G.I.M. 1ère ANNÉE S2 2014-2015

T.D. de Mathématiques n° 5

Déterminants et systèmes.

I. Calculer les déterminants suivants, a, b, c et d désignant quatre réels :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \quad D_6 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

II. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

2) En déduire la résolution du système : $(S) \quad \begin{cases} x - 3y - 3z = 1 \\ -x - y - 3z = 0 \\ x + 5y + 7z = 1 \end{cases}$

III. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ -3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

1) La matrice A est-elle inversible ?

2) Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 5x + y - z = 3 \\ -4x + 3y + 4z = 1 \\ -3x + 7y + 7z = 5 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ -4x + 3y + 4z = 0 \\ -3x + 7y + 7z = -1 \end{cases}$$

IV. Résoudre les systèmes linéaires suivants : $(a \in \mathbb{R})$

$$(S_1) \begin{cases} 4x - 3y + 9z = 1 \\ -3x + 4y + 9z = 0 \\ -3x + 3y - 8z = 1 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ 2x - 2y + z - 3t = 1 \\ -x + y + z - 2t = -2 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \\ x + 7y - 4z + 11t = a \end{cases} \qquad (S_4) \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$