T.D. de Mathématiques n° 5

Polynômes

I. Effectuer la division euclidienne de A par B :

$$A = X^{17} - 3X^{10} + 2X - 1 \qquad B = X^4 - 1$$

$$A = iX^4 + (2+i)X^3 + (3-2i)X^2 \qquad B = iX^2 + (1-i)X + 1 + i$$

$$A = X^5 \cos 3\theta - X^4 \cos 4\theta - X \cos\theta + 1 \qquad B = X^2 - 2X\cos\theta + 1$$

II. Montrer que le polynôme B divise le polynôme A :

$$B = 2X^3 + 3X^2 + X \quad A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

III. Les restes des divisions euclidiennes de A par $X-1$, $X-3$ et $X-5$ sont respectivement $33, 1$ et 1. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B.
$B = X^3 - 9X^2 + 23X - 15$

IV. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre n :

$$A = 2X^5 + 1 \qquad B = X^2 + 2X + 1 \qquad n = 4$$

$$A = 1 + iX + X^2 \qquad B = 1 + X + iX^2 \qquad n = 2$$

$$A = 1 - X\cos\theta \qquad B = 1 - 2X\cos\theta + X^2 \qquad n = 2$$

V. Un polynôme A a pour reste R_3 dans la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 par B. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B.

$$B = X^3 + 2X^2 - X - 2 \qquad R_3 = 5 + 2X - X^2$$

$$B = X^3 - X^2 + 1 \qquad R_3 = 1 + X^4$$

VI. Déterminer les réels a et b tels que le polynôme $P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + aX + b$ admette $1+i$ comme racine.
En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

VII. Factorisation.

1) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme : $P_1 = X^4 - 1$
2) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$P_2 = 2X^4 + X^3 + 3X^2 + X + 1 \qquad P_3 = (X^2 + 3X)^2 + (3X+5)^2$$

VIII. Soit $P = X^5 - 3X^4 - 4X^3 + 16X^2 + 27X + 11$.
Montrer que -1 est racine de P, puis donner son ordre de multiplicité.
En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ puis $\mathbb{C}[X]$.
Ecrire la formule de Taylor au point -1 pour P.

IX. a, b, c désignant les trois racines du polynôme $P = X^3 - 2X^2 - 6X + 4$ calculer les sommes suivantes :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \\ T &= \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \end{aligned}$$

X. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} xyz = 2 \\ \dfrac{yz}{x} + \dfrac{zx}{y} + \dfrac{xy}{z} = 2 \\ xy + yz + zx = 0 \end{cases}$$