T.D. de Mathématiques n° 4

Matrices.

I. On donne les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer les matrices X et Y telles que : $\begin{cases} X - Y & = A \\ X + 2Y & = B \end{cases}$

II. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Trouver toutes les matrices X et Y à coefficients réels telles que : $AX = A$ et $YA = A$.

III. Déterminer toutes les matrices carrées B d'ordre 2 telles que : $A\,B = 0$.

$$1) \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad 2) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

IV. On considère pour tout x réel la matrice $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

1) x et y étant 2 réels, calculer le produit : $A(x) \cdot A(y)$
2) x étant un réel, calculer : $[A(x)]^n \quad n \in \mathbb{Z}$

V. Soient les matrices à cœfficients complexes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices suivantes : $A^2 + B^2 + C^2$, AB, BA, puis $AB - BA$.

VI. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & -4 \end{pmatrix}$

1) Montrer que la matrice A vérifie la relation : $A^3 - 7A^2 - 32A + 68I_3 = 0$.
   En déduire que A est une matrice inversible puis donner A^{-1}.
2) Calculer les intensités des trois courants i_1, i_2 et i_3 qui circulent dans les trois branches du circuit ci-dessous, sachant qu'ils sont définis par les trois relations suivantes :

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ 10i_2 = 24 - 2i_1 \\ 10i_2 = 10 + 4i_3 \end{cases}$$