

# Quelques développements combinatoires autour des groupes de Coxeter et des partitions d'entiers

Mathias Pétréolle

ICJ

25 Novembre 2015

- 1 Introduction
- 2 Formules de type Nekrasov–Okounkov
- 3 Une généralisation grâce à la décomposition de Littlewood
- 4 Éléments cycliquement pleinement commutatifs

- 1 Introduction
- 2 Formules de type Nekrasov–Okounkov
- 3 Une généralisation grâce à la décomposition de Littlewood
- 4 Éléments cycliquement pleinement commutatifs

# Partitions

Une **partition**  $\lambda$  de  $n$  est une suite finie et décroissante d'entiers positifs  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  telle que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$ . On représente usuellement une partition par son diagramme de Ferrers.

Une **partition**  $\lambda$  de  $n$  est une suite finie et décroissante d'entiers positifs  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  telle que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$ . On représente usuellement une partition par son diagramme de Ferrers.



Figure: Le diagramme de Ferrers de  $\lambda = (5, 4, 3, 3, 1)$

# Partitions

Une **partition**  $\lambda$  de  $n$  est une suite finie et décroissante d'entiers positifs  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  telle que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$ . On représente usuellement une partition par son diagramme de Ferrers.

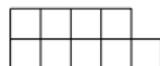


Figure: Le diagramme de Ferrers de  $\lambda = (5, 4, 3, 3, 1)$

# Partitions

Une **partition**  $\lambda$  de  $n$  est une suite finie et décroissante d'entiers positifs  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  telle que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$ . On représente usuellement une partition par son diagramme de Ferrers.



Figure: Le diagramme de Ferrers de  $\lambda = (5, 4, 3, 3, 1)$

# Partitions

Une **partition**  $\lambda$  de  $n$  est une suite finie et décroissante d'entiers positifs  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  telle que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$ . On représente usuellement une partition par son diagramme de Ferrers.

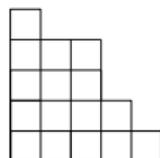


Figure: Le diagramme de Ferrers de  $\lambda=(5,4,3,3,1)$

# Partitions

Une **partition**  $\lambda$  de  $n$  est une suite finie et décroissante d'entiers positifs  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  telle que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$ . On représente usuellement une partition par son diagramme de Ferrers.

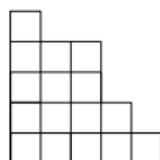


Figure: Le diagramme de Ferrers de  $\lambda = (5, 4, 3, 3, 1)$

# Partitions

Une **partition**  $\lambda$  de  $n$  est une suite finie et décroissante d'entiers positifs  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  telle que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$ . On représente usuellement une partition par son diagramme de Ferrers.

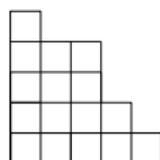


Figure: Le diagramme de Ferrers de  $\lambda=(5,4,3,3,1)$

Une question naturelle serait de compter, à  $n$  fixé, le nombre de partitions de  $n$ .

On peut cependant calculer la série génératrice des partitions qui est :

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{|\lambda|} &= \underbrace{(1 + x + x^2 + \dots)}_{\text{parts de taille 1}} \underbrace{(1 + x^2 + x^4 + \dots)}_{\text{parts de taille 2}} \underbrace{(1 + x^3 + x^6 + \dots)}_{\text{parts de taille 3}} \dots \\ &= \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - x^k}\end{aligned}$$

On peut cependant calculer la série génératrice des partitions qui est :

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{|\lambda|} &= \underbrace{(1 + x + x^2 + \dots)}_{\text{parts de taille 1}} \underbrace{(1 + x^2 + x^4 + \dots)}_{\text{parts de taille 2}} \underbrace{(1 + x^3 + x^6 + \dots)}_{\text{parts de taille 3}} \dots \\ &= \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - x^k}\end{aligned}$$

Une question générale : relier les coefficients du produit eulérien (et ses puissances) avec des objets combinatoires

# Longueurs d'équerres et deux statistiques

La notion d'**équerre** d'une partition est cruciale.

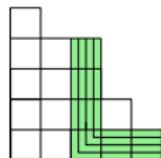


Figure: L'équerre issue de la case (1, 3)

# Longueurs d'équerres et deux statistiques

La notion d'**équerre** d'une partition est cruciale.

1					
4	2	1			
5	3	2			
7	5	4	1		
9	7	6	3	1	

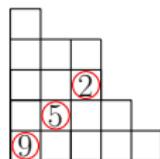
**Figure:** Les longueurs d'équerres de  $\lambda = (5, 4, 3, 3, 1)$

On définit :

- $\mathcal{H}_t(\lambda)$  le multi-ensemble des longueurs d'équerres multiples de  $t$

# Longueurs d'équerres et deux statistiques

La notion d'**équerre** d'une partition est cruciale.



–

**Figure:** Les longueurs d'équerres principales de  $\lambda = (5, 4, 3, 3, 1)$

On définit :

- $\mathcal{H}_t(\lambda)$  le multi-ensemble des longueurs d'équerres multiples de  $t$

# Longueurs d'équerres et deux statistiques

La notion d'**équerre** d'une partition est cruciale.

+				
+	+	+		
+	+	-		
+	-	-	-	
-	-	-	-	-

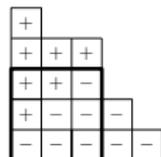
**Figure:** Le diagramme de Ferrers de  $\lambda = (5, 4, 3, 3, 1)$  et le signe  $\varepsilon_h$  de ses cases

On définit :

- $\mathcal{H}_t(\lambda)$  le multi-ensemble des longueurs d'équerres multiples de  $t$
- $\varepsilon_h = \begin{cases} +1 & \text{si } h \text{ est strictement au dessus de la diagonale} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

# Longueurs d'équerres et deux statistiques

La notion d'**équerre** d'une partition est cruciale.



**Figure:** Le diagramme de Ferrers de  $\lambda = (5, 4, 3, 3, 1)$  et le signe  $\varepsilon_h$  de ses cases

On définit :

- $\mathcal{H}_t(\lambda)$  le multi-ensemble des longueurs d'équerres multiples de  $t$
- $\varepsilon_h = \begin{cases} +1 & \text{si } h \text{ est strictement au dessus de la diagonale} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$
- $\delta_\lambda = \begin{cases} +1 & \text{si le carré de Durfee de } \lambda \text{ est pair} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit  $t \geq 2$  un entier positif. Une partition est un **t-core** si son ensemble de longueurs d'équerres **ne contient pas  $t$** . C'est équivalent au fait que son ensemble de longueurs d'équerres ne contienne aucun multiple entier de  $t$ , c'est-à-dire  $\mathcal{H}_t(\lambda) = \emptyset$ .

Soit  $t \geq 2$  un entier positif. Une partition est un **t-core** si son ensemble de longueurs d'équerres **ne contient pas  $t$** . C'est équivalent au fait que son ensemble de longueurs d'équerres ne contienne aucun multiple entier de  $t$ , c'est-à-dire  $\mathcal{H}_t(\lambda) = \emptyset$ .

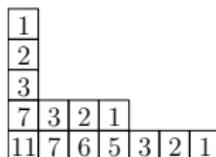


Figure: Un 4-core

[Nakayama](#) (1940) : introduction et conjectures liées à la théorie des représentations

[Nakayama](#) (1940) : introduction et conjectures liées à la théorie des représentations

[Garvan-Kim-Stanton](#) (1990) : fonction génératrice, preuve des congruences de Ramanujan

[Nakayama](#) (1940) : introduction et conjectures liées à la théorie des représentations

[Garvan-Kim-Stanton](#) (1990) : fonction génératrice, preuve des congruences de Ramanujan

[Ono](#) (1994) : stricte positivité du nombre de  $t$ -cores

[Nakayama](#) (1940) : introduction et conjectures liées à la théorie des représentations

[Garvan-Kim-Stanton](#) (1990) : fonction génératrice, preuve des congruences de Ramanujan

[Ono](#) (1994) : stricte positivité du nombre de  $t$ -cores

[Anderson](#) (2002), [Olsson-Stanton](#) (2007) : étude des partitions à la fois  $t$  et  $s$ -cores

[Nakayama](#) (1940) : introduction et conjectures liées à la théorie des représentations

[Garvan-Kim-Stanton](#) (1990) : fonction génératrice, preuve des congruences de Ramanujan

[Ono](#) (1994) : stricte positivité du nombre de  $t$ -cores

[Anderson](#) (2002), [Olsson-Stanton](#) (2007) : étude des partitions à la fois  $t$  et  $s$ -cores

[Han](#) (2009) : développement de puissances de la fonction  $\eta$  en termes de longueurs d'équerres.

# Fonction $\eta$ de Dedekind

On définit la **fonction êta de Dedekind** comme  $\eta(x) = x^{1/24} \prod_{k \geq 1} (1 - x^k)$

Cette fonction  $\eta$  est une forme modulaire de poids  $1/2$ .

# Fonction $\eta$ de Dedekind

On définit la **fonction êta de Dedekind** comme  $\eta(x) = x^{1/24} \prod_{k \geq 1} (1 - x^k)$

Cette fonction  $\eta$  est une forme modulaire de poids  $1/2$ .

## Conjecture de Lehmer (1947)

Tous les coefficients du développement de Taylor de  $\eta^{24}$  sont non nuls.

# Formule de Macdonald en type $\tilde{A}$

Macdonald (1972) : généralisation des formules de Weyl pour les systèmes de racines affines

# Formule de Macdonald en type $\tilde{A}$

**Macdonald** (1972) : généralisation des formules de Weyl pour les systèmes de racines affines

## Théorème (Macdonald, 1972)

*Pour tout entier impair  $t$ , on a :*

$$\eta(x)^{t^2-1} = c_0 \sum_{(v_0, v_1, \dots, v_{t-1})} \prod_{i < j} (v_i - v_j) x^{(v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_{t-1}^2)/2t}$$

*où la somme porte sur les  $t$ -uplets d'entiers  $(v_0, \dots, v_{t-1}) \in \mathbb{Z}^t$  tels que  $v_0 + \dots + v_{t-1} = 0$  et  $v_i \equiv i \pmod{t}$ .*

Théorème (Nekrasov-Okounkov, 2006 ; Westbury, 2006 ; Han, 2009)

*Pour tout nombre complexe  $z$ , on a :*

$$\prod_{k \geq 1} (1 - x^k)^{z-1} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left(1 - \frac{z}{h^2}\right)$$

Théorème (Nekrasov-Okounkov, 2006 ; Westbury, 2006 ; Han, 2009)

Pour tout nombre complexe  $z$ , on a :

$$\prod_{k \geq 1} (1 - x^k)^{z-1} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left(1 - \frac{z}{h^2}\right)$$

Idée de la preuve :

- remplacer  $z$  par  $t^2$  où  $t$  est un entier
- utiliser une **bijection** et l'identité de Macdonald précédente
- conclure pour tout complexe par **polynômialité**

- 1 Introduction
- 2 Formules de type Nekrasov–Okounkov
- 3 Une généralisation grâce à la décomposition de Littlewood
- 4 Éléments cycliquement pleinement commutatifs

# Une formule de Macdonald en type $\tilde{C}$

## Théorème (Macdonald, 1972)

Pour tout entier  $t \geq 2$ , on a :

$$\eta(X)^{2t^2+t} = c_1 \sum \prod_i v_i \prod_{i < j} (v_i^2 - v_j^2) X^{\|v\|^2/4(t+1)}$$

où la somme porte sur les  $t$ -uplets d'entiers  $(v_1, \dots, v_t) \in \mathbb{Z}^t$  tels que  $v_i \equiv i \pmod{2t+2}$

# Une formule de Macdonald en type $\tilde{C}$

## Théorème (Macdonald, 1972)

Pour tout entier  $t \geq 2$ , on a :

$$\eta(X)^{2t^2+t} = c_1 \sum \prod_i v_i \prod_{i < j} (v_i^2 - v_j^2) X^{\|v\|^2/4(t+1)}$$

où la somme porte sur les  $t$ -uplets d'entiers  $(v_1, \dots, v_t) \in \mathbb{Z}^t$  tels que  $v_i \equiv i \pmod{2t+2}$

Premier problème : quels objets vont remplacer les  $t$ -cores en type  $\tilde{C}_t$  ?

# Partitions auto-conjuguées et à parts distinctes doublées

## Partitions auto-conjuguées $SC$

1				
2				
4	1			
7	4	2	1	

$SC_{(t)}$  : ensemble des  
 $t$ -cores auto-conjugués.

# Partitions auto-conjuguées et à parts distinctes doublées

## Partitions auto-conjuguées $SC$

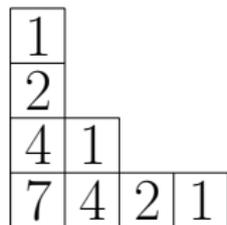
1				
2				
4	1			
7	4	2	1	

$SC_{(t)}$  : ensemble des  $t$ -cores auto-conjugués.

## Partitions à parts distinctes doublées $DD$

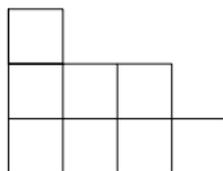
# Partitions auto-conjuguées et à parts distinctes doublées

## Partitions auto-conjuguées $SC$



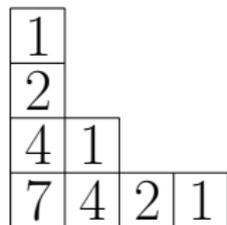
$SC_{(t)}$  : ensemble des  $t$ -cores auto-conjugués.

## Partitions à parts distinctes doublées $DD$



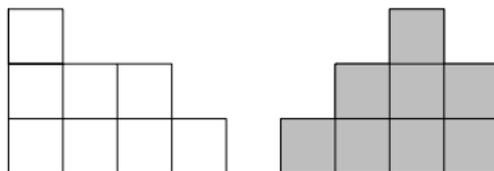
# Partitions auto-conjuguées et à parts distinctes doublées

## Partitions auto-conjuguées $SC$



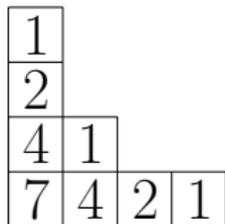
$SC_{(t)}$  : ensemble des  $t$ -cores auto-conjugués.

## Partitions à parts distinctes doublées $DD$



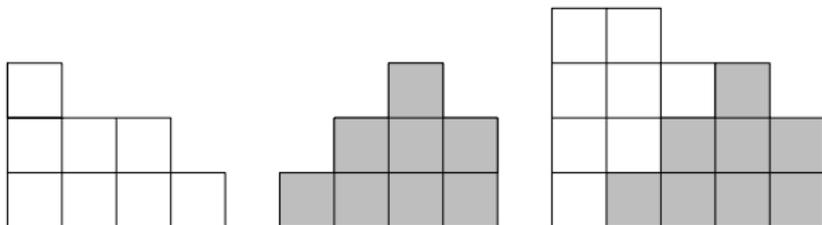
# Partitions auto-conjuguées et à parts distinctes doublées

## Partitions auto-conjuguées $SC$



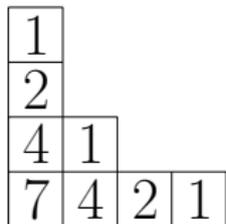
$SC_{(t)}$  : ensemble des  $t$ -cores auto-conjugués.

## Partitions à parts distinctes doublées $DD$



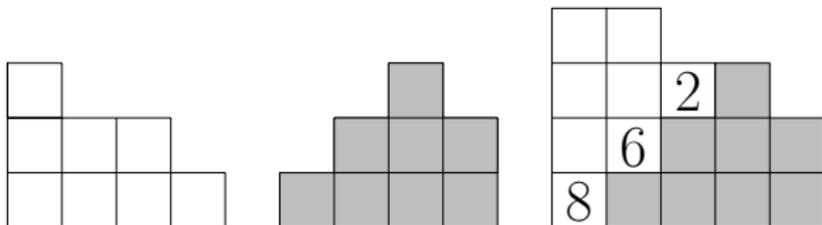
# Partitions auto-conjuguées et à parts distinctes doublées

## Partitions auto-conjuguées $SC$



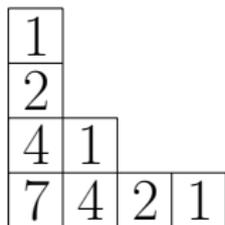
$SC_{(t)}$  : ensemble des  $t$ -cores auto-conjugués.

## Partitions à parts distinctes doublées $DD$



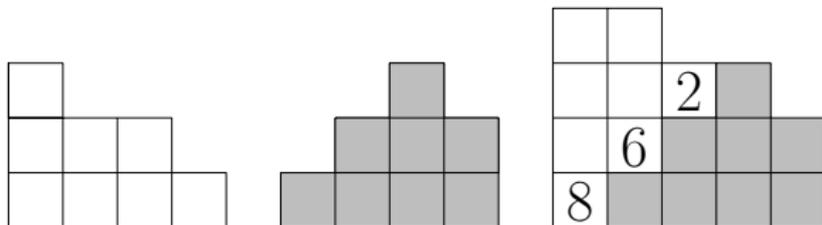
# Partitions auto-conjuguées et à parts distinctes doublées

## Partitions auto-conjuguées $SC$



$SC_{(t)}$  : ensemble des  $t$ -cores auto-conjugués.

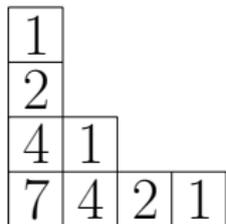
## Partitions à parts distinctes doublées $DD$



$DD_{(t)}$  : ensembles des  $t$ -cores à parts distinctes doublées.

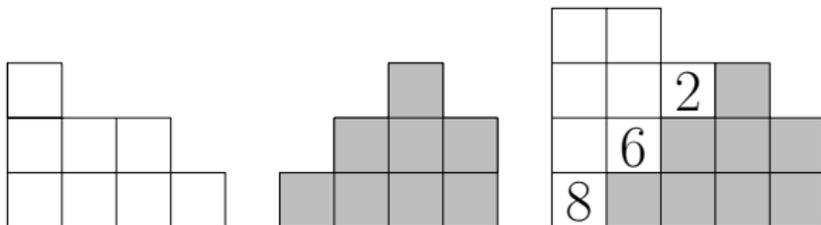
# Partitions auto-conjuguées et à parts distinctes doublées

## Partitions auto-conjuguées $SC$



$SC_{(t)}$  : ensemble des  $t$ -cores auto-conjugués.

## Partitions à parts distinctes doublées $DD$



$DD_{(t)}$  : ensembles des  $t$ -cores à parts distinctes doublées.

### Proposition (P., 2014)

La fonction génératrice des couples de  $t$ -cores auto-conjugués et à parts distinctes doublées est :

$$\sum_{(\lambda, \mu) \in SC_{(t)} \times DD_{(t)}} q^{|\lambda| + |\mu|} = \frac{(q^2; q^2)_{\infty} (q^t; q^t)_{\infty} (q^{2t-1}; q^{2t-1})_{\infty}^{t-2}}{(q; q)_{\infty}}$$

## Théorème (P., 2014)

Pour tout nombre complexe  $z$ , l'égalité suivante est vérifiée :

$$\prod_{k \geq 1} (1 - x^k)^{2z^2 + z} = \sum_{\lambda \in DD} \delta_{\lambda} x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left( 1 - \frac{2z + 2}{h \varepsilon_h} \right)$$

## Théorème (P., 2014)

Pour tout nombre complexe  $z$ , l'égalité suivante est vérifiée :

$$\prod_{k \geq 1} (1 - x^k)^{2z^2 + z} = \sum_{\lambda \in DD} \delta_{\lambda} x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left( 1 - \frac{2z + 2}{h \varepsilon_h} \right)$$

Algébriquement, le membre de droite exprime la somme des dimensions formelles des représentations irréductibles des groupes symplectiques (King, 2015).

# Quelques applications

Pour tout entier positif  $n$ , on a :

$$\sum_{\substack{\lambda \in DD \\ |\lambda|=2n}} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \frac{1}{h} = \frac{1}{2^n n!}$$

C'est un analogue symplectique de la **formule des équerres** ( $2^n n!$  étant le cardinal du groupe de Coxeter de type  $B_n$ ).

Pour tout entier positif  $n$ , on a :

$$\sum_{\substack{\lambda \in DD \\ |\lambda|=2n}} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \frac{1}{h} = \frac{1}{2^n n!}$$

C'est un analogue symplectique de la **formule des équerres** ( $2^n n!$  étant le cardinal du groupe de Coxeter de type  $B_n$ ).

## Théorème (P., 2014 & 2015)

*Le théorème précédent unifie en fait quatre familles de formules de Macdonald en types  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{BC}$ , et  $\tilde{D}$ .*

Soit  $\lambda$  un  $(t + 1)$ -core auto-conjugué (resp. à parts distinctes doublées) , et  $h$  une de ses longueurs d'équerres principales.

- Si  $h > 2t + 2$ , alors  $h - 2t - 2$  est aussi une longueur d'équerre principale

# Premières propriétés

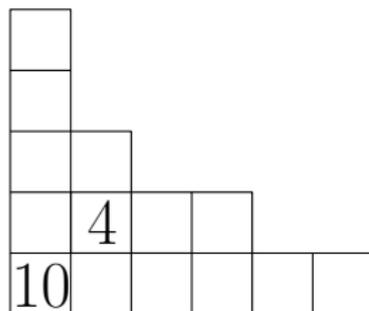
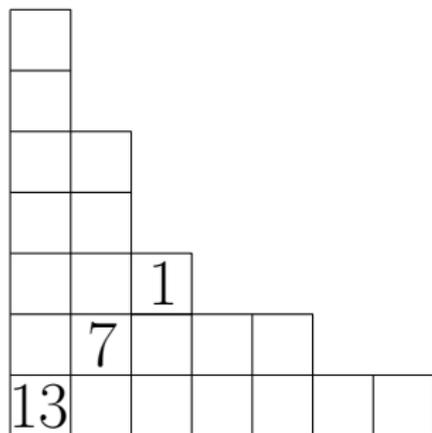
Soit  $\lambda$  un  $(t + 1)$ -core auto-conjugué (resp. à parts distinctes doublées) , et  $h$  une de ses longueurs d'équerres principales.

- Si  $h > 2t + 2$ , alors  $h - 2t - 2$  est aussi une longueur d'équerre principale
- Si  $h \equiv t + 1 + i \pmod{2t + 2}$ , pour  $1 \leq i \leq t$ , alors aucune longueur d'équerre principale n'est congrue à  $t + 1 - i \pmod{2t + 2}$ .

# Premières propriétés

Soit  $\lambda$  un  $(t + 1)$ -core auto-conjugué (resp. à parts distinctes doublées), et  $h$  une de ses longueurs d'équerres principales.

- Si  $h > 2t + 2$ , alors  $h - 2t - 2$  est aussi une longueur d'équerre principale
- Si  $h \equiv t + 1 + i \pmod{2t + 2}$ , pour  $1 \leq i \leq t$ , alors aucune longueur d'équerre principale n'est congrue à  $t + 1 - i \pmod{2t + 2}$ .



$$t + 1 = 3$$

# Définition de la bijection $\varphi$

## Théorème (P., 2014)

Soit  $t$  un entier  $\geq 2$ . Il existe une bijection explicite

$$\begin{aligned} \varphi : \quad SC_{(t+1)} \times DD_{(t+1)} &\rightarrow \mathbb{Z}^t \\ (\lambda, \mu) &\mapsto (n_1, \dots, n_t) \end{aligned}$$

telle que :

# Définition de la bijection $\varphi$

## Théorème (P., 2014)

Soit  $t$  un entier  $\geq 2$ . Il existe une bijection explicite

$$\begin{aligned} \varphi : \quad SC_{(t+1)} \times DD_{(t+1)} &\rightarrow \mathbb{Z}^t \\ (\lambda, \mu) &\mapsto (n_1, \dots, n_t) \end{aligned}$$

telle que :

- $|\lambda| + |\mu| = (t+1) \sum_{i=1}^t n_i^2 + \sum_{i=1}^t i n_i$

# Définition de la bijection $\varphi$

## Théorème (P., 2014)

Soit  $t$  un entier  $\geq 2$ . Il existe une bijection explicite

$$\begin{aligned} \varphi : \quad SC_{(t+1)} \times DD_{(t+1)} &\rightarrow \mathbb{Z}^t \\ (\lambda, \mu) &\mapsto (n_1, \dots, n_t) \end{aligned}$$

telle que :

- $|\lambda| + |\mu| = (t+1) \sum_{i=1}^t n_i^2 + \sum_{i=1}^t i n_i$
- $\prod_i [(2t+2)n_i + i] \prod_{i < j} [((2t+2)n_i + i)^2 - ((2t+2)n_j + j)^2] =$

$$\frac{\delta_\lambda \delta_\mu}{c_1} \prod_{h \in \Delta} \left(1 - \frac{2t+2}{h}\right) \left(1 - \frac{t+1}{h}\right) \prod_{j=1}^{h-1} \left(1 - \left(\frac{2t+2}{h + \tau_j j}\right)^2\right)$$

## Théorème (P., 2014)

Pour tout nombre complexe  $z$  on a :

$$\prod_{k \geq 1} (1 - x^k)^{2z^2 + z} = \sum_{(\lambda, \mu) \in SC \times DD} \delta_\lambda \delta_\mu x^{|\lambda| + |\mu|} \\ \times \prod_{h \in \Delta} \left( 1 - \frac{2z + 2}{h} \right) \left( 1 - \frac{z + 1}{h} \right) \prod_{j=1}^{h-1} \left( 1 - \left( \frac{2z + 2}{h + \tau_j} \right)^2 \right)$$

## Théorème (P., 2014)

Pour tout nombre complexe  $z$  on a :

$$\prod_{k \geq 1} (1 - x^k)^{2z^2 + z} = \sum_{(\lambda, \mu) \in SC \times DD} \delta_\lambda \delta_\mu x^{|\lambda| + |\mu|} \\ \times \prod_{h \in \Delta} \left( 1 - \frac{2z + 2}{h} \right) \left( 1 - \frac{z + 1}{h} \right) \prod_{j=1}^{h-1} \left( 1 - \left( \frac{2z + 2}{h + \tau_j} \right)^2 \right)$$

Rappelons qu'on veut à droite  $\sum_{\lambda \in DD} \delta_\lambda x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left( 1 - \frac{2z + 2}{h \varepsilon_h} \right)$

- Partir de la **formule de Macdonald** en type  $\tilde{C}$ , pour  $t$  un entier

- Partir de la **formule de Macdonald** en type  $\tilde{C}$ , pour  $t$  un entier
- **Appliquer la bijection  $\varphi$**  pour obtenir la formule précédente pour tout entier  $t \geq 2$ , excepté le fait que la somme porte sur les  $(t + 1)$ -cores

- Partir de la **formule de Macdonald** en type  $\tilde{C}$ , pour  $t$  un entier
- **Appliquer la bijection  $\varphi$**  pour obtenir la formule précédente pour tout entier  $t \geq 2$ , excepté le fait que la somme porte sur les  $(t + 1)$ -cores
- Remplacer la somme précédente par une somme sur tous les **couples** dans  $SC \times DD$

- Partir de la **formule de Macdonald** en type  $\tilde{C}$ , pour  $t$  un entier
- **Appliquer la bijection  $\varphi$**  pour obtenir la formule précédente pour tout entier  $t \geq 2$ , excepté le fait que la somme porte sur les  $(t+1)$ -cores
- Remplacer la somme précédente par une somme sur tous les **couples** dans  $SC \times DD$
- Vérifier que tous les coefficients en  $x^n$  de chaque côté sont **polynomiaux** en  $t$ , et conclure que la formule est valable pour tout  $z$  complexe

# La partition $\nu$

Soit  $(\lambda, \mu)$  un couple de  $SC \times DD$  avec pour ensemble de longueurs d'équerres principales  $\Delta$ . On note par  $2\Delta$  l'ensemble des éléments de  $\Delta$  multipliés par 2.

# La partition $\nu$

Soit  $(\lambda, \mu)$  un couple de  $SC \times DD$  avec pour ensemble de longueurs d'équerres principales  $\Delta$ . On note par  $2\Delta$  l'ensemble des éléments de  $\Delta$  multipliés par 2. Il existe une **unique partition**  $\nu \in DD$  ayant  $2\Delta$  pour ensemble de longueurs d'équerres principales.

# La partition $\nu$

Soit  $(\lambda, \mu)$  un couple de  $SC \times DD$  avec pour ensemble de longueurs d'équerres principales  $\Delta$ . On note par  $2\Delta$  l'ensemble des éléments de  $\Delta$  multipliés par 2. Il existe une **unique partition**  $\nu \in DD$  ayant  $2\Delta$  pour ensemble de longueurs d'équerres principales.

## Proposition

La partition  $\nu$  vérifie :

- $|\lambda| + |\mu| = |\nu|/2$  and  $\delta_\lambda \delta_\mu = \delta_\nu$

Soit  $(\lambda, \mu)$  un couple de  $SC \times DD$  avec pour ensemble de longueurs d'équerres principales  $\Delta$ . On note par  $2\Delta$  l'ensemble des éléments de  $\Delta$  multipliés par 2. Il existe une **unique partition**  $\nu \in DD$  ayant  $2\Delta$  pour ensemble de longueurs d'équerres principales.

## Proposition

La partition  $\nu$  vérifie :

- $|\lambda| + |\mu| = |\nu|/2$  and  $\delta_\lambda \delta_\mu = \delta_\nu$
- $$\prod_{h \in \Delta} \left(1 - \frac{2z+2}{h}\right) \left(1 - \frac{z+1}{h}\right) \prod_{j=1}^{h-1} \left(1 - \left(\frac{2z+2}{h+\tau_j j}\right)^2\right)$$
$$= \prod_{h \in \nu} \left(1 - \frac{2z+2}{h \varepsilon_h}\right)$$

# Et en type $\tilde{C}^\vee$ ?

En définissant la notion d'**équerres généralisées** et en suivant le même cheminement, on montre le résultat suivant.

## Théorème (P., 2015)

Pour tout nombre complexe  $z$ , on a :

$$\left( \prod_{k \geq 1} \frac{(1 - x^{2k})^{z+1}}{1 - x^k} \right)^{2z-1} = \sum_{\lambda \in SC} \delta_\lambda x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left( 1 - \frac{2z}{h \varepsilon_h} \right)$$

Ceci généralise en fait trois autres formules de Macdonald, en types  $\tilde{C}^\vee$ ,  $\tilde{B}$  et  $\tilde{BC}$ .

- 1 Introduction
- 2 Formules de type Nekrasov–Okounkov
- 3 Une généralisation grâce à la décomposition de Littlewood
- 4 Éléments cycliquement pleinement commutatifs

# Une généralisation de la formule de Nekrasov–Okounkov en type $\tilde{C}$

## Théorème (P., 2014 & 2015)

Soit  $t$  un entier positif. Pour tous nombres complexes  $y$  et  $z$ , on a :

$$\sum_{\lambda \in DD} \delta_{\lambda} x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{ytz}{h \varepsilon_h} \right)$$
$$= \begin{cases} \prod_{k \geq 1} (1 - x^k)(1 - x^{kt})^{t'-1} (1 - x^{kt} y^{2k})^{(z-1)(zt+t-3)/2} & \text{si } t = 2t' + 1 \\ \prod_{k \geq 1} \frac{(1 - x^k)(1 - x^{kt})^{t'-1}}{1 - x^{kt'}} \left( \frac{(1 - y^{2k} x^{kt})^{zt'-1+t'}}{1 - y^k x^{kt'}} \right)^{z-1} & \text{si } t = 2t' \end{cases}$$

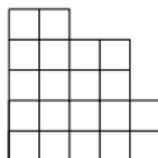
# Le $t$ -core d'une partition

Soit  $t$  un entier fixé. Le  $t$ -core d'une partition  $\lambda$  est la partition obtenue en supprimant successivement dans  $\lambda$  tous les rubans de longueur  $t$ , jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en supprimer.

# Le $t$ -core d'une partition

Soit  $t$  un entier fixé. Le  $t$ -core d'une partition  $\lambda$  est la partition obtenue en supprimant successivement dans  $\lambda$  tous les rubans de longueur  $t$ , jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en supprimer.

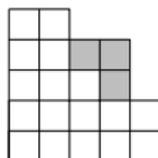
Exemple :  $\lambda = (5, 5, 4, 4, 2)$



# Le $t$ -core d'une partition

Soit  $t$  un entier fixé. Le  $t$ -core d'une partition  $\lambda$  est la partition obtenue en supprimant successivement dans  $\lambda$  tous les rubans de longueur  $t$ , jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en supprimer.

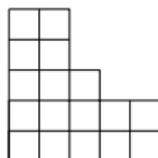
Exemple :  $\lambda = (5, 5, 4, 4, 2)$



# Le $t$ -core d'une partition

Soit  $t$  un entier fixé. Le  $t$ -core d'une partition  $\lambda$  est la partition obtenue en supprimant successivement dans  $\lambda$  tous les rubans de longueur  $t$ , jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en supprimer.

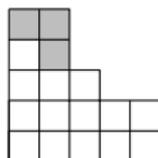
Exemple :  $\lambda = (5, 5, 4, 4, 2)$



# Le $t$ -core d'une partition

Soit  $t$  un entier fixé. Le  $t$ -core d'une partition  $\lambda$  est la partition obtenue en supprimant successivement dans  $\lambda$  tous les rubans de longueur  $t$ , jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en supprimer.

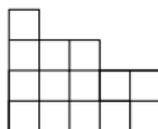
Exemple :  $\lambda = (5, 5, 4, 4, 2)$



# Le $t$ -core d'une partition

Soit  $t$  un entier fixé. Le  $t$ -core d'une partition  $\lambda$  est la partition obtenue en supprimant successivement dans  $\lambda$  tous les rubans de longueur  $t$ , jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en supprimer.

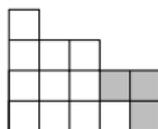
Exemple :  $\lambda = (5, 5, 4, 4, 2)$



# Le $t$ -core d'une partition

Soit  $t$  un entier fixé. Le  $t$ -core d'une partition  $\lambda$  est la partition obtenue en supprimant successivement dans  $\lambda$  tous les rubans de longueur  $t$ , jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en supprimer.

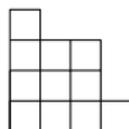
Exemple :  $\lambda = (5, 5, 4, 4, 2)$



# Le $t$ -core d'une partition

Soit  $t$  un entier fixé. Le  $t$ -core d'une partition  $\lambda$  est la partition obtenue en supprimant successivement dans  $\lambda$  tous les rubans de longueur  $t$ , jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en supprimer.

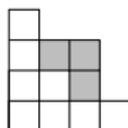
Exemple :  $\lambda = (5, 5, 4, 4, 2)$



# Le $t$ -core d'une partition

Soit  $t$  un entier fixé. Le  $t$ -core d'une partition  $\lambda$  est la partition obtenue en supprimant successivement dans  $\lambda$  tous les rubans de longueur  $t$ , jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en supprimer.

Exemple :  $\lambda = (5, 5, 4, 4, 2)$

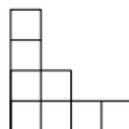


# Le $t$ -core d'une partition

Soit  $t$  un entier fixé. Le  $t$ -core d'une partition  $\lambda$  est la partition obtenue en supprimant successivement dans  $\lambda$  tous les rubans de longueur  $t$ , jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en supprimer.

Exemple :  $\lambda = (5, 5, 4, 4, 2)$

a pour 3-core

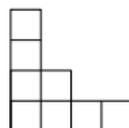


# Le $t$ -core d'une partition

Soit  $t$  un entier fixé. Le  $t$ -core d'une partition  $\lambda$  est la partition obtenue en supprimant successivement dans  $\lambda$  tous les rubans de longueur  $t$ , jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en supprimer.

Exemple :  $\lambda = (5, 5, 4, 4, 2)$

a pour 3-core



Fait : Le  $t$ -core d'une partition est un  $t$ -core.

## Théorème (Littlewood, 1951, probablement)

La *décomposition de Littlewood* envoie une partition  $\lambda$  sur un vecteur  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  tel que :

- (i)  $\tilde{\lambda}$  est le  $t$ -core de  $\lambda$  et  $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1}$  sont des partitions

## Théorème (Littlewood, 1951, probablement)

La *décomposition de Littlewood* envoie une partition  $\lambda$  sur un vecteur  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  tel que :

- (i)  $\tilde{\lambda}$  est le  $t$ -core de  $\lambda$  et  $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1}$  sont des partitions
- (ii)  $|\lambda| = |\tilde{\lambda}| + t(|\lambda^0| + |\lambda^1| + \dots + |\lambda^{t-1}|)$

## Théorème (Littlewood, 1951, probablement)

La *décomposition de Littlewood* envoie une partition  $\lambda$  sur un vecteur  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  tel que :

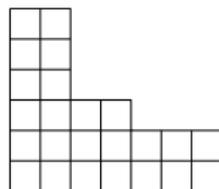
- (i)  $\tilde{\lambda}$  est le  $t$ -core de  $\lambda$  et  $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1}$  sont des partitions
- (ii)  $|\lambda| = |\tilde{\lambda}| + t(|\lambda^0| + |\lambda^1| + \dots + |\lambda^{t-1}|)$
- (iii)  $\{h/t, h \in \mathcal{H}_t(\lambda)\} = \mathcal{H}(\lambda^0) \cup \mathcal{H}(\lambda^1) \cup \dots \cup \mathcal{H}(\lambda^{t-1})$

## Théorème (Littlewood, 1951, probablement)

La *décomposition de Littlewood* envoie une partition  $\lambda$  sur un vecteur  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  tel que :

- (i)  $\tilde{\lambda}$  est le  $t$ -core de  $\lambda$  et  $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1}$  sont des partitions
- (ii)  $|\lambda| = |\tilde{\lambda}| + t(|\lambda^0| + |\lambda^1| + \dots + |\lambda^{t-1}|)$
- (iii)  $\{h/t, h \in \mathcal{H}_t(\lambda)\} = \mathcal{H}(\lambda^0) \cup \mathcal{H}(\lambda^1) \cup \dots \cup \mathcal{H}(\lambda^{t-1})$

$t = 3$



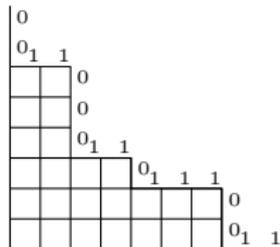
# Décomposition de Littlewood

## Théorème (Littlewood, 1951, probablement)

La *décomposition de Littlewood* envoie une partition  $\lambda$  sur un vecteur  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  tel que :

- (i)  $\tilde{\lambda}$  est le  $t$ -core de  $\lambda$  et  $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1}$  sont des partitions
- (ii)  $|\lambda| = |\tilde{\lambda}| + t(|\lambda^0| + |\lambda^1| + \dots + |\lambda^{t-1}|)$
- (iii)  $\{h/t, h \in \mathcal{H}_t(\lambda)\} = \mathcal{H}(\lambda^0) \cup \mathcal{H}(\lambda^1) \cup \dots \cup \mathcal{H}(\lambda^{t-1})$

$t = 3$



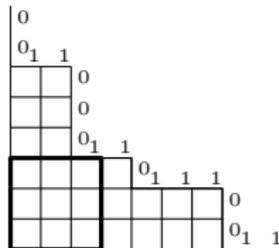
# Décomposition de Littlewood

## Théorème (Littlewood, 1951, probablement)

La *décomposition de Littlewood* envoie une partition  $\lambda$  sur un vecteur  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  tel que :

- (i)  $\tilde{\lambda}$  est le  $t$ -core de  $\lambda$  et  $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1}$  sont des partitions
- (ii)  $|\lambda| = |\tilde{\lambda}| + t(|\lambda^0| + |\lambda^1| + \dots + |\lambda^{t-1}|)$
- (iii)  $\{h/t, h \in \mathcal{H}_t(\lambda)\} = \mathcal{H}(\lambda^0) \cup \mathcal{H}(\lambda^1) \cup \dots \cup \mathcal{H}(\lambda^{t-1})$

$t = 3$



$$w = \dots 00110001.101110011 \dots$$

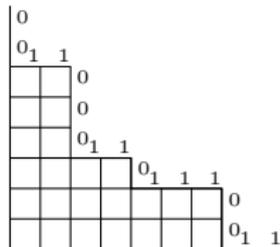
# Décomposition de Littlewood

## Théorème (Littlewood, 1951, probablement)

La *décomposition de Littlewood* envoie une partition  $\lambda$  sur un vecteur  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  tel que :

- (i)  $\tilde{\lambda}$  est le  $t$ -core de  $\lambda$  et  $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1}$  sont des partitions
- (ii)  $|\lambda| = |\tilde{\lambda}| + t(|\lambda^0| + |\lambda^1| + \dots + |\lambda^{t-1}|)$
- (iii)  $\{h/t, h \in \mathcal{H}_t(\lambda)\} = \mathcal{H}(\lambda^0) \cup \mathcal{H}(\lambda^1) \cup \dots \cup \mathcal{H}(\lambda^{t-1})$

$t = 3$



$$w = \dots 00110001.101110011 \dots$$

$$w_0 = \dots 1 0 1 1 0 \dots$$

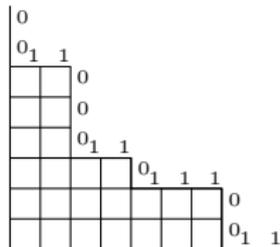
# Décomposition de Littlewood

## Théorème (Littlewood, 1951, probablement)

La *décomposition de Littlewood* envoie une partition  $\lambda$  sur un vecteur  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  tel que :

- (i)  $\tilde{\lambda}$  est le  $t$ -core de  $\lambda$  et  $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1}$  sont des partitions
- (ii)  $|\lambda| = |\tilde{\lambda}| + t(|\lambda^0| + |\lambda^1| + \dots + |\lambda^{t-1}|)$
- (iii)  $\{h/t, h \in \mathcal{H}_t(\lambda)\} = \mathcal{H}(\lambda^0) \cup \mathcal{H}(\lambda^1) \cup \dots \cup \mathcal{H}(\lambda^{t-1})$

$t = 3$



$$w = \dots 00110001.101110011 \dots$$

$$w_0 = \dots 1 0 1 1 0 \dots$$

$$w_1 = \dots 0 1 0 0 1 1 \dots$$

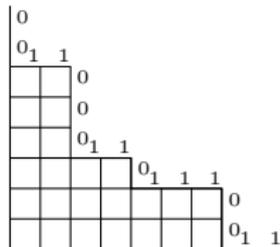
# Décomposition de Littlewood

## Théorème (Littlewood, 1951, probablement)

La *décomposition de Littlewood* envoie une partition  $\lambda$  sur un vecteur  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  tel que :

- (i)  $\tilde{\lambda}$  est le  $t$ -core de  $\lambda$  et  $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1}$  sont des partitions
- (ii)  $|\lambda| = |\tilde{\lambda}| + t(|\lambda^0| + |\lambda^1| + \dots + |\lambda^{t-1}|)$
- (iii)  $\{h/t, h \in \mathcal{H}_t(\lambda)\} = \mathcal{H}(\lambda^0) \cup \mathcal{H}(\lambda^1) \cup \dots \cup \mathcal{H}(\lambda^{t-1})$

$t = 3$



$$w = \dots 00110001.101110011 \dots$$

$$w_0 = \dots 1 0 1 1 0 \dots$$

$$w_1 = \dots 0 1 0 0 1 1 \dots$$

$$w_2 = \dots 0 0 1 1 0 1 \dots$$

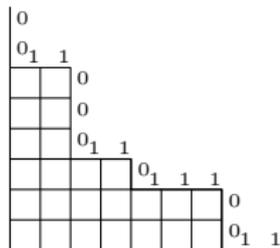
# Décomposition de Littlewood

## Théorème (Littlewood, 1951, probablement)

La *décomposition de Littlewood* envoie une partition  $\lambda$  sur un vecteur  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  tel que :

- (i)  $\tilde{\lambda}$  est le  $t$ -core de  $\lambda$  et  $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1}$  sont des partitions
- (ii)  $|\lambda| = |\tilde{\lambda}| + t(|\lambda^0| + |\lambda^1| + \dots + |\lambda^{t-1}|)$
- (iii)  $\{h/t, h \in \mathcal{H}_t(\lambda)\} = \mathcal{H}(\lambda^0) \cup \mathcal{H}(\lambda^1) \cup \dots \cup \mathcal{H}(\lambda^{t-1})$

$t = 3$

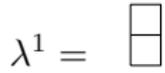
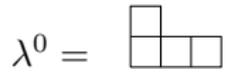


$$w = \dots 00110001.101110011 \dots$$

$$w_0 = \dots 1 0 1 1 0 \dots$$

$$w_1 = \dots 0 1 0 0 1 1 \dots$$

$$w_2 = \dots 0 0 1 1 0 1 \dots$$





# Des propriétés de la décomposition de Littlewood

Si  $\lambda \in DD$ , sa décomposition de Littlewood  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  vérifie :

(i)  $\tilde{\lambda}$  et  $\lambda^0$  sont des partitions à parts distinctes doublées

# Des propriétés de la décomposition de Littlewood

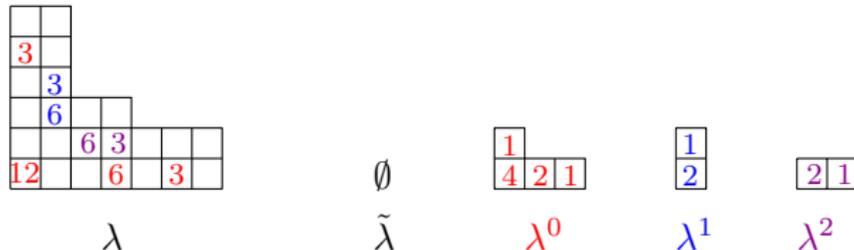
Si  $\lambda \in DD$ , sa décomposition de Littlewood  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  vérifie :

- (i)  $\tilde{\lambda}$  et  $\lambda^0$  sont des partitions à parts distinctes doublées
- (ii)  $\lambda^i$  et  $\lambda^{t-i}$  sont conjuguées pour tout  $i \in \{1, \dots, t-1\}$

# Des propriétés de la décomposition de Littlewood

Si  $\lambda \in DD$ , sa décomposition de Littlewood  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  vérifie :

- (i)  $\tilde{\lambda}$  et  $\lambda^0$  sont des partitions à parts distinctes doublées
- (ii)  $\lambda^i$  et  $\lambda^{t-i}$  sont conjuguées pour tout  $i \in \{1, \dots, t-1\}$



## Lemme (P., 2015)

Écrivons  $t = 2t'$  ou  $t = 2t' + 1$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i)  $\delta_\lambda = \delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda^0}$  si  $t$  est impair et  $\delta_\lambda = \delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda^0} \delta_{\lambda^{t'}}$  si  $t$  est pair.

## Lemme (P., 2015)

Écrivons  $t = 2t'$  ou  $t = 2t' + 1$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i)  $\delta_\lambda = \delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda^0}$  si  $t$  est impair et  $\delta_\lambda = \delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda^0} \delta_{\lambda^{t'}}$  si  $t$  est pair.
- (ii) Soit  $v$  une case de  $\lambda^0$  et  $V$  la case qui lui est associée dans  $\lambda$ .  $v$  est strictement au-dessus de la diagonale principale de  $\lambda^0$  si et seulement si il en est de même pour  $V$  dans  $\lambda$ .

## Lemme (P., 2015)

Écrivons  $t = 2t'$  ou  $t = 2t' + 1$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i)  $\delta_\lambda = \delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda^0}$  si  $t$  est impair et  $\delta_\lambda = \delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda^0} \delta_{\lambda^{t'}}$  si  $t$  est pair.
- (ii) Soit  $v$  une case de  $\lambda^0$  et  $V$  la case qui lui est associée dans  $\lambda$ .  $v$  est strictement au-dessus de la diagonale principale de  $\lambda^0$  si et seulement si il en est de même pour  $V$  dans  $\lambda$ .
- (iii) Soit  $v = (j, k)$  une case de  $\lambda^i$ , avec  $1 \leq i \leq t'$  et  $v^* = (k, j)$  une case de  $\lambda^{2t'+1-i} = \lambda^{i^*}$ . On note  $V$  et  $V^*$  les cases de  $\lambda$  qui leur sont associées. Si  $V$  est strictement au-dessus (respectivement en-dessous) de la diagonale principale de  $\lambda$ , alors  $V^*$  est strictement en-dessous (respectivement au-dessus) de cette diagonale.

# Preuve de notre généralisation pour $t$ impair

- Soit  $\lambda \in DD$  et sa décomposition de Littlewood  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$

# Preuve de notre généralisation pour $t$ impair

- Soit  $\lambda \in DD$  et sa décomposition de Littlewood  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$
- Écrivons :

$$\delta_{\lambda} x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{ytz}{\varepsilon_h h} \right)$$

# Preuve de notre généralisation pour $t$ impair

- Soit  $\lambda \in DD$  et sa décomposition de Littlewood  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$
- Écrivons :

$$\begin{aligned} \delta_{\lambda} x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{ytz}{\varepsilon_h h} \right) &= \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|/2} \\ &\times \delta_{\lambda^0} x^{t|\lambda^0|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^0)} \left( y - \frac{yz}{\varepsilon_h h} \right) \\ &\times \prod_{i=1}^{t'} x^{t|\lambda^i|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^i)} \left( y^2 - \left( \frac{yz}{h} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

# Preuve de notre généralisation pour $t$ impair

- Soit  $\lambda \in DD$  et sa décomposition de Littlewood  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$
- Écrivons :

$$\begin{aligned} \delta_{\lambda} x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{ytz}{\varepsilon_h h} \right) &= \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|/2} \\ &\times \delta_{\lambda^0} x^{t|\lambda^0|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^0)} \left( y - \frac{yz}{\varepsilon_h h} \right) \\ &\times \prod_{i=1}^{t'} x^{t|\lambda^i|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^i)} \left( y^2 - \left( \frac{yz}{h} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

- et sommions sur toutes les partitions  $\lambda \in DD$

## Corollaire (P., 2015)

*Quand  $t = y = 1$ , et  $z$  remplacé par  $2z + 2$ , on retrouve la formule de Nekrasov–Okounkov en type  $\tilde{C}$ .*

## Corollaire (P., 2015)

Quand  $t = y = 1$ , et  $z$  remplacé par  $2z + 2$ , on retrouve la formule de Nekrasov–Okounkov en type  $\tilde{C}$ .

## Corollaire (P., 2015)

On a :

$$\sum_{\lambda \in DD} \delta_{\lambda} x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{bt}{h \varepsilon_h}$$
$$= \begin{cases} \exp(-tb^2 x^t/2) \prod_{k \geq 1} (1 - x^k)(1 - x^{kt})^{t'-1} & \text{si } t = 2t' + 1 \\ \exp(-bx^{t'} - tb^2 x^t/2) \prod_{k \geq 1} \frac{(1 - x^k)(1 - x^{kt})^{t'-1}}{1 - x^{kt'}} & \text{si } t = 2t' \end{cases}$$

## Et en type $\tilde{C}^\vee$ ?

On peut aussi généraliser le résultat obtenu en type  $\tilde{C}^\vee$ , grâce à la décomposition de Littlewood.

# Et en type $\tilde{C}^\vee$ ?

On peut aussi généraliser le résultat obtenu en type  $\tilde{C}^\vee$ , grâce à la décomposition de Littlewood.

## Théorème (P., 2015)

Soit  $t$  un entier positif. Pour tous nombres complexes  $y$  et  $z$ , on a :

$$\sum_{\lambda \in SC} \delta_\lambda x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{yzt}{h \varepsilon_h} \right)$$
$$= \begin{cases} \prod_{k \geq 1} \frac{1 - x^k}{1 - x^{2k}} (1 - x^{2kt})^{t'} (1 - y^{2k} x^{2kt})^{(z^2 - 1)t'} & \text{si } t = 2t' \\ \prod_{k \geq 1} \frac{1 - x^k}{1 - x^{2k}} \frac{(1 - x^{2kt})^{t'+1}}{1 - x^{kt}} \frac{(1 - y^{2k} x^{2kt})^{(tz^2 + z - t - 1)/2}}{(1 - y^k x^{kt})^{z-1}} & \text{si } t = 2t' + 1 \end{cases}$$

## Corollaire (P., 2015)

si  $t$  est impair,

$$\sum_{\substack{\lambda \in DD, |\lambda|=2tn \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda)=2n}} \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{1}{h \varepsilon_h} = \frac{(-1)^n}{n! 2^n t^n}$$

si  $t$  est pair,

$$\sum_{\substack{\lambda \in SC, |\lambda|=2tn \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda)=2n}} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{1}{h} = \frac{1}{n! 2^n t^n}$$

## Corollaire (P., 2015)

si  $t$  est impair,

$$\sum_{\substack{\lambda \in DD, |\lambda|=2tn \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda)=2n}} \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{1}{h \varepsilon_h} = \frac{(-1)^n}{n! 2^n t^n}$$

$$\sum_{\substack{\lambda \in SC, |\lambda|=tn \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda)=n}} \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{t}{h \varepsilon_h} \\ = [x^{tn}] \exp(-x^t - tx^{2t}/2)$$

si  $t$  est pair,

$$\sum_{\substack{\lambda \in SC, |\lambda|=2tn \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda)=2n}} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{1}{h} = \frac{1}{n! 2^n t^n}$$

$$\sum_{\substack{\lambda \in DD, |\lambda|=tn \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda)=n}} \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{t}{h \varepsilon_h} \\ = [x^{tn/2}] \exp(-x^{t/2} - tx^t/2)$$

- 1 Introduction
- 2 Formules de type Nekrasov–Okounkov
- 3 Une généralisation grâce à la décomposition de Littlewood
- 4 Éléments cycliquement pleinement commutatifs

Un groupe de Coxeter est défini par la donnée d'une matrice  $(m_{s,t})_{s,t \in S}$

$$\text{Relations } \begin{cases} s^2 = 1 \\ \underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{s,t}} \end{cases} \begin{array}{l} \text{relations de tresse} \\ \text{si } m_{s,t} = 2, \text{ relations de commutation} \end{array}$$

Un groupe de Coxeter est défini par la donnée d'une matrice  $(m_{s,t})_{s,t \in S}$

$$\text{Relations } \left\{ \begin{array}{l} s^2 = 1 \\ \underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{s,t}} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{relations de tresse} \\ \text{si } m_{s,t} = 2, \text{ relations de commutation} \end{array}$$

Longueur d'un élément  $w := \ell(w) =$  l'entier minimal  $\ell$  tel que  $w = s_1 s_2 \dots s_\ell$  avec  $s_i \in S$

Un tel mot est une décomposition réduite de  $w \in W$

Un groupe de Coxeter est défini par la donnée d'une matrice  $(m_{s,t})_{s,t \in S}$

$$\text{Relations } \begin{cases} s^2 = 1 \\ \underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{s,t}} \end{cases} \begin{array}{l} \text{relations de tresse} \\ \text{si } m_{s,t} = 2, \text{ relations de commutation} \end{array}$$

Longueur d'un élément  $w := \ell(w) =$  l'entier minimal  $\ell$  tel que  $w = s_1 s_2 \dots s_\ell$  avec  $s_j \in S$

Un tel mot est une décomposition réduite de  $w \in W$

## Théorème (Matsumoto, 1964)

*Étant données deux décompositions réduites de  $w$ , il existe une suite de relations de tresse permettant de transformer l'une de ces décompositions en l'autre.*

# Éléments (cycliquement) pleinement commutatifs

## Définition

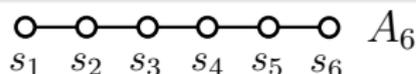
Un élément  $w$  est **pleinement commutatif** si étant données deux décompositions réduites de  $w$ , il existe une suite de **relations de commutations** qui peut être appliquée pour transformer une de ces décompositions en l'autre.

# Éléments (cycliquement) pleinement commutatifs

## Définition

Un élément  $w$  est **pleinement commutatif** si étant données deux décompositions réduites de  $w$ , il existe une suite de **relations de commutations** qui peut être appliquée pour transformer une de ces décompositions en l'autre.

$s_5 s_3 s_4 s_2 s_1 s_3 s_2 s_6 s_5$  PC,  
 $s_3 s_2 s_1 s_2 s_4 s_3 s_5$  non PC

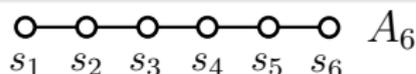


# Éléments (cycliquement) pleinement commutatifs

## Définition

Un élément  $w$  est **pleinement commutatif** si étant données deux décompositions réduites de  $w$ , il existe une suite de **relations de commutations** qui peut être appliquée pour transformer une de ces décompositions en l'autre.

$s_5 s_3 s_4 s_2 s_1 s_3 s_2 s_6 s_5$  PC,  
 $s_3 s_2 s_1 s_2 s_4 s_3 s_5$  non PC



## Définition

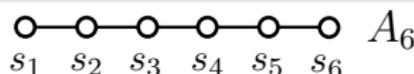
Un élément  $w$  est **cycliquement pleinement commutatif** si tous les décalages cycliques de chacune de ses décompositions réduites est une décomposition réduite d'un élément PC.

# Éléments (cycliquement) pleinement commutatifs

## Définition

Un élément  $w$  est **pleinement commutatif** si étant données deux décompositions réduites de  $w$ , il existe une suite de **relations de commutations** qui peut être appliquée pour transformer une de ces décompositions en l'autre.

$s_5 s_3 s_4 s_2 s_1 s_3 s_2 s_6 s_5$  PC,  
 $s_3 s_2 s_1 s_2 s_4 s_3 s_5$  non PC



## Définition

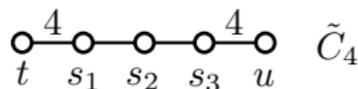
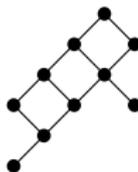
Un élément  $w$  est **cycliquement pleinement commutatif** si tous les décalages cycliques de chacune de ses décompositions réduites est une décomposition réduite d'un élément PC.

Dans  $A_6$ ,  $s_5 s_3 s_4 s_2 s_1 s_3 s_2 s_6 s_5$  non CPC  
 $s_2 s_1 s_3$  CPC

$s_2 s_1 s_3 s_2 s_1$  non CPC

# Clôtures cylindriques d'empilements

La notion d'**empilement** permet de caractériser les éléments PC en termes d'évitements de motifs.

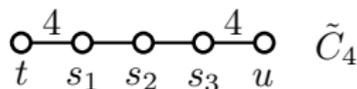
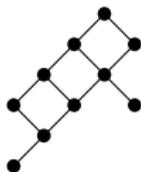


$$w = ts_1ts_2uts_3s_2us_3$$

# Clôtures cylindriques d'empilements

La notion d'**empilement** permet de caractériser les éléments PC en termes d'évitements de motifs.

En définissant la notion de **clôtures cylindriques d'un empilement**, on obtient une caractérisation des éléments CPC en terme d'évitements de motifs.

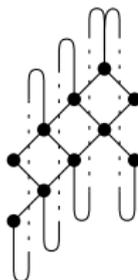


$$w = ts_1ts_2uts_3s_2us_3$$

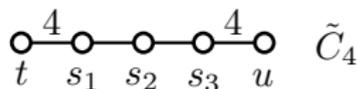
# Clôtures cylindriques d'empilements

La notion d'**empilement** permet de caractériser les éléments PC en termes d'évitements de motifs.

En définissant la notion de **clôtures cylindriques d'un empilement**, on obtient une caractérisation des éléments CPC en terme d'évitements de motifs.



$$w = ts_1ts_2uts_3s_2us_3$$



## Théorème (P., 2014)

*Pour tous les groupes de Coxeter affines, on peut caractériser les éléments CPC en termes d'expressions réduites. Cela permet de les énumérer, raffinés par la longueur. Pour tous ces groupes, la série génératrice obtenue est **ultimement périodique**.*

## Théorème (P., 2014)

*Pour tous les groupes de Coxeter affines, on peut caractériser les éléments CPC en termes d'expressions réduites. Cela permet de les énumérer, raffinés par la longueur. Pour tous ces groupes, la série génératrice obtenue est **ultimement périodique**. En type  $\tilde{C}$ , on a :*

$$\tilde{C}_n^{CPC}(q) = A_{n+1}^{CPC}(q) + \frac{2^n}{1 - q^{n+1}} q^{2(n+1)} + \frac{2n}{1 - q^{2n}} q^{2n}$$

## Théorème (P., 2014)

*Pour tous les groupes de Coxeter affines, on peut caractériser les éléments CPC en termes d'expressions réduites. Cela permet de les énumérer, raffinés par la longueur. Pour tous ces groupes, la série génératrice obtenue est **ultimement périodique**. En type  $\tilde{C}$ , on a :*

$$\tilde{C}_n^{CPC}(q) = A_{n+1}^{CPC}(q) + \frac{2^n}{1 - q^{n+1}} q^{2(n+1)} + \frac{2n}{1 - q^{2n}} q^{2n}$$

Comme corollaire, on retrouve le fait qu'en type affine, un élément CPC est logarithmique si et seulement si il est à support complet (Marquis, 2013).

## Théorème (P., 2014)

*Soit  $W$  un groupe de Coxeter. La série génératrice des éléments CPC est une fraction  $\mathbb{N}$ -rationnelle.*

## Théorème (P., 2014)

*Soit  $W$  un groupe de Coxeter. La série génératrice des éléments CPC est une fraction  $\mathbb{N}$ -rationnelle.*

La preuve consiste à construire un **automate fini** reconnaissant l'ensemble des décompositions réduites des éléments CPC.

- Caractériser les groupes de Coxeter dont la série génératrice des éléments CPC est ultimement périodique

- Caractériser les groupes de Coxeter dont la série génératrice des éléments CPC est ultimement périodique
- Étude de l'automate (cardinal des états, minimalité, ...)

- Caractériser les groupes de Coxeter dont la série génératrice des éléments CPC est ultimement périodique
- Étude de l'automate (cardinal des états, minimalité, ...)
- Introduire un poids  $\tau$  dans les égalités de type Nekrasov-Okounkov

- Caractériser les groupes de Coxeter dont la série génératrice des éléments CPC est ultimement périodique
- Étude de l'automate (cardinal des états, minimalité, ...)
- Introduire un poids  $\tau$  dans les égalités de type Nekrasov-Okounkov
- Prouver les formules de Nekrasov-Okounkov en utilisant une formule de Cauchy symplectique

- Caractériser les groupes de Coxeter dont la série génératrice des éléments CPC est ultimement périodique
- Étude de l'automate (cardinal des états, minimalité, ...)
- Introduire un poids  $\tau$  dans les égalités de type Nekrasov-Okounkov
- Prouver les formules de Nekrasov-Okounkov en utilisant une formule de Cauchy symplectique
- Propriétés “à la Stanley” impliquant des fonctions symétriques pour les partitions  $DD$  et  $SC$

Merci pour votre attention