G.I.M. $1^{\text{ère}}$ ANNÉE S2 2014-2015

T.D. de Mathématiques n° 3

Développements limités.

I. Calculer les développements limités suivants :

$$\begin{array}{lll}
dl_8(0) & f_1(x) & = (\cos x - 1)(\sin x - x) \\
dl_{14}(0) & f_2(x) & = \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3} \\
dl_5(0) & f_3(x) & = \sqrt{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\
dl_4(0) & f_4(x) & = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} \\
dl_3(0) & f_5(x) & = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan^2 x} \\
dl_5(1) & f_6(x) & = \dfrac{x-1}{\ln x} \\
dl_6(\frac{\pi}{4}) & f_7(x) & = \ln(1+\tan x) \\
dl_5(0) & f_8(x) & = \text{Arctan}\, e^x
\end{array}$$

II. Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^{\frac{x}{\sin x}}$.

1) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0.
2) (C_f) est la courbe représentative de f et (Γ) la courbe d'équation : $y = e + \dfrac{e}{6}x^2$. Montrer que les courbes (C_f) et (Γ) sont tangentes au point A d'abscisse 0 puis étudier, au voisinage de A la position de C_f par rapport à (Γ).

III. Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{\text{Arctan}\,(\tan^2 x)}\right)$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)^4(\cos^2 x + 2\ln\sin x)$

3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left((\sin x)^{\tan x}\right)$ 4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^x$

IV. Etudier les branches infinies des courbes (C_i) d'équations :

$$(C_1) : y = (x^3+3)\ln\frac{x+2}{x} \qquad (C_2) : y = (x+1)^2\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}$$