qui survivent suffisamment pour être recensés dans la classe d'âge 0. On a:

$$\forall i \geq 1 u_{i|n+1} = s_i u_{i-1|n}.$$

On appelle $m_i$ le nombre moyen de bébés (d'âge 0) engendrés à la période suivante par individu survivant (en général $m_0 = 0!$). On a:

$$u_{0|n+1} = s_0 m_0 u_{0|n} + s_0 m_1 u_{1|n} + \ldots + s_0 m_M u_{M|n}.$$

Ces données s'organisent naturellement en un vecteur de population réparti par classe d'âge observé au temps $n$:

$$\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} u_{0|n} \\ u_{1|n} \\ \vdots \\ u_{M|n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M+1}$$

et les deux relation précédentes s'écrivent:

$$\begin{pmatrix} u_{0|n+1} \\ u_{1|n+1} \\ \vdots \\ u_{M|n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0m_0 & s_1m_1 & \dots & s_0m_{M-1} & s_0m_M \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0|n} \\ u_{1|n} \\ \vdots \\ u_{M|n} \end{pmatrix}.$$

On a donc $\mathbf{U}_{n+1} = L.\mathbf{U}_n$ où $L$ est la matrice:

$$L = \begin{pmatrix} s_0m_0 & s_1m_1 & \dots & s_0m_{M-1} & s_0m_M \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_M & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce contexte, la matrice $L \in M_{M+1}(\mathbb{R})$ est appelée matrice de Leslie ou matrice de projection de la population. On a bien sûr $\mathbf{U}_n = L^n\mathbf{U}_0$.

Les matrices cette forme sont en général diagonalisables quitte à admettre des valeurs propres complexes. Ces valeurs propres non réelles viennent par paires de complexes conjugués. Supposons donc donnée une diagonalisation:

$$L = P \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_M \end{pmatrix} P^{-1}.$$

La formule $L^n = P \begin{pmatrix} \lambda_0^n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^n & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_M^n \end{pmatrix} P{-1}$ a pour conséquence que pour toute donnée initiale de population, il existe des complexes $\alpha_{i,j}$ tels que

$$\forall i, n, \quad u_{i|n} = \sum_{j=0}^{M} \alpha_{i,j}\lambda_i^n,$$

Et donc que la population totale $N_n = \sum_{i=0}^{M} u_{i|n}$ vérifie une relation de la forme:

$$\forall n, \quad N_n = \sum_{j=0}^{M} \beta_i \lambda_i^n,$$

les $\beta_i$ étant des nombres complexes indépndants de $n$. Deux situations peuvent a priori se produire en général.

Cas 1: il y a une valeur propre réelle, disons $\lambda_0$ qui est strictement plus grande que le module des autres valeurs propres. Ceci nous donne, si $\beta_0 \neq 0$ ce qui est le cas pour presque toutes les conditions initiales sur la population, $N_n \approx \beta_0 \lambda_0^n$ avec $\beta_0$ réel car $N_n$ est réel. Ainsi, on retrouve un taux de croissance géométrique uniforme dans la plupart des cas.

Cas 2: il y a deux valeurs propres complexes conjuguées, disons $\lambda_0, \lambda_1 = \bar{\lambda}_0$ dont le module est strictement plus grand que les autres. On a alors, puisque $N_n$ est réel: $N_n \approx \beta_0 \lambda_0^n + \bar{\beta}_0 \lambda_0^n = 2\mathrm{Re}(\lambda_0^n)$.

Ecrivons $\lambda_0$ et $\beta_0$ sous forme trigonométrique, $\lambda_0 = \rho e^{i\theta}$, $\beta = Be^{i\phi}$ ceci fournit:

$$N_n \approx C\rho^n \cos(n\theta + \phi), \quad C \in \mathbb{R}$$

Ce type de comportement oscillant fournit des valeurs négatives à la population! C'est donc qu'un tel modèle ne peut pas être retenu et en effet les matrices de Leslie réalistes ne peuvent pas se comporter ainsi.

Référence: N. Britton, *Essential Mathematical Biology.* Springer Undergarduate Mathematics Series, Springer-Verlag (2003).

7.5. **Matrices de probabilité et application au comportement nuptial des bourdons.** Les matrices servent également au calcul des probabilités. Supposons un système ayant $N$ états distincts notés $1, \ldots, N$ et dont on observe l'évolution en temps discret. Supposons, que de manière uniforme par rapport au temps, le système ait une probabilité $\pi_{i,j}$ de passer de l'état $j$ à l'état $i$ au cours de l'intervalle temporel entre les instants $n$ et $n+1$. On a $0 \leq \pi_{i,j} \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{N} \pi_{i,j} = 1$.

Soit $\mathbf{p}_n = \begin{pmatrix} p_n^1 \\ p_n^2 \\ \vdots \\ p_n^N \end{pmatrix}$ le vecteur dont la composante $p_n^i$ représente la probabilité de trouver le système dans l'état $i$ au temps $n$.

La loi de Bayes, loi fondamentale de composition des probabilités, implique que:

$$\mathbf{p}_{n+1} = \begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \cdots & \pi_{1,N} \\ \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \cdots & \pi_{2,N} \\ \vdots & & & \vdots \\ \pi_{N,1} & \pi_{N,2} & \cdots & \pi_{N,N} \end{pmatrix} \mathbf{p}_n.$$

La matrice $\Pi = (\pi_{i,j})$ mérite son nom de matrice de probabilité.

En particulier, si le système était dans l'état 1 au temps 0 la probabilité $p_n^i$ de le trouver dans l'état $i$ au temps $n$ est:

$$\begin{pmatrix} p_n^1 \\ p_n^2 \\ \vdots \\ p_n^N \end{pmatrix} = \Pi^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Des modèles de ce type sont utilisés pour décrire les mutations subies par les brins d'ADN lorsqu'ils se transmettent de génération en génération.

Pour les plus simples de ce modèle, on s'intéresse à un site fixé du brin d'ADN qu'on suppose indépendant du reste de la chaîne. Les éléments de la matrice sont la probabilité qu'un nucléotide (a,t,g ou c) soit remplacé par un autre nucléotide au cours de la mutation. Si l'on suppose que la probalité qu'un nucléotide se transforme en un autre (quelqu'il soit) est $p$, la matice $\Pi$ obtenue, dite matrice de Jukes-Cantor, est:

$$\Pi_{JC}(p) = \begin{pmatrix} 1-3p & p & p & p \\ p & 1-3p & p & p \\ p & p & 1-3p & p \\ p & p & p & 1-3p \end{pmatrix}$$

On a bien sûr $0 \leq p \leq \frac{1}{3}$. Un exercice laissé au lecteur montre que:

$$\Pi_{JC}(p)^n = \Pi_{JC}(\frac{1}{4}(1-(1-4p)^n))$$

Ainsi, quand $n$ tend vers l'infini, si $p \neq 0$, la suite de matrices $\Pi_{JC}(p)^n$ tend vers $\frac{1}{4}I_4$ ce qui s'interprète en disant qu'au bout d'un certain temps et quelque soit la configuration de départ, le site sera occupé par un nucléotide de type a,g,c ou t avec probabilité 25 % pour chacun.

Il existe des variantes de ces modèles (Kimura, Hasegawa, Kishino, Yano ...). Ils peuvent servir à estimer le nombre de générations entre deux individus de même origine phylogénétique, ce qui est utile pour dater la divergence évolutive de deux espèces par la méthode de l'horloge moléculaire (travaux de Mootoo Kimura, Allan Wilson ....).

Présentons pour finir une variante de cette construction. Supposons que l'on construise une matrice $G \in M_N(\mathbb{R})$ avec $g_{i,j} = 0$ si le système ne peut pas passer de l'état $j$ à l'état $i$ et $g_{i,j} = 1$ si le système peut passer de l'état $j$ à l'état $i$.

Une histoire du système sur $n$ périodes est donc une suite $i_0, i_1, \ldots, i_n$ d'états du système avec $g_{i_{k+1}, i_k} = 1$.

On se demande le nombre $\nu_i$ d'histoires du système sur $n$ périodes commençant par l'état $j$ et finissant part l'état $i$. C'est un exercice conseillé de vérifier que:

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} = G^n \mathbf{e_j}$$

$\mathbf{e_j}$ le $j$-ème vecteur de la base canonique.

Voici un exemple biologique tiré de la référence: C. Depotte, Y. Dejgham, G. Noël, J.-C. Verhaeghe, *Mathématiques et biologie. Une expérience pluridisciplianaire.* De Boeck (2003).

Il s'agit du compte rendu d'une observation du comportement nuptial des bourdons d'élevage. On introduit au début du cycle reproductif dans une cage un jeune et vigoureux mâle bourdon avec une jeune reine vierge et on observe le comportement du mâle lors de l'expérience (celui de la femelle étant, chez les bourdons, moins complexe.).

Le système observé est celui constitué de chaque bourdon mâle qui peut se trouver dans les 7 états suivants:

- **D** Position de départ, mise en présence des bordons mâles et femelles.
- **A** Approche. Le mâle se dirige vers la reine. Comportement ponctuel et souvent sujet à récidive, les bourdons étant de grands timides.
- **IF** Inspection de la femelle. Le mâle suit la femelle avec ses antennes tendues vers elle et l'inspectent au niveau de la tête ou de l'abdomen.
- **T** Tentative d'accouplement. Le mâle s'approche de la reine, frotte de ses pattes antérieures l'extrémité de l'abdomen de la femelle. Il sort son appareil reproducteur. Comportement durant assez longtemps.
- **Acc** Accouplement.
- **SA** Sortie par abandon du mâle. Le bourdon mâle se désinteresse de la reine et ne revient plus à la charge.
- **ST** Sortie par dépassement du temps. Après 15 minutes, l'accouplement ne se produit plus.

L'état **D** est l'état de départ les états **Acc**, **SA**, **ST** sont des états finaux après lesquels plus rien d'intéressant ne se passe concernant le comportement nuptial du bourdon.

La matrice $G$ du comportement nuptial des bourdons est:

| ↙ | **D** | **IF** | **A** | **T** | **Acc** | **SA** | **ST** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **D** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **IF** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **A** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **T** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Acc** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **ST** | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **SA** | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

En calculant $G^5$ on s'appercevra qu'il y a 3 histoires possibles qui amènent à **Acc** en 5 périodes et 11 qui amènent à **ST**.

Pour la matrice de probabilité, il convient d'enrichir les considérations précédentes par des données expérimentales. Dans loc. cit., les résultats de 78 expériences menées avec introduction de 4 mâles dans la cage donne la matrice:

| $\swarrow$ | **D** | **IF** | **A** | **T** | **Acc** | **SA** | **ST** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **D** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **IF** | 0 | 0 | $0,094$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **A** | 1 | $0,954$ | $0,662$ | $0,750$ | 0 | 0 | 0 |
| **T** | 0 | 0 | $0,218$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Acc** | 0 | 0 | 0 | $0,175$ | 1 | 0 | 0 |
| **ST** | 0 | $0,034$ | $0,017$ | $0,035$ | 0 | 1 | 0 |
| **SA** | 0 | $0,012$ | $0,009$ | $0,040$ | 0 | 0 | 1 |

## 8. Quelques points d'histoire

Curieusement, les déterminants furent introduits en Occident à partir du XVIe siècle, soit bien avant les matrices, qui n'apparaissent qu'au XIXe siècle.

Les Chinois furent les premiers à utiliser des tableaux de nombres et à appliquer un algorithme maintenant connu sous le nom de procédé d'élimination de Gauss-Jordan (ou pivot de Gauss). Cette méthode fut décrite par un mathématicien chinois Liu Hui (IIIe siècle aprés J.C) prés de 1600 ans avant C.F. Gauss. L'injustice qui consiste à ne pas parler du pivot de Liu Hui semble trop enracinée pour être réparée [4].

Dans son sens original, le déterminant détermine l'unicité de la solution d'un système d'équations linéaires. Il fut introduit dans le cas de la taille 2 par Cardan en 1545 dans son Ars Magna.

Le japonais Kowa Seki introduisit les premiers déterminants de taille 3 et 4, à la même époque que l'allemand Leibniz. L'apparition des déterminants de taille supérieure demande encore plus de cent ans. Curieusement le japonais Kowa Seki et l'allemand Leibniz en donnèrent les premiers exemples presque simultanément. Leibniz étudia de nombreux systèmes d'équations linéaires. En l'absence de notation matricielle, il représente les coefficients inconnus par un couple d'indices : il note ainsi ij pour $a_{i,j}$. En 1678, il s'intéresse à un système de trois équations et trois inconnues et donne, sur cet exemple, la formule de développement suivant une colonne. La même année, il écrit un déterminant de taille 4, correct aux signes près. Leibniz ne publie pas ces travaux, qui semblent avoir été oubliés avant que les résultats ne soient redécouverts indépendamment une cinquantaine d'années plus tard. À la même période, Kowa Seki publie un manuscrit sur les déterminants, où il trouve une formulation générale difficile é interpréter. Elle semble donner des formules correctes pour des déterminants de taille 3 et 4, et de nouveau des signes erronés pour les déterminants de taille supérieure. La découverte restera sans lendemain, à cause de la coupure du Japon avec le monde extérieur.

En 1748, un traité d'algèbre posthume de MacLaurin relance la théorie des déterminants, avec l'écriture correcte de la solution d'un système de quatre équations linéaires à quatre inconnues. En 1750, Cramer formule les règles qui permettent de résoudre un système de n équations à n inconnues, mais sans en donner la démonstration.

[4] C'est d'ailleurs un principe de large application que les théorèmes qui portent un nom de mathématicien n'ont généralement pas été découverts par la personne en question. Curieusement, ce principe s'applique mal aux théorèmes prouvés par des mathématiciennes.

Les mathématiciens s'emparent de ce nouvel objet, avec des articles de Bézout en 1764, de Vandermonde en 1771. En 1772, Laplace établit les formules de récurrence portant son nom. L'année suivante, Lagrange découvre le lien entre le calcul des déterminants et des volumes.

Gauss utilise pour la premiére fois le mot " déterminant ", dans les Disquisitiones arithmeticae en 1801.

Cayley étudie une Géométrie à $n$ dimensions dans une publication de 1843. Grassmann publie un traité Sur le principe de l'extension linéaire, une nouvelle branche des mathématiques en 1844 sur le sujet. Même si, en tant que mathématicien il est peu reconnu é cette époque, dès 1845, des idées analogues sont reprises par Cauchy.

Ce n'est en 1850 que Sylvester mentionna pour la premiére fois dans un article le terme de matrice.

Jordan publia le Traité des substitutions et des équations algébriques en 1870. Il étudia les applications linéaires d'un espace dans lui même, en dimension finie, pour une large famille de nombres dont les complexes et réels. Jordan introduisit la terminologie de vecteur propre et valeur propre et analysa leur rôle dans la théorie de la diagonalisation.

Ce sont néanmoins les travaux de Hilbert qui apportent é la notion de valeur propre le plus de profondeur. Il ébranle les bases de la géométrie en 1889 dans son texte Fondements de la géométrie. Pour la première fois depuis Euclide, la base axiomatique est modifiée. Il devient alors possible d'appliquer les outils géométriques é des espaces de dimension infinie.

En 1925, Heisenberg redécouvrit le calcul matriciel en fondant une premiére formulation de ce qui allait devenir la mécanique quantique.

Les valeurs propres ouvrent de nombreux champs d'applications. En mathématiques, cette approche permet par exemple la résolution d'équations différentielles, ou d'équations aux dérivées partielles en suivant la ligne de pensée inaugurée par J. Fourier dans ses travaux sur la théorie de la chaleur. Ces outils mathématiques sophistiqués sont d'un constant usage en Physique.

## 9. Exercices

**Exercice 1.** *Calculer la somme des vecteurs* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ *suivants:*

(1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

**Exercice 2.** *Calculer la somme des vecteurs* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ *suivants:*

(1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**Exercice 3.** *Calculer le produit scalaire* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ *des vecteurs* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ *suivants:*

(1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 4.** *Calculer* $3.A$ *pour les matrices* $A$ *suivantes.*

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

**Exercice 5.** *Calculer la somme* $A + B$ *des matrices suivantes, si toutefois elle est bien définie.*

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

**Exercice 6.** *Dans les cas suivants, le produit* $A.\mathbf{x}$ *du vecteur* $\mathbf{x}$ *par la matrice* $A$ *est il bien défini? Si oui le calculer.*

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(4) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(5) $A = \begin{pmatrix} 45 & 2 & 1 \\ 2 & 16 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(6) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 12 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

**Exercice 7.** *Dans les cas suivants, le produit A.B des matrices A et B est il bien défini? Si oui le calculer.*

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 45 & 2 & 1 \\ 2 & 16 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 8 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(5) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(6) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 12 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 8.** *Résoudre le système linéaire suivant:*

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ y + 2z & = & 1 \\ 4z & = & 3 \end{array} \right. .$$

**Exercice 9.** *Résoudre les systèmes linéaires homogènes suivants:*

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ x+y+2z &=& 0\\ 4z &=& 0 \end{array}\right.$$

$$(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0\\ 2x+4y-z &=& 0\\ 3x+2y+2z &=& 0 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0\\ 2x-3y+z &=& 0\\ x-4y+2z &=& 0 \end{array}\right.$$

$$(S_4)\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z-2w &=& 0\\ 3x-7y-2z+4w &=& 0\\ 4x+3y+5z+2w &=& 0 \end{array}\right.$$

$$(S_5)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z &=& 0\\ 2x+5y+2z &=& 0\\ x+4y+7z &=& 0\\ x+3y+3z &=& 0 \end{array}\right.$$

**Exercice 10.** *Résoudre les systèmes linéaires suivants:*

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y &=& 2\\ x+2y &=& 1 \end{array}\right.$$

$$(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y &=& 1\\ 5x+7y &=& 3 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y &=& 2\\ 6x+2y &=& 1 \end{array}\right.$$

$$(S_4)\left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y &=& 10\\ 3x+6y &=& 15 \end{array}\right.$$

**Exercice 11.** *Résoudre les systèmes linéaires suivants:*

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1\\ x+y+2z &=& 1\\ 4z &=& 0 \end{array}\right.$$

$$(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-3z &=& 5\\ 3x-2y+2z &=& 5\\ 5x-3y-z &=& 16 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-2z &=& 5\\ x-2y+3z &=& 2\\ 4x-y+4z &=& 1 \end{array}\right.$$

$$(S_4)\begin{cases} x+2y+3z &= 3\\ 2x+3y+8z &= 4\\ 3x+2y+17z &= 1\end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases} x+y+z &= 2\\ x+y+2z &= 0\\ x+2y-z &= 0\end{cases}$$

$$(S_6)\begin{cases} x+y+z+t &= 2\\ x+y+2z+2t &= 0\\ x+2y-z-t &= 1\\ z+t &= 0\end{cases}$$

**Exercice 12.** *Résoudre les systèmes linéaires suivants:*

$$(S_1)\begin{cases} 2x+3y &= 3\\ x-2y &= 5\\ 3x+2y &= 7\end{cases}$$

$$(S_2)\begin{cases} x+2y-3z+2w &= 2\\ 2x+5y-8z+6w &= 5\\ 3x+4y-5z+2w &= 4\end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x+2y-z+3w &= 3\\ 2x+4y+4z+3w &= 9\\ 3x+6y-z+8w &= 10\end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} x+2y+2z &= 2\\ 3x-2y-z &= 5\\ 2x-5y+3z &= -4\\ x+4y+6z &= 0\end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases} x+5y+4z-13w &= 3\\ 3x-y+2z+5w &= 2\\ 2x+2y+3z-4w &= 1\end{cases}$$

**Exercice 13.** *Calculer le déterminant des matrices suivantes:*

$$\begin{pmatrix} 4 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1\\ 12 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$$

*Lesquelles sont inversibles? Calculer leur inverse.*

**Exercice 14.** *Montrer que les deux matrices suivantes sont inversibles et l'inverse l'une de l'autre:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 8\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

**Exercice 15.** *Les matrices suivantes sont elles inversibles?*

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

**Exercice 16.** *Calculer le déterminant des matrices:*

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

**Exercice 17.** *Soient $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

**Exercice 18.** *Pour quelles valeurs du paramètre $a \in R$, resp. $a \in \mathbb{C}$, les matrices $M(a), N(a)$ suivantes sont elle inversibles:*

$$M(a) = \begin{pmatrix} 4+a & 1+2a \\ -2 & -5a \end{pmatrix}, \quad N(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+a \\ -1+a & 1+2a \end{pmatrix}.$$

**Exercice 19.** *Inverser les matrices*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 20.** *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *Calculer $A^2, A^3$. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$. En déduire que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$.*

*Indication: on pourra montrer que $A^{-1} = -\frac{1}{c}A^2 - \frac{a}{c}A - \frac{b}{c}I_3$.*

**Exercice 21.** *Montrer qu'une matrice diagonale* $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & d_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si pour tout $i$ $d_i \neq 0$. Montrer que le déterminant de $D$ est $d_1 \dots . d_n$.*

*Montrer qu'une matrice diagonalisable $A$ de diagonalisation $A = PDP^{-1}$ est inversible si et seulement si $D$ est inversible.*

**Exercice 22.** *Soit* $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & d_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ *une matrice diagonale. Montrer que le déterminant de $D$ est $d_1 \dots . d_n$.*

*Montrer que le déterminant d'une matrice diagonalisable $A$ de diagonalisation $A = PDP^{-1}$ est égal au déterminant de $D$.*

*Retrouver le résultat de l'exercice précédent.*

**Exercice 23.** *Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes:*

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 24.** *Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Diagonaliser $A$. Calculer $A^{256}$.*

**Exercice 25.** *Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

*Diagonaliser $A$.*

**Exercice 26.** *Valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation des matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 27.** *Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.*

**Exercice 28.** *Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Est elle diagonalisable?*

**Exercice 29.** *On considère les matrices $P, A \in M_3(\mathbb{R})$ données par:*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -13 & 28 & 4 \\ -4 & 9 & 1 \\ -10 & 20 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) *Montrer que $P$ est inversible.*

(2) *Montrer que $P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = AP$*

(3) *Montrer que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$.*

(4) *Quelles sont les valeurs propres de $A$? les vecteurs propres?*

(5) *$A$ est-elle diagonalisable?*

(6) *$A$ est-elle inversible?*

**Exercice 30.** *Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

*Diagonaliser A.*

**Exercice 31.** *Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

*Diagonaliser A.*

**Exercice 32.** *Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

*Est elle diagonalisable?*

**Exercice 33.** *Soient* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^4 + aA^3 + bA^2 + cA + dI_n = 0$. *Montrer que toute valeur propre* $\lambda$ *de* $A$ *vérifie* $\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$.

**Exercice 34.** *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ $u_0 = 1, u_1 = 3$. *Calculer* $u_n$ *(indication: on pourra se servir des résultats du cours sur les puissances de la matrice de Fibonacci).*

**Exercice 35.** *Un restaurant vend des coupes de crème glacée de deux sortes :*
*- L'Ardéchoise avec une boule de glace à la vanille et deux boules de glace au marron.*
*- Le Mont-Blanc avec deux boules de glace à la vanille et une boule de glace au marron.*
*Pour sa soirée, ce restaurant a de quoi faire 16 boules de glace à la vanille et 14 boules de glace au marron. Le patron du restaurant se demande combien de coupes de chaque sorte il peut faire. Pouvez-vous l'aider ?*

**Exercice 36.** *Un commerçant a l'intention d'acheter des lots de vêtements. Il a le choix entre des lots de type A contenant 1 manteau, 2 robes et 3 tailleurs, et des lots de type B comportant 2 manteaux, 2 robes et 1 tailleur. Le commerçant souhaite acquérir 40 manteaux, 60 robes et 60 tailleurs. Sachant qu'un lot de type A coute 2000 euros et qu'un lot de type B coute 1500 euros, aider grâce à une étude graphique le commerçant faire son choix.*