G.I.M. 1$^{\text{ère}}$ ANNÉE S.1 2014-2015

T.D. de Mathématiques n° 2

Nombres complexes

I. Ecrire sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{i-1}{i} - \frac{2}{(1-i)^2} \qquad z_2 = \frac{1+\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}-i} \qquad z_3 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} \qquad z_4 = \frac{(2+i)^2+(2-i)^2}{(2+i)^2-(2-i)^2}$$

II. z étant un nombre complexe, montrer que le nombre $Z = \frac{\bar{z}}{z} + \frac{z}{\bar{z}}$ est un nombre réel.

III. Résoudre :

1) les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

$$a) \quad z^2 + z\bar{z} = 0 \qquad b) \quad z^2 = \bar{z} \qquad c) \quad z - 2\bar{z} - 5 = -6i$$

2) les systèmes d'équations suivants dans $\mathbb{C}^2$.

$$\begin{cases} iz - 3z' = 2-3i \\ (1+i)z + 2iz' = 5-i \end{cases} \qquad \begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$$

IV. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes :

$$z_1 = (1+i)^{2014} \qquad z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{(1-i\sqrt{3})^5} \qquad z_3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \qquad z_4 = \frac{1-e^{i\alpha}}{1+e^{i\alpha}}$$

V. En calculant de deux manières différentes le nombre complexe $z = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2(1-i)}$.
déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

VI. Linéariser : $A = \cos x \sin^4 x \qquad B = \sin^5 2x$.

VII. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que :

1) $\frac{z+2i}{z-4i} \in \mathbb{R}$
2) $(i-1)z(\bar{z}-1) \in i\mathbb{R}$
3) $z, \frac{1}{z}$ et $1-z$ aient même module.

VIII. Calculer les racines carrées des nombres complexes :

$$Z_1 = 2(1+i) \qquad Z_2 = -8i \qquad Z_3 = 46 - 14i\sqrt{3}$$

IX. Résoudre les équations :

1) $z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$

2) $(1 - i\sqrt{3})z^2 - 4z + 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

3) $z^2 = (1 + i\sqrt{3})\bar{z}$

4) $(z^2 + 4z + 1)^2 + (3z + 5)^2 = 0$

Déduire de l'équation 4) l'existence de quatre réels a, b, c et d tels que :
$(z^2 + 4z + 1)^2 + (3z + 5)^2 = (z^2 + az + b)\,(z^2 + cz + d)$