G.I.M. 1$^{\text{ère}}$ ANNÉE S2 2014-2015

T.D. de Mathématiques n° 6

Transformées de Laplace

I. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ f(x) = x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ f(x) = 4 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

1) en utilisant la définition de cette transformée.
2) après avoir transformé $f(x)$ à l'aide de la fonction U.
3) Calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\, f(x)\, dx.$

II. Calculer les transformées de Laplace des fonctions f_i suivantes :

$$f_1(x) = U(x)\,(3e^{5x} - 2x^3 + xe^{2x}) \qquad f_2(x) = U(x)\,x\,\sin^2 x$$

$$f_3(x) = \sin\,(3x - \frac{3\pi}{4})\,U(x - \frac{3\pi}{4}) \qquad f_4(x) = U(x)\,\sin\,(3x - \frac{3\pi}{4})$$

$$f_5(x) = U(x)\,x\,e^{3x}\,\sin^2 x \qquad f_6(x) = e^{-x}\,U(x-1) + \cos^2 x\,U(x - \pi)$$

III. Déterminer les originaux des fonctions F_i suivantes :

$$F_1(p) = \frac{-16}{(p+1)(p-3)^3} \qquad F_2(p) = \frac{-16}{(p+1)(p-3)^3}\,e^{-2p}$$

$$F_3(p) = \frac{3p^3 - 7p^2 + 3p - 2}{(p^2 - 2p - 3)(p^2 + 1)} \qquad F_4(p) = \frac{(p^2+4)(2p+10)}{p^2(p^2+9)}$$

$$F_5(p) = \frac{p+3}{p^2+p+2} \qquad F_6(p) = \frac{p-3}{(p^2 - 6p + 10)^2}$$

$$F_7(p) = \ln\frac{p+1}{p+3} \qquad F_8(p) = \frac{1}{p}\ln\frac{p+1}{p+3}$$

IV. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si} \quad x < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi \quad (k \in \mathbb{N}) \\ f(x) = \sin x & \text{si} \quad k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

V. Sur $\mathbb{R}^+$ déterminer la fonction causale y solution de l'éqution différentielle :

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = -16\,x\,e^{3x} + 10\,\sin x \\ y(0) = 6 \quad y'(0) = -2 \end{cases}$$

VI. Déterminer les fonctions causales y_1 et y_2 solutions du système d'équations différentielles suivant lorsque $x \geq 0$.

$$\begin{cases} y_1' + y_2' & = x \\ y_1'' - y_2 & = e^{-x} \\ y_1(0) = 3 \quad y_1'(0) = -2 \quad y_2(0) = 0 \end{cases}$$

VII . Déterminer la fonction causale f vérifiant :

$$\begin{cases} f'(x) = 10 - 5\displaystyle\int_0^x f(t)\,\cos 2(x-t)dt \\ f(0) = 2 \qquad\qquad (x \geq 0) \end{cases}$$