Ch 1. Ensembles et dénombrement

I. Ensembles

Définition 1 *Un ensemble est une collection de choses qu'on appelle éléments. L'ensemble vide est noté $\emptyset$.*

Dans la suite, on considèrera toujours un ensemble universel Ω (on lit "grand oméga"), et tous les ensembles considérés seront des parties de Ω. On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Exemple.

Définition 2 *Soient A et B deux ensembles. On définit :*
- $A \cup B$, l'union de A et B, est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B ou dans les deux.
- $A \cap B$, l'intersection de A et B, est l'ensemble des éléments qui sont dans A et dans B.
- $A \backslash B$, la différence A moins B, est l'ensemble des éléments qui sont dans A, mais pas dans B.
- $A \Delta B$, la différence symétrique de A et B, l'ensemble des éléments qui sont soit dans A soit dans B, mais pas dans $A \cap B$.
- A^c ou $\overline{A}$, le complémentaire de A, l'ensemble des éléments qui ne sont pas dans A.

On représente graphiquement, dés que c'est possible, les ensembles grâce à des diagrammes de Venn.

Proposition 3 *Premières relations :*
- commutativité : $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.
- associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$.
- distributivité : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Proposition 4 (Règles de De Morgan)

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i \cup B)$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c, \qquad \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

Définition 5 *Soient A et B deux ensembles. On pose $C = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$. On appelle C l'ensemble produit de A et B et on le note $A \times B$.*

(exemples, généralisation)

Définition 6 *Soient $(A_i)_{1 \le i \le n}$, n ensembles inclus dans Ω. La famille $(A_i)_{1 \le i \le n}$ est une partition de Ω si elle vérifie les deux conditions :*

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pour tous* $i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

(exemples, généralisation)

Définition 7 *Soit $A \subset \Omega$. On définit sur Ω la fonction indicatrice de A, $\mathbb{1}_A$, par :*

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(exemple)

II. Cardinaux

Définition 8 *Soit A un ensemble fini. Le cardinal de A, noté $|A|$, est le nombre d'éléments que contient A.*

(exemple)

Proposition 9 *Additivité*
Soient A et B deux ensembles finis, disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$). Alors

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Proposition 10 *Multiplicativité*
Soient A et B deux ensembles finis, et $C = A \times B$. Alors $|C| = |A| \cdot |B|$

(preuve)

Corollaire 11 *Principe du dénombrement*
On réalise deux expériences qui peuvent produire respectivement n et m résultats différents. Au total, pour les deux expériences prises ensemble, il existe $n.m$ résultats possibles.

Corollaire 12 *Soit A un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de suites de longueur r constituées d'éléments de A est n^r.*

Proposition 13 (Inclusion-exclusion) *Soient A et B deux ensembles finis.*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Plus généralement, pour n ensembles finis $A_1, ..., A_n$,

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \;&=\; \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_n|\end{aligned}$$

III. Dénombrement

Définition 14 *Soit A un ensemble fini. Une permutation de A est une manière d'ordonner, d'arranger les éléments de A. La formulation mathématique est : une permutation de A est une bijection de A dans A.*

Théorème 15 *Il y a $n!$ permutations d'un ensemble de cardinal n.*

preuve : clair par le principe du dénombrement. $\clubsuit$
exemple : combien existe-t-il d'anagrammes de PROBA ?

Théorème 16 *Soient n objets distinguables. Le nombre de permutations de r objets, pris parmi les n objets, est*

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(on dit aussi arrangement de r objets pris parmi n)
preuve : pour la première place, il y a n objets possibles,
pour la seconde, $(n-1)$ objets possibles,
...
pour la dernière, $(n-r+1)$ objets possibles.
Au total, $n(n-1)...(n-r+1)$ possibilités, par le principe du dénombrement. $\clubsuit$

Théorème 17 *Le nombre de manières de choisir p éléments parmi n (sans tenir compte de l'ordre) est*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Autrement dit, c'est le nombre de parties à p éléments pris parmi n éléments. On appelle parfois ces parties des combinaisons de p éléments pris parmi n.

preuve : on regarde le nombre de permutations de ces p éléments et on obtient $p!$ arrangements. Il y a donc $p!$ fois plus d'arrangements que de combinaisons. $\clubsuit$

Proposition 18 *1) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$*
2) $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$
3) $(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$

Corollaire 19 *Soit Ω un ensemble fini de cardinal n. Le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$ vaut 2^n.*

preuve : il existe 1 partie à 0 élément,
il existe n parties à 1 élément,
...
il existe $\binom{n}{p}$ parties à p éléments,
...
il existe 1 partie à n éléments.
Finalement, le nombre total de parties est

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^r 1^{n-r} = (1+1)^n = 2^n$$

$\clubsuit$

Théorème 20 *On considère n objets, parmi lesquels n_1 sont indistinguables,..., n_r sont aussi indistinguables. Le nombre de permutations différentes est $\dfrac{n!}{n_1! \cdots n_r!}$*

exemple : combien d'anagrammes de STAT ? 4 !/2 !=12

exemple : résultat du loto (6 numéros).
- manière de voir 1 : on regarde en direct le tirage du loto et on obtient un arrangement de 6 nombres pris dans $\{1, ..., 49\}$. On a alors $\omega = (x_1, ..., x_6)$: les 6 nombres sortis avec leur ordre d'arrivée. Quel est le nombre de tirages différents ?

$$A_{49}^6 = 49{*}48{*}47{*}46{*}45{*}44 = 10.068.347.520$$

Mais on peut gagner les 6 bons numéros quel que soit l'ordre de sortie des 6 numéros...
- manière de voir 2 : on regarde les 6 nombres sortis sans s'occuper de l'ordre d'arrivée. On a alors $\omega = \{x_1, ..., x_6\}$. D'où Ω est l'ensemble des combinaisons de 6 nombres pris dans $\{1, ..., 49\}$.
Quel est le nombre de tirages différents ?

$$\binom{49}{6} = \frac{49*48*47*46*45*44}{6*5*4*3*2} = 13.983.816$$

remarque : $(1,2,3,4,5,6) \neq (2,1,3,4,5,6)$, mais $\{1,2,3,4,5,6\} = \{2,1,3,4,5,6\}$

Ch 2. Le modèle probabiliste

I. Ensemble fondamental et événements

Définition 21 *Une expérience aléatoire est une action, une procédure, qui donne un résultat imprévisible, mais dont on connaît précisément l'ensemble des résultats possibles. Cet ensemble, noté Ω, est appelé ensemble fondamental ou univers ou ensemble des possibles.*

Exemples :
- lancer d'un dé. On observera un résultat $k \in \{1, ..., 6\}$.
- sondage auprès de 1000 utilisateurs d'un téléphone portable. On observera le nombre d'abonnés à orange.
- questionnaire à 100 réponses binaires. On observera des suites ω de 100 réponses prises dans $\{0,1\}$; $\omega \in \{0,1\}^{100}$.
- parcours d'un taxi. On observera une fonction continue (trajectoire).
- mise en service d'un ordinateur. On observera sa durée de fonctionnement qui appartient à $\mathbb{R}^+$.

Définition 22 *On appelle événement élémentaire tout élément ω de Ω. C'est un résultat possible de l'expérience aléatoire. On appelle événement toute partie de Ω.*

Pour désigner des événements, on utilisera souvent des lettres capitales du début de l'alphabet (A, B,...).

Exemples : - on lance un dé. Alors $\Omega = \{1, ..., 6\}$. L'événement A : "on obtient un chiffre pair" est constitué des trois événements élémentaires 2, 4 et 6. On a : $A = \{2, 4, 6\}$.
- on lance trois fois une pièce de monnaie. Il est bon que les événements élémentaires décrivent le plus précisément possible le résultat de cette expérience. On choisit donc de décrire ω par un triplet (r_1, r_2, r_3) qui donne les résultats des trois lancers (dans l'ordre). L'événement B : "on obtient pile au deuxième lancer" est

$$B = \{(f,p,f), (f,p,p), (p,p,f), (p,p,p)\}$$

Il n'est parfois pas nécessaire de connaître tous ces détails. On pourra aussi choisir : ω représente le nombre de "face" obtenus. Alors, $\Omega = \{0,1,2,3\}$. Le modèle est beaucoup plus simple, mais ne permet pas de décrire des événements tels que B. Et les calculs qui vont suivre ne sont pas forcément simples, eux.

Il existe plusieurs manières de modéliser l'ensemble fondamental. Le choix du modèle est un des aspects difficiles de ce cours.

Vocabulaire probabiliste

Nous allons manipuler des ensembles, mais en utilisant un vocabulaire propre aux probabilités.

Si le résultat ω de l'expérience aléatoire appartient à A, on dit que ω réalise A, ou que A est réalisé. Ainsi, Ω, qui est toujours réalisé, est appelé événement certain. Et $\emptyset$, qui n'est jamais réalisé, est appelé événement impossible.
Si A et B sont deux événements,
- $A \subset B$ se dit "A implique B" (car si A est réalisé, B aussi),
- $A \cup B$ se dit "A ou B" (car si $A \cup B$ est réalisé, A ou B est réalisé),
- $A \cap B$ se dit "A et B",
- A^c est l'événement contraire de A,
- $A \cap B = \emptyset$ se dit "A et B sont incompatibles", ou encore disjoints.

Exemple : On lance un dé. On pose $\Omega = \{1, ..., 6\}$. Soit A l'événement "on obtient un chiffre pair". Le contraire de A, A^c, est l'événement "on obtient un chiffre impair".

II. Probabilités

Pensez à quelques phrases de la vie courante qui contiennent le mot "probabilité". On constate qu'on parle toujours de la probabilité d'un événement. Considérons donc un événement A. Que représente la probabilité de A, notée $P(A)$? Il existe plusieurs manières de voir.

- Proportion :
On lance un dé. Quelle est la probabilité de A="obtenir un chiffre pair"? Chaque face du dé a la même chance, et il y en a 6. Quant aux chiffres pairs, ils sont 3. D'où, intuitivement, $P(A) = \frac{3}{6} = 1/2$.

- Fréquence :
On lance une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité d'obtenir FACE ? On lance une pièce un grand nombre de fois. Notons k_n le nombre de FACE obtenus en lançant n fois la pièce. Alors

$$P(FACE) = \lim_{n \to +\infty} \frac{k_n}{n}$$

- Opinion :
Quelle est la probabilité pour que les étudiants votent au second tour des présidentielles ? Quelle est la probabilité pour que l'équipe de Montceau gagne la coupe ? pour que l'OL soit championne de France ?

Définition 23 *Soit une expérience aléatoire et Ω l'espace des possibles associé. Une probabilité sur Ω est une application, définie sur l'ensemble des événements, qui vérifie :*
- axiome 1 : $0 \leq P(A) \leq 1$, pour tout événement A
- axiome 2 : pour toute suite d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, deux à deux incompatibles,

$$P\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$$

- axiome 3 : $P(\Omega) = 1$

Remarque : les événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, si pour tous $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Définition 24 *Soit une expérience aléatoire modélisée par un espace des possibles Ω et une probabilité P. On appelle le couple (Ω, P) un espace de probabilité.*

Corollaire 25 *Si Ω est dénombrable (c'est-à-dire fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$), on peut numéroter les événements élémentaires $\omega_1, \omega_2, \ldots$. Les événements élémentaires sont deux à deux incompatibles, et pour tout événement A, on peut écrire $A = \cup_{\omega\in A}\{\omega\}$ et, d'après le deuxième axiome,*

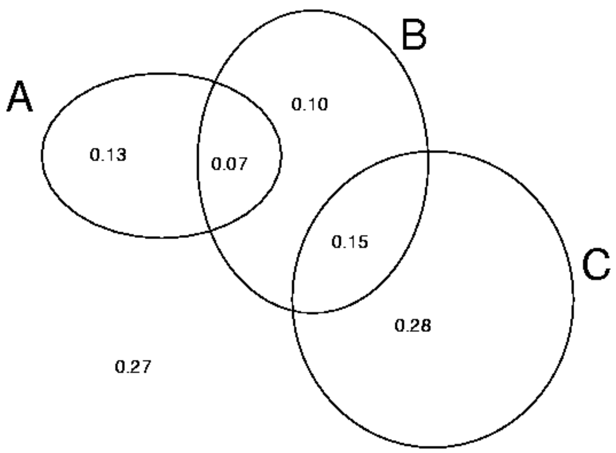
$$P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\omega)$$

Que signifie "un événement A a pour probabilité..."?
0.95 : A va très probablement se produire.
0.03 : A a très peu de chance d'être réalisé.
4.0 : incorrect.
-2 : incorrect.
0.4 : A va se produire dans un peu moins de la moitié des essais.
0.5 : une chance sur deux.
0 : aucune chance que A soit réalisé.

Proposition 26 *Soient A et B deux événements.*
1) Si A et B sont incompatibles,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
2) $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3) $P(\emptyset) = 0$.
4) Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$.
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

(preuve)

Exemple : Trois événements A, B et C sont représentés sur ce diagramme.



Calculons
- $P(A)$
- $P(B \cap C^c)$
- $P(A \cup B)$
- la probabilité pour que à la fois B et C soient réalisés
- C est réalisé, mais pas B
- exactement l'un des trois événements est réalisé.

III. La probabilité uniforme

Définition 27 *Considérons une expérience aléatoire, dont l'ensemble fondamental Ω est fini, et telle que chaque événement élémentaire a la même probabilité. On parle, dans ce cas, d'événements élémentaires équiprobables. Notons p la probabilité commune des événements élémentaires. Alors*

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p = p \times |\Omega|$$

D'où $p = P(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|}$, pour tout ω. La probabilité ainsi définie sur l'ensemble Ω s'appelle probabilité uniforme.

Proposition 28 *Dans le cadre de la probabilité uniforme, la probabilité d'un événement A se calcule facilement :*

$$P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\omega) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Attention ! Cette formule n'est valable que lorsque les événements élémentaires sont bien équiprobables.

Exemple : on lance deux dés distinguables. On modélise cette expérience à l'aide de l'ensemble des possibles $\Omega = \{(a,b), 1 \leq a, b \leq 6\} = \{1,...,6\}^2$. Pour des raisons de symétrie, les probabilités des événements élémentaires peuvent être supposées toutes égales à $1/|\Omega| = 1/36$. Calculons la probabilité de voir apparaître au moins un as. Notons A cet événement.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} \\ &= 1 - \frac{5^2}{6^2} = 11/36 = 0.6944 \end{aligned}$$

Exemple : quand on lance deux dés, la probabilité d'obtenir un 3 et un 4 est supérieure à la probabilité d'obtenir un double 6.
En effet, notons A le premier événement considéré et B le second. Visiblement, A est de cardinal 2, alors que B est de cardinal 1.

Exemple : le prince de Toscane avait constaté qu'il obtenait plus souvent 11 que 12 avec trois dés. Pourtant, le nombre de combinaisons dont la somme fait 12 est le même que le nombre de combinaisons dont la somme fait 11. Alors ? Les 6 combinaisons qui donnent 11 sont

$$\{1,4,6\},\{1,5,5\},\{2,3,6\},\{2,4,5\},\{3,3,5\},\{3,4,4\}$$

Les 6 combinaisons qui font 12 sont

$$\{1,5,6\},\{2,4,6\},\{2,5,5\},\{3,3,6\},\{3,4,5\},\{4,4,4\}$$

Nous avons le choix entre deux univers différents :
$\Omega_1 = \{\text{triplets}(a,b,c)\}$ (on distingue les dés et on note leurs résultats toujours dans le même ordre.
Ω_2 : ensemble des résultats $\{a,b,c\}$, sans préciser l'ordre d'apparition des chiffres.
Dans le cas d'Ω_1, les événements élémentaires sont équiprobables et ont tous la probabilité $1/216$... ce qui n'est pas vrai pour Ω_2. En effet, l'événement élémentaire $\{1,5,5\}$ correspond à 3 triplets $(1,5,5),(5,1,5),(5,5,1)$; sa probabilité vaut donc $3/216$. Par contre, $\{1,1,1\}$ ne correspond qu'à un triplet $(1,1,1)$ et sa probabilité vaut donc $1/216$. Comme la probabilité sur Ω_2 n'est pas uniforme, il ne suffit pas de compter le nombre de cas favorables. Finalement, on obtient 11 avec la proba $27/216$ et 12 avec la probabilité $25/216$.

CH 3. Indépendance et conditionnement

I. Probabilités conditionnelles

Exemple : on lance deux dés ($\Omega = \{1,...,6\}^2$ et probabilité uniforme). Supposons qu'on puisse savoir que le premier dé fait 3. Quelle est dans ce cas la probabilité pour que la somme des dés fasse 8 ? Comme le dé initial fait 3, il n'y a plus que 6 événements élémentaires : (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6). Comme chacun de ces événements a la même probabilité d'apparaître dans l'expérience de départ (1/36), on peut imaginer qu'ils ont toujours la même probabilité d'aparaître, soit 1/6. Dans le même temps, les autres événements élémentaires voient leur probabilité passer à 0. Et finalement, sachant que le premier dé fait trois, la probabilité pour que la somme des deux soit 8 vaut 1/6.

Définition 29 *Étant donnés deux événements A et B, avec $P(B) > 0$, on appelle probabilité de A conditionnellement à B, ou sachant B la probabilité notée $P(A|B)$ définie par*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

On peut écrire aussi $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.

Utilisation 1 : quand $P(B)$ et $P(A \cap B)$ sont faciles à calculer, on peut en déduire $P(A|B)$.
Utilisation 2 : quand $P(A|B)$ et $P(B)$ sont faciles à trouver, on peut obtenir $P(A \cap B)$.

Exemple : On veut regarder l'influence d'une surcharge pondérale sur l'hypertension.

	surcharge	poids normal
hypertension	0,10	0,10
pas d'hypertension	0,15	0,65

Soit $\Omega = \{S, \bar{S}\} \times \{H, \bar{H}\}$ l'ensemble des 4 résultats présents dans le tableau, accompagnés de leurs probabilités.
Soit A l'événement "vous avez une surcharge pondérale", B "vous faites de l'hypertension". Quelle est la probabilité $P(B|A)$?
L'événement A est constitué de deux événements élémentaires : $A = \{(S,H),(S,\bar{H})\}$. Et

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = P((S,H)) + P((S,\bar{H})) = 0,25$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,10}{0,25} = 0,4$$

Influence ?

Exemple : une urne contient r boules rouges et v boules vertes. On en tire deux, l'une après l'autre (sans remise). Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ?
Choisissons Ω qui décrit les résultats de l'expérience.

$$\Omega = \{\text{rouge, verte}\} \times \{\text{rouge, verte}\}$$

Soit A l'événement "la première boule est rouge" et B l'événement "la seconde boule est rouge".

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{r-1}{r+v-1} \cdot \frac{r}{r+v}$$

Proposition 30 *Soit B un événement tel que $P(B) > 0$. Alors la probabilité conditionnelle sachant B, $P(.|B)$, est une nouvelle probabilité.*

(preuve)

Corollaire 31 *Soit A un événement tel que $P(A) > 0$.*
1) $\forall$, $P(B^c|A) = 1 - P(B|A)$, $P(\emptyset|A) = 0$.
2) Si $B \supset A$, $P(B|A) = 1$.
3) Pour tous B et C,

$$P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(B \cap C|A)$$

4) ...

Proposition 32 *Soient $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ des événements. On peut calculer la probabilité de leur intersection en conditionnant successivement grâce à la formule :*

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = \\ P(E_1)P(E_2|E_1) \cdots P(E_n|E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1})$$

(preuve : à rendre)

Proposition 33 (Formule des probabilités totales) *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de Ω. Pour tout événement B, on a*

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

(preuve)

Cas particulier : Pour tout événement A, (A, A^c) forme une partition de Ω (le vérifier). On a donc, pour tout événement B,

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$

dès que $0 < P(A) < 1$.

Exemple : r boules rouges, v boules vertes et on tire deux boules. Quelle est la probabilité pour que la seconde boule tirée soit rouge ?
Notons A l'événement "la première boule est rouge", et B l'événement "la seconde boule est rouge".

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) \\ &= \frac{r-1}{r+v-1} \cdot \frac{r}{r+v} + \frac{r}{r+v-1} \cdot \frac{v}{r+v} \\ &= \frac{r}{r+v} \end{aligned}$$

Proposition 34 (Formule de Bayes) *Soit (A_i) une partition de Ω et B un événement de probabilité non nulle. Alors, pour tout i,*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)}$$

Preuve :

$$P(A_i|B) = P(A_i \cap B)/P(B) = P(B|A_i)P(A_i)/P(B)$$

Puis on remplace $P(B)$ par l'expression donnée par la formule des probabilités totales.

Exemple : Deux opérateurs de saisie, A et B, entrent respectivement 100 et 200 tableaux sur informatique. Les tableaux de A comportent des fautes dans 5,2% des cas et ceux de B dans 6,7% des cas. On prend un tableau au hasard. Il comporte des fautes. Quelle est la probabilité pour que A se soit occupé de ce tableau ?
Soient les événements :
$T_A =$" le tableau est entré par A",
$T_B =$" le tableau est entré par B",
$F =$" le tableau comporte des fautes".
On remarque que (T_A, T_B) forme une partition de Ω. D'après le théorème de Bayes,

$$\begin{aligned} P(T_A|F) &= \frac{P(F|T_A)P(T_A)}{P(F|T_A)P(T_A) + P(F|T_B)P(T_B)} \\ &= \frac{0.052 * 1/3}{0.052 * 1/3 + 0.067 * 2/3} = 0.279 \end{aligned}$$

Exemple : Pourquoi la file d'attente dans laquelle vous vous trouvez au supermarché avance-t-elle très souvent plus lentement que la file voisine ?
Construisons un modèle probabiliste. Soit

$$\Omega = \{A, L\} \times \{V, N\} \times \{A2, L2\}$$

où $A =$ "votre file avance normalement"
$L=$ "votre file avance lentement"
$V=$"vous regardez la file voisine"
$N=$"vous ne regardez pas la file voisine"
$A2$, $L2$ concernent la vitesse de la file voisine.
Fixons $P(L) = P(L2) = 0.20$, $P(V|A) = 0.04$, $P(V|L) = 0.95$.
On peut reposer la question sous la forme : sachant que vous observez la file voisine, quelle est la probabilité pour que celle-ci avance rapidement et la vôtre lentement ?

$$\begin{aligned} P(L \cap A2|V) &= P(L \cap A2 \cap V)/P(V) \\ &= P(A2|L \cap V)P(L \cap V)/P(V) \\ &= P(A2)P(L \cap V)/P(V) \end{aligned}$$

Or $P(L\cap V) = P(V|L)P(L) = 0.95*0.2 = 0.19$ et $P(V) = P(V|L)P(L) + P(V|A)P(A) =$
$= 0.95 * 0.2 + 0.04 * 0.8 = 0.222$. Donc

$$P(L \cap A2|V) = 0.8 * 0.19/0.222 = 0.684$$

II. Indépendance

Définition 35 *Deux événements A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*

Proposition 36 *Soient A et B des événements de probabilité non nulle. Les trois égalités suivantes sont équivalentes :*
1) $P(B|A) = P(B)$
2) $P(A|B) = P(A)$
3) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Remarque 1 : A et B sont donc indépendants si la connaissance de la réalisation de l'un n'influence pas la probabilité de l'autre.
Remarque 2 : si $P(A) = 0$, comme $P(A\cap B) \leq P(A)$, alors $P(A \cap B) = 0$ et donc la relation 3) est toujours vérifiée. Autrement dit, un événement de probabilité nulle est indépendant de tout événement (y compris de lui-même).
Remarque 3 : si $P(A) = 1$, $P(A \cup B) = 1$ et il vient $P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) = P(B)$ et la relation 3) est encore vérifiée. Donc A est indépendant de tout événement.
Remarque 4 : deux événements incompatibles A et B, avec $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, ne sont jamais indépendants. En effet, $A \cap B = \emptyset$ entraîne $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$.

Exemple : urne avec douze boules numérotées. On tire une boule. On choisit naturellement $\Omega = \{1, ..., 12\}$, muni de la probabilité uniforme. On considère les événements $A=$"tirage d'un nombre pair" et $B=$"tirage d'un multiple de 3".

$$P(A) = 1/2, \quad P(B) = 1/3, \quad P(A \cap B) = 1/6$$

Donc les événements A et B sont indépendants.

Exemple : urne avec treize boules numérotées. On tire une boule. Soit $\Omega' = \{1, ..., 13\}$, muni de la proba uniforme P'.

$$P'(A) = 6/13,\ P'(B) = 4/13,\ P'(A\cap B) = 2/13$$

Donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

explication : dans le premier cas, la proportion de multiples de 3 parmi les nombres pairs est la même que parmi les nombres impairs. Donc l'information "on a tiré un multiple de 3" n'apporte rien sur la parité du nombre. C'est différent dans le second cas.

Proposition 37 *Si A et B sont indépendants, il en est de même pour A et B^c, A^c et B, A^c et B^c.*

(preuve)

On vient de définir l'indépendance entre deux événements. De plus, on est capable de citer plusieurs événements qui ont bien l'air indépendants (ma tartine de confiture est tombée ce matin, Mozart est né il y a 250 ans, le chauffeur de métro a freiné en douceur à la station Part-Dieu hier soir quand je suis rentrée chez moi, il pleut, Jacques est allé au cinéma dimanche dernier). Plus précisément ? Si A et B sont indépendants, et A et C sont indépendants, est-ce que A est indépendant de $B \cap C$? Non.
Exemple : on jette deux dés. Soient les événements A "la somme fait 7", B "le premier dé fait 4", C "le second donne 3".

Définition 38 *Soit une famille finie d'événements $(A_i)_{1\leq i\leq n}$. Ces événements sont (mutuellement) indépendants si pour tout sous-ensemble $A_{i_1}, ..., A_{i_r}$ de taille $r \leq n$,*

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_r})$$

En pratique, pour vérifier que n événements sont indépendants, il faut calculer l'intersection de ces événements pris 2 à 2, 3 à 3,...

Définition 39 *Soit une suite infinie d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Ces événements sont (mutuellement) indépendants si tout sous-ensemble fini $A_{i_1}, ..., A_{i_r}$, extrait de cette suite, est un ensemble d'événements indépendants.*

III. Épreuves répétées

On cherche à décrire une expérience qui consiste à répéter N fois la même expérience aléatoire de manière indépendante. Soit cette *petite* expérience aléatoire, modélisée par (Ω, P). On veut décrire la *grosse* expérience formée des N répétitions.
- une expérience $\longrightarrow$ un résultat $\omega \in \Omega$
- N expériences $\longrightarrow$ une suite $(\omega_1, ..., \omega_N)$
Donc l'univers est $\Omega^N = \Omega \times \cdots \times \Omega$.

On définit la probabilité P^N sur Ω^N par

$$P^N(\omega_1, ..., \omega_N) = P(\omega_1) \times \cdots \times P(\omega_N)$$

remarque 1 : il s'agit bien d'une probabilité car

$$\begin{aligned} P^N(\Omega^N) &= \sum_{(\omega_1,...,\omega_N)\in\Omega^N} P(\omega_1) \times \cdots \times P(\omega_N) \\ &= \Big(\sum_{\omega_1\in\Omega} P(\omega_1)\Big) \cdots \Big(\sum_{\omega_N\in\Omega} P(\omega_N)\Big) = 1 \end{aligned}$$

remarque 2 : Soit A_i un événement qui ne dépend que du résultat de la i-ième expérience. Il peut s'écrire $A_i = \Omega \times \cdots \times \Omega \times A \times \cdots \times \Omega$ où A, placé en i-ième position, est une partie de Ω. Alors

$$P^N(A_i) = P(\Omega)^{N-1} \times P(A) = P(A)$$

Exemple : On réalise une suite de n épreuves indépendantes. À chaque épreuve, on observe un succès avec la probabilité $p \in]0, 1[$ ou un échec avec la probabilité $q = 1 - p$. Calculons la probabilité des événements
$A = \{$Au moins un succès parmi les n issues$\}$
$B = \{$Exactement k succès$\}$
Pour tout $i \geq 1$, notons R_i l'événement "succès à la i-ième épreuve". Bien sûr, $P(R_i) = p$.

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \Rightarrow A^c = \bigcap_{i=1}^{n} R_i^c$$

Par indépendance des épreuves, on a indépendance des R_i et donc des R_i^c et

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(R_i^c) = 1 - q^n$$

Le calcul de $P(B)$ est plus difficile. Supposons que $0 < k < n$. Chaque événement élémentaire qui constitue B est de la forme

$$B_I = \Big(\bigcap_{i\in I} R_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in J} R_i^c\Big)$$

où I est une partie de $\{1, ..., n\}$ de cardinal k et J est son complémentaire dans $\{1, ..., n\}$.

Par indépendance des épreuves, pour un tel I,

$$P(B_I) = \prod_{i\in I} P(R_i) \times \prod_{i\in J} P(R_i^c) = p^k q^{n-k}$$

On obtient, par définition de la probabilité d'un événement,

$$P(B) = \sum_{\substack{I\subset\{1,...,n\} \\ \mathrm{card}(I)=k}} P(B_I) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

La même formule est encore valable quand k vaut 0 ou n. En effet, dans le cas où $k = 0$,
$P(B) = P(R_1^c \cap \cdots \cap R_n^c) = \prod_{i=1}^n P(R_i^c) = q^n$.
Si $k = n$,
$P(B) = P(R_1 \cap \cdots \cap R_n) = \prod_{i=1}^n P(R_i) = p^n$.

exemples d'application :
- on fait un sondage et on s'intéresse à la proportion de gens qui vont au cinéma au moins une fois par semaine.
- on observe des cultures bactériennes dans des milieux identiques : combien avons-nous de tubes dans lesquels la bactérie s'est-elle développée ?
- une revue étudie la localisation de ses abonnés : province ou Île de France ?

CH 4. Variables aléatoires discrètes

- Les événements élémentaires sont parfois difficiles à décrire,
- souvent une partie seulement de l'information nous intéresse,
- et cette partie est souvent une grandeur numérique.

Définition 40 *On appelle variable aléatoire (v.a) toute fonction définie sur Ω.*

On utilise les lettres capitales de la fin de l'alphabet pour désigner les v.a., comme X, Y, Z. Soit X une v.a.. À chaque événement élémentaire ω, on fait correspondre une quantité $X(\omega)$.

Exemple : Galilée s'intéressait à la somme de trois dés. Si ce formalisme avait existé au XVII, il aurait considéré la variable X

$$\begin{aligned} X \ : \ \Omega = \{1, ..., 6\}^3 &\longrightarrow \{3, ..., 18\} \\ \omega = (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Exemple : la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ d'un événement A est définie ainsi :

$$\begin{cases} \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \text{ si } \omega \in A \\ \mathbb{1}_A(\omega) = 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$$

Il s'agit d'une application définie sur Ω qui indique si A est réalisé ou non.

I. Loi d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur un espace de probabilité (Ω, P).
Soit $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ l'ensemble des valeurs que peut prendre X. **On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable**, et on peut nommer ses éléments $x_0, x_1, \ldots$. En fait, une variable aléatoire qui ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs est dite discrète.

On note $(X = x)$ l'ensemble

$$X^{-1}(\{x\}) = \{\omega : X(\omega) = x\}$$

On a $(X = x) \subset \Omega$, il s'agit d'un événement, et on peut calculer sa probabilité.

Exemple : on lance trois fois une pièce.
$\Omega = \{F, P\} \times \{F, P\} \times \{F, P\}$, muni de la probabilité uniforme.
Soit X la v.a. égale au nombre de F obtenus.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

valeurs de X	description de l'événement
$X = 0$	$\{PPP\}$
$X = 1$	$\{FPP, PFP, PPF\}$
$X = 2$	$\{FFP, FPF, PFF\}$
$X = 3$	$\{FFF\}$

Proposition 41 *La famille des $\left(\{X = x_k\}\right)_{x_k \in X(\Omega)}$ forme une partition de Ω.*

Preuve : soit $i \neq j$ et $\omega \in \{X = x_i\} \cap \{X = x_j\}$. Alors $X(\omega) = x_i$ et $X(\omega) = x_j$, ce qui est absurde, donc $\{X = x_i\} \cap \{X = x_j\} = \emptyset$ et on a bien une famille d'événements deux à deux incompatibles.
Et la réunion de tous les $\{X = x_k\}$ est l'espace Ω tout entier, car pour tout ω, il existe $x_k \in X(\Omega)$ tel que $X(\omega) = x_k$.

Définition 42 *On appelle loi de la variable aléatoire X la donnée des probabilités*

$$p_k = P(X = x_k), \text{ pour tout } x_k \in X(\Omega)$$

Exemple : X est le nombre de Face quand on lance trois fois une pièce.
Ω est muni de la probabilité uniforme : les 2^3 triplets (a, b, c) où a, b et c sont dans $\{P, F\}$ sont équiprobables.
Donc,

$$P[X = 0] = P[\{PPP\}] = 1/8$$

$$P[X = 1] = \sum_{\omega \in \{X=1\}} P(\omega) = \sum_{\omega : X(\omega)=1} P(\omega) = 3/8$$

et $P[X = 2] = 3/8$, $P[X = 3] = 1/8$.
De plus, on peut calculer facilement :

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) = 7/8 \\ P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= 1/8 + 3/8 = 1/2 \end{aligned}$$

Exemple : la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ d'un événement A vaut 1 si ω appartient à A, 0 sinon.
L'image de Ω par cette fonction, $\mathbb{1}_A(\Omega)$, est $\{0, 1\}$. La loi de $\mathbb{1}_A$ est donnée par

$$P(\mathbb{1}_A = 1) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = P(A) = 1 - P(\mathbb{1}_A = 0)$$

Remarque : comme la suite $\left(\{X = x_k\}\right)_{x_k \in X(\Omega)}$ forme une partition de Ω, l'ensemble des p_k vérifie :

$$\sum_k p_k = 1$$

(preuve)

II. Fonction de répartition

Définition 43 *Soit X une v.a.. On appelle fonction de répartition de X la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par*

$$F(x) = P[X \leq x]$$

Exemple : X est le nombre de Face quand on lance trois fois une pièce. On a vu que la loi de X est

$$P[X = 0] = 1/8, \qquad P[X = 1] = P[X = 2] = 3/8,$$

D'où,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1/8 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 4/8 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 7/8 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Remarque : deux v.a. ayant même loi ont même fonction de répartition.

Proposition 44 *Soit F une fonction de répartition. Alors*
1) F est croissante,
2) F est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point x égale à $P[X < x]$,
3)

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

III. Loi binomiale

On répète ici la même expérience, dans les mêmes conditions et on s'intéresse à chaque fois à la réalisation d'un événement. Chacune de ces expériences s'appelle une *épreuve de Bernoulli* et se conclut par un succès (si l'événement auquel on s'intéresse est réalisé) ou un échec.

Schéma de Bernoulli :
1) Chaque épreuve a deux issues : succès [S] ou échec [E].
2) Pour chaque épreuve, la probabilité d'un succès est la même, notons $P(S) = p$ et $P(E) = q = 1 - p$.
3) Les épreuves sont indépendantes : la probabilité d'un succès ne varie pas, elle ne dépend pas des informations sur les résultats des autres épreuves.

Exemple : - on inspecte des articles manufacturés à la sortie de l'usine et on regarde si un article est défectueux ou non.
- on regarde dans la population les gens qui sont favorables à une baisse des aides sociales.
- on regarde dans la population les gens qui sont favorables à une baisse des impôts.

Exemple important : échantillon avec remise.
On considère une population avec deux catégories d'individus, A et B. On choisit de manière équiprobable un individu dans la population. On note le résultat de l'épreuve, c'est-à-dire si l'individu appartient à la catégorie A ou B. Puis on le remet dans le lot et on recommence : on choisit à nouveau un individu dans la population...
Supposons que les individus de la catégorie A sont en nombre N_A dans la population qui contient N individus. Alors pour chaque épreuve de Bernoulli, la probabilité d'avoir un individu de la catégorie A (ce que nous appellerons un succès) est $p = N_A/N$.
Le nombre X d'individus, présents dans l'échantillon, qui appartiennent à la catégorie A est une variable aléatoire, car sa valeur dépend du choix de l'échantillon, c'est-à-dire de l'expérience aléatoire.

exemple numérique : on lance une pièce de monnaie 5 fois. On dit qu'on a un succès quand FACE sort, sinon un échec. Soit X le nombre de succès (nombre de FACE). Voici plusieurs simulations de X : 3, 4, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 2.
On répète 1000 fois ces paquets de 5 lancers. Voici ce qu'on observe (par exemple) :

nbr de FACE	0	1	2	3	4	5
nbr d'observations	26	150	341	317	143	23

Théorème 45 *Soit un schéma de Bernoulli, où p est la probabilité d'un succès à une épreuve de Bernoulli et n est le nombre d'épreuves de Bernoulli effectuées. L'univers est*

$$\Omega = \{S, E\} \times \cdots \times \{S, E\} = \{S, E\}^n$$

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de succès. La loi de X s'appelle la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et elle est donnée

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ pour } k = 0, ..., n$$

Preuve : Comme au chapitre précédent, on a tout d'abord l'espace de probabilité (Ω_0, P_0) associé à une épreuve de Bernoulli.

$$\Omega_0 = \{S, E\}, \qquad P_0(S) = p, \qquad P_0(E) = 1 - p$$

Puis on considère l'espace de probabilité (Ω, P) associé au schéma de Bernoulli, c'est-à-dire aux n répétitions indépendantes de la même épreuve. Soit $\omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\} \in \Omega^n$, alors, par indépendance,

$$P(\omega) = P_0(\omega_1) \times \cdots \times P_0(\omega_n)$$

Soit $0 \leq k \leq n$. Calculons $P(X = k)$. Les événements élémentaires qui constituent l'événement $X = k$ sont en fait les suites de longueur n de la forme $\omega =$[SSES...E] avec k S et $n - k$ E. Un tel événement élémentaire a la probabilité

$$P(\omega) = P(\omega_1) \times \cdots \times P(\omega_n) = p^k (1 - p)^{n-k}$$

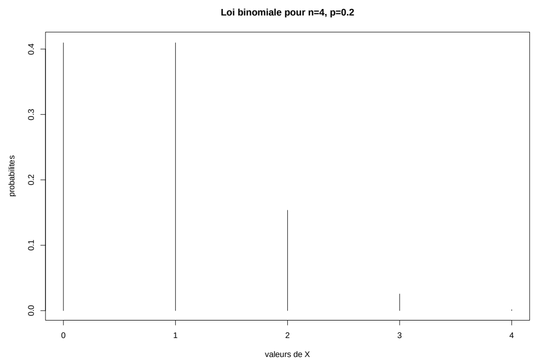
Combien existe-t-il de suites à n éléments avec k S et $n-k$ E ?
Il en existe $\binom{n}{k}$, le nombre de combinaisons de k S parmi n éléments. Finalement,

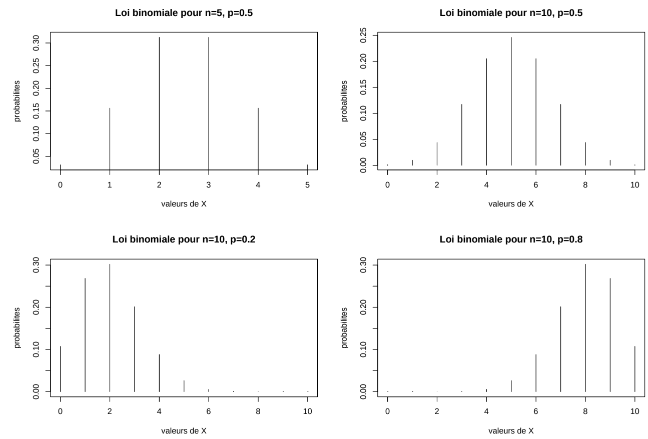
$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{\omega : X(\omega) = k} P(\omega) \\ &= \text{card}(\{\omega : X(\omega) = k\})\ p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \end{aligned}$$

Exemple : on s'intéresse à l'infection des arbres d'une forêt par un parasite. Soit p la proportion d'arbres infectés. On étudie 4 arbres. Si un arbre est infecté, on dit qu'on a un succès, sinon un échec. Soit X le nombre d'arbres infectés, parmi les 4. Alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4, p)$.

$P(X = 0) = \binom{4}{0} p^0 q^4 = q^4$,
$P(X = 1) = \binom{4}{1} p^1 q^3 = 4pq^3$,
$P(X = 2) = \binom{4}{2} p^2 q^2 = 6p^2 q^2$,
$P(X = 3) = \binom{4}{3} p^3 q^1 = 4p^3 q$,
$P(X = 4) = \binom{4}{4} p^4 = p^4$.

Pour $p = 1/5$, on obtient





Valeurs exactes pour $n = 5$ et $p = 1/2$:

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(X=5) = 0.03125 \\ P(X=1) &= P(X=4) = 0.15625 \\ P(X=2) &= P(X=3) = 0.3125 \end{aligned}$$

à comparer aux fréquences observées sur 1000 observations.

III. Lois usuelles

1) Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

C'est la loi de la v.a. associée à une épreuve de Bernoulli quand la proba d'un succès est p.
Soit X la v.a. qui vaut 1 en cas de succès, 0 sinon. Alors
$P(X = 1) = P(S) = p$
$P(X = 0) = P(E) = q = 1 - p$.

remarque : $P(X = 0) + P(X = 1) = 1$
remarque : c'est la loi de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ de l'événement A. On a
$P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$ donc la loi de $\mathbb{1}_A$ est la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(P(A))$.

2) Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

C'est la loi du nombre X de succès quand on répète n fois la même épreuve de Bernoulli, dont la probabilité d'un succès est p.

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, pour $k = 0, ..., n$

remarque : par la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$$

3) Loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$

On dit que X suit la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$ si

$$P(X = k) = 1/n, \text{ pour tout } k \in \{1, ..., n\}$$

Dans ce cas, les événements $[X = k]$ sont équiprobables.
Exemple : urne contenant 12 boules numérotées. On pioche une boule. Soit X la v.a. égale à son numéro. Alors X suit la loi uniforme sur $\{1, ..., 12\}$.
Exemple : on lance un dé.

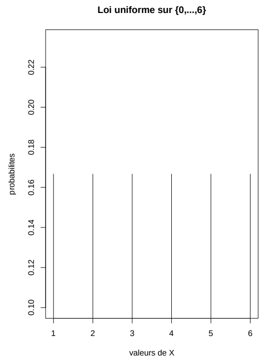
4) Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

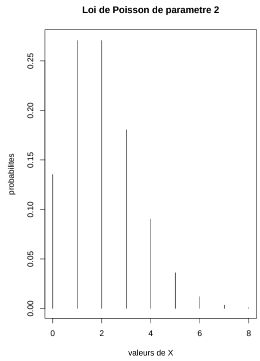
On dit que X est une v.a. de loi de Poisson de paramètre λ si elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour tout $k \geq 0$,

$$P(X = k) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$$

Remarque : on a $\sum_k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$, d'où

$$\sum_k P(X = k) = 1$$





Utilisation de la loi de Poisson :
On utilise la loi de Poisson comme approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ quand p est petit, mais n grand.
En pratique, l'approximation est bonne dès que $n \geq 50$ et $p \leq 0.1$. Elle est d'autant meilleure que n est grand et p petit avec $np \leq 10$.

Plus formellement, si (p_n) est une suite de réels de $[0, 1]$ vérifiant $np_n \longrightarrow \lambda$ quand $n \to \infty$, alors

$$\binom{n}{k}(p_n)^k(1-p_n)^{n-k} \longrightarrow \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$$

quand $n \to \infty$ (preuve). Ainsi, pour n grand et p petit, $P(X = k)$ est proche de $\exp(-np)\frac{(np)^k}{k!}$.

Autre manière d'introduire la loi de Poisson :

On utilise la loi de Poisson quand on étudie des répartitions temporelles ou spatiales.
ex : loi du nombre de tâches qui arrivent à un serveur informatique pendant une minute.
ex : loi du nombre de personnes qui arrivent aux urgences des HCL pendant une heure.
ex : loi du nombre de suicides par an.
ex : loi de la quantité de plancton dans un litre d'eau de mer.
ex : loi du nombre de bombes qui tombent dans un carré de 25m^2, partie d'un champ de tir.

Exemple : pour étudier le nombre d'appels au standard d'une grande entreprise de VPC, on effectue un comptage pendant 5 minutes. En fait, le jour du test, le standard est ouvert de 7H00 à 23H40 et reçoit 1500 appels. Supposons que les appels sont répartis au cours de la journée indépendamment les uns des autres et de manière uniforme. Quelle est la loi du nombre X d'appels reçus pendant les 5 minutes du test.

Nous nous intéressons au nombre d'appels reçus pendant le test. Ainsi, la population (les 1500 appels de la journée) est divisée en deux catégories : les appels qui arrivent pendant ces 5 min et les autres. Par hypothèse, la probabilité pour qu'un appel arrive pendant ces 5 minutes vaut 1/200.

Schéma de Bernoulli : à chaque appel, on associe un succès s'il est arrivé pendant les 5 min, un échec sinon. Compter le nombre d'appels reçus pendant le test revient à compter le nombre de succès. Et comme les trois conditions du schéma de Bernoulli sont vérifiées, ce nombre suit une loi binomiale $\mathcal{B}(1500, 1/200)$. Nous sommes dans le cadre de l'approximation par la loi de Poisson, car $1500 > 50$ et $1/200 < 0.1$. La loi de X est donc proche de la loi de Poisson $\mathcal{P}(1500/200)$, soit $\mathcal{P}(7.5)$. On peut calculer par exemple :
$P(X \leq 5) = 0.24$,
$P(X > 12) = 0.04267$,
$P(X = 7) = 0.146$

5) Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

On reprend le cadre du schéma de Bernoulli : on répète la même épreuve de Bernoulli, les répétitions étant indépendantes les unes des autres, jusqu'à l'obtention du premier succès. La loi géométrique est la loi du nombre Y d'essais nécessaires. Ainsi Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$P(Y = n) = p(1-p)^{n-1}$$

En effet, notons R_i l'événement "succès à la i-ième épreuve". L'événement $\{Y = n\}$ peut s'écrire

$$\{Y = n\} = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1}(R_i)^c\right) \cap R_n$$

Et par indépendance des épreuves, on obtient facilement l'expression de $P(Y = n)$.

Remarque :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P(Y = n) &= p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1} \\ &= p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k \\ &= p\frac{1}{1-(1-p)} = 1\end{aligned}$$

CH 5. Moments des v.a. discrètes

I. Espérance

Définition 46 *Soit X une v.a. sur un espace (Ω, P). On appelle espérance de X le réel noté $E[X]$ donné par*

$$E[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$$

Remarque : cette somme n'a pas toujours un sens quand $X(\Omega)$ est infini. Dans ce cas, X a une espérance si

$$\sum_{k \in X(\Omega)} |k|P(X = k) < \infty$$

L'espérance d'une v.a. est la moyenne des valeurs que peut prendre X, pondérée par les probabilités de ces valeurs. On appelle souvent l'espérance tout simplement moyenne de X : elle correspond à une valeur moyenne autour de laquelle sont réparties les valeurs que peut prendre X.
L'espérance ne dépend de X qu'à travers sa loi : deux variables qui ont même loi ont même espérance. On peut donc commencer par calculer l'espérance des lois usuelles.

exemple 1 : v.a. constante
X est constante, égale à c, si $P(X = c) = 1$. Dans ce cas, $E[X] = c.P(X = c) = c$

exemple 2 : Loi de Bernoulli
Soit X une v.a. de loi $\mathcal{B}(p)$. Alors X prend les valeurs 0 ou 1 et on a : $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.

$$E[X] = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) = p$$

exemple 3 : Loi binomiale
Soit X une v.a. de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Alors X est à valeurs dans $\{0, ..., n\}$ et

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k.P(X = k) = np$$

exemple 4 : Loi uniforme
Soit X une v.a. de loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$. La v.a. X prend chacune de ces valeurs de manière équiprobable ; l'espérance est dans ce cas la moyenne arithmétique des valeurs que peut prendre X.

$$E[X] = \frac{n+1}{2}$$

exemple 5 : Loi de Poisson
Soit X une v.a. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors $E[X] = \lambda$.

exemple 6 : Loi géométrique
Soit X une v.a. de loi $\mathcal{G}(p)$. Alors $E[X] = 1/p$.

Remarque : il faut toujours penser l'espérance comme une valeur moyenne de X. En particulier, si une v.a. X est positive (i.e. si elle ne prend que des valeurs positives), alors l'espérance doit être positive. De même, si X prend ses valeurs entre 0 et 1, son espérance doit être comprise entre 0 et 1.

Proposition 47 (Théorème du transfert) *Soit X une v.a. et f une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors*

$$E[f(X)] = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)P(X = k)$$

(preuve)

Exemple : soit X le résultat d'un lancer de dé.

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X = k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k^2 = 91/6$$

Proposition 48 (linéarité) *Soient X une v.a. et a, b deux réels. Alors*

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

(preuve)

II. Variance et écart-type

Définition 49 *On appelle variance d'une v.a. X la quantité*

$$\mathrm{Var}[X] = E\Big[(X - E[X])^2\Big] = E[X^2] - E[X]^2$$

L'écart-type de X, noté $\sigma(X)$ est défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$$

Remarque : $\sigma=$ sigma minuscule.
Remarque : les deux expressions données dans la définition de la variance sont égales. En effet, soit $A = E\Big[(X - E[X])^2\Big]$. Alors,

$$A = E\Big[X^2 - 2E[X]X + E[X]^2\Big]$$

Or par linéarité de l'espérance, il vient

$$A = E[X^2] + E[-2E[X]X] + E[E[X]^2]$$

Comme $E[X]$ est une constante,

$$A = E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2$$

d'où le résultat.

Interprétation : l'écart-type (ou la variance) mesure la dispersion de la v.a. X autour de sa valeur moyenne $E[X]$ (exemple).

Proposition 50 *Soit X une v.a. et a, b deux réels. On a*

$$\mathsf{Var}[aX+b] = a^2\mathsf{Var}[X]$$

(preuve)

Proposition 51

$$\mathsf{Var}[X] = 0 \Longleftrightarrow X \text{ est constante égale à } E[X]$$

(preuve)

exemple 1 : X de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On a $E[X^2] = E[X] = p$. Donc $\mathsf{Var}[X] = p(1-p)$.

exemple 2 : X de loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Alors $\mathsf{Var}[X] = np(1-p)$.

exemple 3 : X de loi uniforme sur $\{1,...,n\}$. On a

$$\mathsf{Var}[X] = \frac{(n-1)(n+1)}{12}$$

exemple 4 : Loi de Poisson
Soit X une v.a. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors $\mathsf{Var}[X] = \lambda$.

exemple 5 : Loi géométrique
Soit X une v.a. de loi $\mathcal{G}(p)$. Alors $\mathsf{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$ (admis).