

# Groupes et Corps Stables

A. Martin-Pizarro

version-0-229-gd595768, Thu Mar 26 11:26:05 2015 +0100

### **Avertissement.**

Ces notes comportent certainement leur lot d'erreurs plus ou moins graves. Elles ne suivent pas exactement ce qui a été fait en cours. Remarques, commentaires, questions, corrections, etc. sont les bienvenus.

Les mots qui apparaissent dans un cadre rouge sur le fichier pdf sont cliquables (par exemple, dans la table des matières, pour passer à la section correspondante ; ou dans l'index, pour retrouver les endroits où apparaît un terme particulier).

# Table des matières

<b>0</b>	<b>Notation et Préliminaires</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Le théorème de Morley</b>	<b>3</b>
1.1	Le monstre . . . . .	3
1.2	Le rang de Morley . . . . .	4
1.3	Le Théorème de Morley . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Éléments de stabilité</b>	<b>12</b>
2.1	Ensembles fortement minimaux . . . . .	12
2.2	Héritiers, cohéritiers et définissabilité . . . . .	14
2.3	Stabilité et indépendance . . . . .	16
2.4	Imaginaires et bases canoniques . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Groupes <math>\omega</math>-stables</b>	<b>27</b>
3.1	Conditions de chaîne . . . . .	27
3.2	Génériques . . . . .	29
3.3	Indécomposables . . . . .	33
3.4	Orthogonalité, Régularité et Internalité . . . . .	34
3.5	Analyses . . . . .	38
3.6	Groupes minimaux . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Corps <math>\omega</math>-stables</b>	<b>41</b>
4.1	Théorème de Macintyre et minimalité . . . . .	41
4.2	Groupes de rang petit . . . . .	44
4.3	Actions minimales et mauvais groupes . . . . .	47
4.4	Groupes monobasés . . . . .	52
	<b>Bibliographie</b>	<b>54</b>

# Chapitre 0

## Notation et Préliminaires

On fixe un langage de base  $\mathcal{L}$ . On réservera  $\kappa, \lambda$ , etc. pour des cardinaux infinis.

On identifiera souvent la structure  $\mathcal{A}$  et son domaine sous-jacent  $A$ . De même, la notation  $a$  dénotera un uple (possiblement infini). Aussi, si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles d'un ensemble commun, on dénotera par  $AB$  leur réunion, et par  $\mathcal{P}(A)$  l'ensemble des parties de  $A$ .

Deux structures  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont *élémentairement équivalentes*, noté  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ , si elles satisfont les mêmes énoncés. Une *théorie*  $T$  est une collection d'énoncés. Elle est *consistante* si  $T$  possède un modèle. Elle est *complète* si tous deux modèles sont élémentairement équivalents. Par la suite, on supposera toujours que  $T$  a des modèles infinis.

Une sous-structure  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{B}$  est une *sous-structure élémentaire* de  $\mathcal{B}$  (noté par  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ ) si, pour toute formule sans paramètres  $\varphi(x)$  et tout uple  $a$  dans  $A$ , on a

$$\mathcal{A} \models \varphi(a) \iff \mathcal{B} \models \varphi(a).$$

Par le lemme de Tarski, c'est équivalent à supposer que pour toute formule  $\varphi(x, y)$ , où  $x$  a longueur 1, tout uple  $a$  et tout élément  $b$ , si  $\mathcal{B} \models \varphi(b, a)$ , alors il existe  $a'$  dans  $A$  tel que  $\mathcal{A} \models \varphi(a', a)$ . Étant donné un sous-ensemble  $A$  d'une structure  $\mathcal{B}$  et un cardinal  $\kappa$  avec  $\max(|A|, |\mathcal{L}|) \leq \kappa \leq |B|$ , il existe une sous-structure élémentaire de  $\mathcal{B}$  contenant  $A$  de taille  $\kappa$ , par Löwenheim-Skolem. De même, si  $\max(|B|, |\mathcal{L}|) \leq \lambda$ , il existe une extension élémentaire de  $\mathcal{B}$  de taille  $\lambda$ .

Un *type partiel* sur  $A$  est un ensemble de formules sur  $A$ . L'espace de *types (complets)*  $S^{\mathcal{B}}(A)$  sur  $A$  est l'ensemble de types partiels  $p(x)$  de formules à paramètres sur  $A$  maximal consistants parmi les formules à paramètres sur  $A$  dans les variables  $x$ . Souvent, on n'explicitera pas la structure ambiante  $\mathcal{B}$ . Si  $x$  a longueur  $n$ , on parlera de  $n$ -types, que l'on dénotera par  $S_n^{\mathcal{B}}(A)$ . Si  $b \in B$ , l'ensemble

$$\text{tp}(b/A) = \{\varphi(x, a) \mid \mathcal{B} \models \varphi(b, a)\}_{\substack{\varphi \in \mathcal{L} \\ a \in A}}$$

est un type sur  $A$ , dit *réalisé* dans  $\mathcal{B}$  par  $b$ . Tout type est réalisé dans une extension élémentaire. Si on travaille avec une certaine théorie  $T$ , n'on considérera implicitement que des types consistants avec  $T$ . L'espace  $S_n(A)$  admet une topologie (dite *topologie logique*), en prenant comme ouverts basiques la collection d'ensembles de la forme

$$[\varphi] = \{p \in S_n(A) \mid \varphi(x) \in p\},$$

pour chaque formule  $\varphi(x)$  à  $n$  variables. Notons qu'il est Hausdorff (ou  $T_2$ ), et que chaque ouvert basique est aussi fermé. Le théorème de compacité entraîne qu'il est compact avec cette topologie et 0-dimensionnel : il admet une base d'ouvert-fermés, qui sont de la forme  $[\varphi]$  pour une certaine formule  $\varphi$ .

Tout application élémentaire  $f : A_0 \rightarrow B_0$ , où  $A_0$  (resp.  $B_0$ ) est un sous-ensemble de  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ) induit une application continue surjective  $S_n^{\mathcal{B}}(B_0) \rightarrow S_n^{\mathcal{A}}(A_0)$ . En outre, si  $A \subset B$ , la restriction de paramètres induit une application continue surjective  $S_n^{\mathcal{B}}(B) \rightarrow S_n^{\mathcal{A}}(A)$ . Notons que ces deux applications sont fermées, par compacité de l'espace de types.

On dit qu'une formule  $\varphi$  isole le type partiel  $\Sigma[x]$  si

$$[\varphi] \subset \bigcap_{\psi \in \Sigma} [\psi].$$

Un uple  $a$  dans un modèle  $\mathcal{A}$  de  $T$  est *atomique* sur un ensemble  $B \subset A$  si  $\text{tp}(a/B)$  est isolé dans  $S(B)$ . Le théorème d'omission de types énonce que tout type partiel  $\Sigma(x)$  consistant avec une théorie dénombrable  $T$  qui n'est pas isolé admet un modèle  $\mathcal{A}$  de  $T$  qui omet  $\Sigma$ , c'est à dire, le type  $\Sigma$  n'est pas réalisé dans  $\mathcal{A}$ .

Deux formules  $\varphi$  et  $\psi$  sont *équivalentes modulo la théorie  $T$* , ou  *$T$ -équivalentes*, si

$$T \vdash \forall x (\varphi(x) \Leftrightarrow \psi(x)).$$

En particulier, une théorie  $T$  a *élimination de quantificateurs*, ou EQ, si toute formule  $\varphi$  est  $T$ -équivalente à une sans quantificateurs. Pour cela, il suffit de considérer le cas où  $\varphi = \exists x \psi$ , avec  $\psi$  une conjonction de formules atomiques (ou leur négations). Le critère suivant s'avère très utile pour avoir EQ : Une théorie  $T$  a EQ si et seulement si, étant donnés deux modèles  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  avec une sous-structure commune  $\mathcal{A}$  (éventuellement vide, si  $\mathcal{L}$  est relationnel), une formule  $\varphi = \exists x \psi$  comme auparavant et un uple  $a$  dans  $A$ , alors

$$\mathcal{M} \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(a).$$

De plus, si tous deux modèles  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  ont une sous-structure commune, alors  $T$  est complète.

En particulier, les théories suivantes sont complètes avec EQ :

- $T_\infty$  La théorie d'un ensemble infini dans le langage de l'égalité  $\mathcal{L}_=$ .
- DLO La théorie d'un ordre dense sans extrêmes dans le langage  $\mathcal{L}_\leq$ .
- Mod La théorie d'un module infini sur un domaine intègre  $R$  (où la multiplication n'est pas nécessairement commutative) dans le langage  $\mathcal{L}_{Mod} = \{+, -, 0, r\}_{r \in R}$ .
- $\text{ACF}_p$  La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique  $p$  (où  $p$  est 0 ou un nombre premier) dans le langage  $\mathcal{L}_{Rings} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ .
- RCF La théorie des corps réellement clos dans le langage  $\mathcal{L}_{ORings} = \{+, -, \cdot, 0, 1, <\}$ .

# Chapitre 1

## Le théorème de Morley

### 1.1 Le monstre

**Définition 1.1.1.** Une structure  $\mathcal{A}$  est  $\kappa$ -saturée si tout type sur un ensemble de paramètres de taille strictement inférieure à  $\kappa$  est réalisé dans  $\mathcal{A}$ .

Une structure  $\mathcal{A}$  est saturée si elle est  $|A|$ -saturée.

**Remarque 1.1.2.** Pour être  $\kappa$ -saturée, il suffit que tout 1-type sur un ensemble petit de paramètres est réalisé. De plus, si  $\mathcal{A}$  est  $\kappa$ -saturée, alors  $|A| \geq \kappa$ .

**Lemme 1.1.3.** Deux structures élémentairement équivalentes saturées de la même cardinalité sont isomorphes.

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  saturées élémentairement équivalentes de cardinalité  $\kappa$ , et prenons d'énumérations  $A = \{a_i\}_{i < \kappa}$  et  $B = \{b_i\}_{i < \kappa}$ . On construit par induction une chaîne croissante d'applications élémentaires  $f_\alpha : A_\alpha \rightarrow B_\alpha$ , où  $\max(|A_\alpha|, |B_\alpha|) < \kappa$  avec  $f_0$  l'application vide (qui est élémentaire, car  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ).

Tout ordinal  $\alpha$  s'écrit de façon unique comme  $\alpha = \beta + m$ , pour un certain  $m$  dans  $\mathbb{N}$ , où  $\beta$  est soit 0, soit un ordinal limite. Par construction, la réunion de  $f_\beta$ , pour  $\beta < \alpha$ , induit une application élémentaire  $g_\alpha : A_\alpha^* \rightarrow B_\alpha^*$ .

Si  $m = 2n$ , soit  $p = \text{tp}(a_{\beta+n}/A_\alpha^*)$ . Puisque  $|B_\alpha^*| < \kappa$ , le type  $g_\alpha(p)$  est réalisé par un élément  $b$  dans  $B$  par saturation. On pose  $f_\alpha = g_\alpha \cup \{(a_{\beta+n}, b)\}$ . Si  $\alpha = \beta + 2n + 1$ , on prend la préimage du type  $\text{tp}(b_{\beta+n}/B_\alpha^*)$  par  $g_\alpha$  et on le réalise par  $a$  dans  $\mathcal{A}$ . Donc on pose  $f_\alpha = g_\alpha \cup \{(a, b_{\beta+n})\}$ .  $\square$

**Définition 1.1.4.** Une structure  $\mathcal{A}$  est  $\kappa$ -universelle si toute structure élémentairement équivalente à  $\mathcal{A}$  de taille strictement inférieure à  $\kappa$  se plonge élémentairement dans  $\mathcal{A}$ .

Une structure  $\mathcal{A}$  est  $\kappa$ -homogène si, pour toute application élémentaire  $f$  définie sur un sous-ensemble  $A_0$  de  $\mathcal{A}$  de taille strictement bornée par  $\kappa$  et tout élément  $a$  de  $\mathcal{A}$ , on peut étendre  $f$  à une application élémentaire définie sur  $A_0 \cup \{a\}$ .

Une structure  $\mathcal{A}$  est  $\kappa$ -fortement homogène si toute application élémentaire définie sur un sous-ensemble de  $\mathcal{A}$  de taille strictement bornée par  $\kappa$  s'étend à un automorphisme de  $\mathcal{A}$ .

La même démonstration du lemme 1.1.3 permet de montrer le résultat suivant :

**Corollaire 1.1.5.** Si  $|\mathcal{L}| \leq \kappa$ , alors  $\mathcal{A}$  est  $\kappa$ -saturée si et seulement si elle est  $\kappa^+$ -universelle et  $\kappa$ -homogène.

Afin de simplifier la notation et les preuves, étant donnée une théorie complète avec des modèles infinis, les théoriciens des modèles se placent souvent à l'intérieur d'un modèle assez saturé, pour pouvoir plonger tout autre modèle en considération, et donc le voir comme une sous-structure élémentaire. Or, il existe un modèle de  $T$  saturé de cardinalité  $\kappa > |\mathcal{L}|$  si  $\kappa$  est régulier tel que  $2^\lambda \leq \kappa$  si  $\lambda < \kappa$ ; un tel cardinal  $\kappa$  est dit *fortement inaccessible*. L'existence des cardinaux fortement inaccessibles ne peut pas être déduit de ZF, car elle entraîne l'existence d'un modèle standard de ZFC.

Néanmoins, une autre possibilité pour construire un *modèle monstre* saturé dans sa cardinalité est de renoncer à avoir comme univers un ensemble et donc travailler avec une classe stricte. Pour cela, on se place dans une extension conservative de ZFC, dite NBG (pour *von Neumann-Bernays-Gödel*), où l'on ajoute des classes strictes à ZFC, ainsi qu'un axiome de choix global. On construit donc le monstre  $\mathfrak{C}$  comme une chaîne croissante d'extensions élémentaires de modèles  $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{O}_n}$ , où tout type sur  $M_\alpha$  est réalisé dans  $M_{\alpha+1}$ . Ce modèle monstre, qui est unique à isomorphie près, possède les propriétés suivantes :

**Théorème 1.1.6.** *Si  $T$  est une théorie complète avec des modèles infinis, le monstre  $\mathfrak{C}$  satisfait que :*

- $\mathfrak{C}$  est  $\kappa$ -saturé pour chaque  $\kappa$ .
- Tout modèle de  $T$  se plonge élémentairement dans  $\mathfrak{C}$ .
- Tout application élémentaire entre deux sous-ensembles de  $\mathfrak{C}$  s'étend en un automorphisme de  $\mathfrak{C}$ .

L'avantage du modèle monstre est qu'il nous permet de retrouver tout modèle de  $T$  comme une sous-structure élémentaire, et donc nous n'avons plus besoin d'utiliser la notation  $\mathcal{M}$ . De plus, tout ensemble de paramètres est un sous-ensemble de  $\mathfrak{C}$ . Une formule  $\varphi$  (à paramètres dans  $\mathfrak{C}$ ) définit une sous-classe de  $\mathfrak{C}$ , qui la détermine à  $T$ -équivalence près. Chaque ensemble de formules finiment consistant admet une réalisation dans  $\mathfrak{C}$ . Quoique les éléments de  $S(\mathfrak{C})$  sont de classes strictes, on les appellera de *types globaux*.

On utilisera la notation  $\text{Aut}(\mathfrak{C}/A)$  pour parler d'automorphismes de  $\mathfrak{C}$  fixant le sous-ensemble  $A$ , même si  $\text{Aut}(\mathfrak{C})$  n'est pas un objet (même pas dans l'extension NBG). En particulier, deux uples sont conjugués par  $\text{Aut}(\mathfrak{C}/A)$  si et seulement s'ils ont le même type sur  $A$ .

**Définition 1.1.7.** Une formule  $\varphi$  est dite *algébrique* si  $\varphi(\mathfrak{C})$  est un ensemble fini. Un élément  $b$  est *algébrique* sur un ensemble  $A$  s'il satisfait une formule algébrique à paramètres dans  $A$ . La clôture algébrique  $\text{acl}(A)$  de  $A$  est l'ensemble d'éléments algébriques sur  $A$ .

En outre, un élément  $b$  est définissable sur  $A$  s'il existe une formule  $\varphi$  à paramètres dans  $A$  telle que  $\varphi(\mathfrak{C}) = \{b\}$ . L'ensemble d'éléments définissables sur  $A$  s'appelle la clôture définissable  $\text{dcl}(A)$ .

Un type  $p$  dans  $S(A)$  est *algébrique* s'il contient une formule algébrique; autrement dit, l'ensemble  $p(\mathfrak{C})$  est fini.

**Remarque 1.1.8.** Si  $\varphi(\mathfrak{C})$  est fini, sa taille ne dépend pas du modèle  $\mathcal{M}$  contenant les paramètres nécessaires pour la définir. En particulier, tout modèle est algébriquement clos.

Tout type algébrique est isolé par une formule algébrique, donc tout type algébrique est réalisé dans chaque modèle contenant  $A$ .

**Lemme 1.1.9.** *Tout application élémentaire  $f : A \rightarrow B$  s'étend à une application élémentaire  $f : \text{acl}(A) \rightarrow \text{acl}(B)$ .*

*Démonstration.* Soit  $f'$  une extension de  $f$  à  $\mathfrak{C}$ . L'image d'un élément algébrique sur  $A$  devient algébrique sur  $B$ , donc  $f'$  envoie  $\text{acl}(A)$  à  $\text{acl}(B)$ .  $\square$

**Lemme 1.1.10.** *Étant donné une classe définissable  $X$  de  $\mathfrak{C}$  et un ensemble  $A$  de paramètres, on a que  $X$  est définissable à paramètres dans  $A$  si et seulement si  $f(X) = X$  pour tout  $f \in \text{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ .*

*En particulier, l'élément  $b$  est définissable sur  $A$  si et seulement si son orbite par  $\text{Aut}(\mathfrak{C}/A)$  a taille 1. De même, l'élément  $b \in \text{acl}(A)$  si et seulement si son orbite par  $\text{Aut}(\mathfrak{C}/A)$  est finie.*

*Démonstration.* Supposons que  $X = \varphi(\mathfrak{C})$ , où  $\varphi$  a paramètres dans  $B \supset A$ , et soient  $\pi : S(B) \rightarrow S(A)$  la restriction des types et  $f : \mathfrak{C} \rightarrow S(B)$  l'application  $f(c) = \text{tp}(c/B)$ . Remarquons que

$$[\varphi] = f(X).$$

En particulier, l'image  $Y = \pi([\varphi])$  est fermée. Puisque  $X$  est invariant par  $\text{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ , on en déduit que  $X = (\pi \circ f)^{-1}(Y)$ . Donc  $S(A) \setminus Y = \pi([\neg\varphi])$  et alors  $Y$  est ouvert, ce qui donne que  $Y = [\psi]$  pour une formule  $\psi$  à paramètres dans  $A$ , qui définit donc  $X$ .

Pour la deuxième affirmation, remarquons que  $a \in \text{dcl}(A)$  si et seulement si  $\{a\}$  est  $\text{Aut}(\mathfrak{C}/A)$ -invariant. De plus, les conjugués de  $a$  sur  $A$  sont exactement les réalisations de  $\text{tp}(a/A)$ .  $\square$

## 1.2 Le rang de Morley

Par la suite, on se place à l'intérieur d'un modèle monstre  $\mathfrak{C}$  d'une théorie complète  $T$  dans un langage  $\mathcal{L}$  (éventuellement non-dénombrable).

Nous allons définir une *mesure* de la taille de toute formule, le *rang de Morley*  $\text{RM}$  :

**Définition 1.2.1.** On définit la relation  $\alpha \leq \text{RM}(\varphi)$  par induction sur l'ordinal  $\alpha$  :

- $0 \leq \text{RM}(\varphi)$  si  $\varphi(\mathfrak{C}) \neq \emptyset$ ,

- $\alpha + 1 \leq \text{RM}(\varphi)$  s'il existe une famille infinie  $\{\psi_i\}_{i < \omega}$  de formules (à paramètres dans  $\mathfrak{C}$ ), qui sont 2 à 2 disjointes, avec  $\alpha \leq \text{RM}(\psi_i)$  et  $\psi_i \vdash \varphi$  pour chaque  $i < \omega$ .
- $\alpha \leq \text{RM}(\varphi)$ , pour  $\alpha$  limite, si  $\beta \leq \text{RM}(\varphi)$  pour chaque  $\beta < \alpha$ .

**Remarque 1.2.2.** Par récurrence, on a que  $\alpha \leq \text{RM}(\varphi) \Rightarrow \beta \leq \text{RM}(\varphi)$  pour  $\beta \leq \alpha$ . Si  $\psi \vdash \varphi$ , alors  $\text{RM}(\psi) \leq \text{RM}(\varphi)$ .

Le rang de Morley d'une formule  $\varphi(x, a)$  ne dépend que de  $\varphi$  et  $\text{tp}(a)$ . Donc, si  $\varphi$  est définie sur un modèle  $\omega$ -saturé  $M$  et  $\alpha < \text{RM}(\varphi)$ , alors il existe une famille  $\{\psi_i\}_{i < \omega}$  à paramètres dans  $M$  2 à 2 disjointes avec  $\alpha \leq \text{RM}(\psi_i)$  et  $\psi_i \vdash \varphi$  pour chaque  $i < \omega$ . En particulier, la définition récursive est possible, car on se restreint aux formules à paramètres dans  $M$  et on ne prend pas la classe des formules à paramètres dans  $\mathfrak{C}$  (ce genre de récurrence n'est pas possible dans NBG).

**Définition 1.2.3.** S'il n'existe aucun nombre ordinal  $\alpha$  tel que  $\alpha \leq \text{RM}(\varphi)$ , alors on pose  $\text{RM}(\varphi) = -\infty$ . Si  $\alpha \leq \text{RM}(\varphi)$  pour tout  $\alpha \in \text{On}$ , on pose  $\text{RM}(\varphi) = \infty$ . Sinon, il existe un  $\alpha$  dans  $\text{On}$  maximal tel que  $\alpha \leq \text{RM}(\varphi)$ , et l'on pose  $\text{RM}(\varphi) = \alpha$ . Si  $\text{RM}(\varphi) \in \text{On}$ , la valeur  $\text{RM}(\varphi)$  s'appelle le *rang de Morley* de  $\varphi$ , et on dit que le rang de Morley de  $\varphi$  est *défini*.

Notons que  $\text{RM}(\varphi) = -\infty$  si et seulement si  $\varphi$  est inconsistent avec  $T$ . De plus, la formule  $\varphi$  est algébrique si et seulement si  $\text{RM}(\varphi) = 0$ .

**Remarque 1.2.4.** Par récurrence, si  $\text{RM}(\varphi) \in \text{On}$ , alors pour chaque  $\beta < \text{RM}(\varphi)$  il existe une formule  $\psi$  de rang de Morley  $\beta$  telle que  $\psi \vdash \varphi$ . En particulier, si le rang de Morley de  $\varphi$  est défini, alors  $\text{RM}(\varphi) \leq (2^{|T|})^+$ , puisque les ordinaux qui sont rang de Morley d'une formule forment un segment initial de  $\text{On}$ .

**Lemme 1.2.5.**

$$\text{RM}(\varphi \vee \psi) = \max(\text{RM}(\varphi), \text{RM}(\psi)).$$

*En particulier, l'ensemble de formules de rang de Morley au plus  $\alpha \in \text{On}$  est un idéal de l'algèbre Booléenne de classes d'équivalences de formules modulo  $T$ .*

*Démonstration.* Par la remarque précédente, on a que  $\text{RM}(\varphi \vee \psi) \geq \max(\text{RM}(\varphi), \text{RM}(\psi))$ . Il suffit donc de montrer que, si  $\text{RM}(\varphi \vee \psi) \geq \alpha + 1$ , alors soit  $\text{RM}(\varphi) \geq \alpha + 1$  ou  $\text{RM}(\psi) \geq \alpha + 1$ . Par hypothèse, il existe une famille  $\{\psi_i\}_{i < \omega}$  de formules 2 à 2 disjointes avec  $\alpha \leq \text{RM}(\psi_i)$  et  $\psi_i \vdash \varphi \vee \psi$  pour chaque  $i < \omega$ . Notons que  $\psi_i = (\psi_i \wedge \varphi) \vee (\psi_i \wedge \psi)$ . Par récurrence, on conclut que soit  $\text{RM}(\psi_i \wedge \varphi) \geq \alpha$  ou soit  $\text{RM}(\psi_i \wedge \psi) \geq \alpha$ . Une de deux possibilités doit avoir lieu une infinité des fois, donc soit  $\text{RM}(\varphi) \geq \alpha + 1$ , soit  $\text{RM}(\psi) \geq \alpha + 1$ .  $\square$

**Définition 1.2.6.** Deux formules  $\varphi$  et  $\psi$  sont  $\alpha$ -équivalentes, dénoté par  $\varphi \sim_\alpha \psi$ , si  $\text{RM}(\varphi \Delta \psi) < \alpha$ .

Par le lemme 1.2.5, la relation  $\sim_\alpha$  est une relation d'équivalence. Une formule  $\varphi$  de rang de Morley  $\alpha \in \text{On}$  est  $\alpha$ -indécomposable si pour toute  $\psi \subset \varphi$ , alors  $\psi \sim_\alpha \emptyset$  ou  $\psi \sim_\alpha \varphi$ .

**Lemme 1.2.7.** *Toute formule  $\varphi$  de rang de Morley  $\alpha \in \text{On}$  est  $T$ -équivalente à une disjonction finie des formules  $\varphi_1, \dots, \varphi_d$  de rang  $\alpha$  qui sont 2 à 2 disjointes et  $\alpha$ -indécomposables. De plus, les formules  $\varphi_1, \dots, \varphi_d$  sont uniques, à  $\sim_\alpha$ -équivalence près et permutation.*

En particulier, si  $\text{RM}(\varphi) \leq \alpha \in \text{On}$ , il existe  $n$  dans  $\mathbb{N}$  tel que l'on ne trouve jamais des formules  $\{\psi_i\}_{i < n}$  contenues dans  $\varphi$  de rang de Morley supérieur à  $\alpha$  et 2 à 2 disjointes.

*Démonstration.* Sinon, soit  $\varphi$  une formule de rang de Morley  $\alpha$  sans une telle décomposition. En particulier, il existe  $\psi \subset \varphi$ , avec  $\psi \not\sim_\alpha \emptyset$  et  $\psi \not\sim_\alpha \varphi$ . Donc  $\psi$  et  $\varphi \setminus \psi$  ont rang de Morley  $\alpha$ . On itère pour trouver une nombre fini arbitrairement large de formules 2 à 2 disjointes de rang de Morley  $\alpha$ , ce qui entraîne  $\text{RM}(\varphi) > \alpha$ .

Pour voir l'unicité de cette décomposition, soit  $\psi$  de rang de Morley  $\alpha$  contenue dans  $\varphi$  et  $\alpha$ -indécomposable. Puisque

$$\psi = \bigcup_{i=1}^d \psi \cap \varphi_i,$$

le lemme 1.2.5 entraîne qu'il existe un seul  $1 \leq i \leq d$  avec  $\text{RM}(\psi \cap \varphi_i) = \alpha$  et donc  $\psi \sim_\alpha \varphi_i$ .  $\square$

**Remarque 1.2.8.** Si  $\varphi$  a paramètres dans un modèle  $\omega$ -saturé  $M$ , alors il existe une décomposition comme dans le lemme 1.2.7, où chaque formule  $\psi$  a paramètres dans  $M$ .

**Définition 1.2.9.** Les formules  $\varphi_1, \dots, \varphi_d$  comme dans le lemme 1.2.7 s'appellent les  $\alpha$ -composantes de  $\varphi$ . L'entier  $d$  s'appelle le *degré de Morley* de  $\varphi$ , noté par  $DM(\varphi)$ .

**Remarque 1.2.10.** Si  $RM(\varphi) = 0$ , alors  $DM(\varphi) = |\varphi|$ .

Les rang et degré de Morley se préservent sous bijections définissables.

En outre, s'il existe une famille infinie  $\{\psi_i\}_{i < \omega}$  de formules (à paramètres dans  $\mathfrak{C}$ ), chacune de rang de Morley au moins  $\alpha$  et contenue dans  $\varphi$ , telle que, pour un certain entier  $k$ , la conjonction de chaque sous-famille de  $\{\psi_i\}_{i < \omega}$  à  $k$  éléments est vide, alors  $\alpha + 1 \leq RM(\varphi)$ .

De façon analogue à la démonstration du lemme 1.2.5, on en déduit l'additivité du degré de Morley.

**Corollaire 1.2.11.** Si  $\varphi$  est la réunion disjointe de  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , toutes les deux du même rang de Morley que  $\varphi$ , alors

$$DM(\varphi) = DM(\psi_1) + DM(\psi_2).$$

**Définition 1.2.12.** Étant donné un type  $p = \text{tp}(b/A)$ , son rang de Morley est

$$RM(p) = RM(b/A) = \min\{RM(\varphi)\}_{\varphi \in p}$$

et son degré de Morley est

$$DM(p) = DM(b/A) = \min\{DM(\varphi)\}_{\substack{\varphi \in p \\ RM(\varphi) = RM(p)}}.$$

En particulier, si  $\psi \in p$ , alors  $RM(p) \leq RM(\psi)$ . De plus, le type  $p$  est algébrique si et seulement si  $RM(p) = 0$ . Dans ce cas, on a que  $DM(p) = |p(\mathfrak{C})|$ . De même, si  $p$  a paramètres sur un modèle  $\omega$ -saturé, alors  $DM(p) = 1$ .

**Remarque 1.2.13.** Si  $p$  est un type sur  $\text{acl}(A)$ , alors  $RM(p) = RM(p \upharpoonright A)$ .

Tout type  $p \in S(A)$  de rang de Morley  $\alpha \in \text{On}$  et degré  $d$  contient une formule  $\varphi$  de rang  $\alpha$  et degré  $d$ . De plus, pour toute formule  $\psi$  à paramètres dans  $A$ , on a

$$RM(\varphi \wedge \neg\psi) < \alpha \iff \psi \in p.$$

En particulier, le type  $p = \{\psi \text{ } \mathcal{L}_A\text{-formule} \mid RM(\varphi \wedge \neg\psi) < \alpha\}$ , et la formule  $\varphi$  est unique, à  $\sim_\alpha$ -équivalence près.

**Lemme 1.2.14.** Si  $\varphi$  est une  $\mathcal{L}$ -formule consistante à paramètres dans  $A$ , alors

$$\begin{aligned} RM(\varphi) &= \max\{RM(p) \mid \varphi \in p \in S(A)\} \\ DM(\varphi) &= \sum_{\substack{\varphi \in p \in S(A) \\ RM(p) = RM(\varphi)}} DM(p) \end{aligned}$$

*Démonstration.* D'abord, traitons le cas  $RM(\varphi) = \infty$ . Le type partiel

$$\{\varphi\} \cup \{\neg\psi \mid \psi \text{ } \mathcal{L}_A\text{-formule avec } RM(\psi) \in \text{On}\}$$

est consistant et toute complétion  $p$  a  $RM(p) = \infty$ .

Si  $RM(\varphi) = \alpha \in \text{On}$ , soit  $k$  dans  $\mathbb{N}$  maximal tel que  $\varphi$  est la réunion de  $\mathcal{L}_A$ -formules disjointes  $\varphi_i$ , pour  $1 \leq i \leq k$ , chacune de rang de Morley  $\alpha$ . Notons que  $k \leq DM(\varphi)$ . En particulier, puisque  $\alpha \geq 0$ , aucune  $\varphi_i$  est la réunion disjointe de deux formules sur  $A$  de rang de Morley  $\alpha$ . Donc chaque  $\varphi_i$  détermine un type complet sur  $A$  :

$$p_i = \{\psi \text{ } \mathcal{L}_A\text{-formule} \mid RM(\varphi_i \wedge \neg\psi) < \alpha\}.$$

De plus, les  $p_i$  sont exactement les types sur  $A$  du rang de Morley  $\alpha$  contenant  $\varphi$ . Donc  $DM(p_i) = DM(\varphi_i)$ .  $\square$

**Corollaire 1.2.15.** Si le rang de Morley de  $p \in S(A)$  est défini, pour tout  $A \subset B$  on a

$$DM(p) = \sum_{\substack{p \subset q \in S(B) \\ RM(p) = RM(q)}} DM(q).$$

En particulier, le type  $p$  a au moins une extension et au plus  $DM(p)$  extensions sur  $B$  du même rang de Morley.

**Définition 1.2.16.** Si le rang de Morley du type  $p \in S(A)$  est défini, une extension  $p \subset q \in S(B)$  de types est *non-déviante* si  $\text{RM}(p) = \text{RM}(q)$ . Si le rang de Morley de  $p$  est défini, alors  $p$  est *stationnaire* si  $\text{DM}(p) = 1$ .

**Corollaire 1.2.17.** *Tout type sur un modèle  $\omega$ -saturé de rang de Morley défini est stationnaire.*

**Lemme 1.2.18.** *Si  $b$  est algébrique sur  $Aa$ , alors  $\text{RM}(b/A) \leq \text{RM}(a/A)$ .*

*Démonstration.* Si  $\text{RM}(a/A)$  n'est pas défini, il n'y a rien à démontrer. Sinon, supposons que  $\text{RM}(a/A) = \alpha \in \text{On}$  et soit  $\varphi(x, y)$  une formule à paramètres sur  $A$  telle que  $\varphi(x, a)$  témoigne l'algébraicité de  $b$  sur  $Aa$ . Puisque  $\text{RM}(b/Aa) = 0$ , soit  $d = \text{DM}(b/Aa)$ . On modifie  $\varphi$  de telle façon que  $\text{RM}(\exists x \varphi(x, y)) = \alpha$  et que l'ensemble  $\varphi(x, a')$  a taille au plus  $d$  pour tout  $a'$  dans  $\mathcal{C}$ .

Il suffit maintenant de montrer que le rang de la formule  $\exists y \varphi(x, y)$  est borné par  $\alpha$ . Sinon, il existe une famille infinie  $\{\psi_n(x)\}_{n < \omega}$  de formules 2 à 2 disjointes, chacune de rang de Morley au moins  $\alpha$  et contenue dans  $\exists y \varphi(x, y)$ . Posons  $\varphi_n(y) = \exists x (\varphi(x, y) \wedge \psi_n(x))$ . Par construction, l'intersection de chaque  $d + 1$  parmi les  $\varphi_n(y)$  est vide. Comme le rang de  $\exists x \varphi(x, y)$  est borné par  $\alpha$ , alors l'une des formules  $\varphi_{n_0}(y)$  doit avoir rang strictement inférieur à  $\alpha$ . Soit  $b' \models \psi_{n_0}(x)$ . Puisque  $\psi_{n_0}$  est contenue dans  $\exists y \varphi(x, y)$ , il existe  $a'$  tel que  $\varphi(b', a')$ , donc  $b'$  est algébrique sur  $Aa'$ . En particulier, l'élément  $a' \models \varphi_{n_0}(y)$ , donc  $\text{RM}(a'/A) < \alpha$ . Par récurrence, on obtient que  $\text{RM}(b'/A) < \alpha$  aussi. Cela contredit que  $\text{RM}(\psi_{n_0}(x)) \geq \alpha$ . □

**Définition 1.2.19.** Une théorie  $T$  est *totale transcendance* si le rang de Morley de  $x = x$  est défini.

**Lemme 1.2.20.** *Une théorie  $T$  est totale transcendance si et seulement si  $T$  n'admet pas de modèle  $M$  tel qu'il existe un arbre binaire  $\{\varphi_s\}_{s \in {}^{<\omega}2}$  des formules consistantes à paramètres dans  $M$ , c'est à dire, pour chaque  $s$  dans  ${}^{<\omega}2$ , la branche  $\{\varphi_{s \upharpoonright n}\}_{n < \omega}$  est consistante et, pour  $s$  dans  ${}^{<\omega}2$ , la formule  $\varphi_s$  contient la réunion disjointe de  $\varphi_{s \smallfrown 0}$  et  $\varphi_{s \smallfrown 1}$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $T$  n'est pas totale transcendance. Puisque l'ensemble d'ordinaux qui sont le rang de Morley d'une formule de  $T$  n'est pas cofinal, il existe donc un ordinal  $\alpha$  tel que  $\text{RM}(\varphi) = \infty$  si et seulement si  $\text{RM}(\varphi) \geq \alpha$  pour toute formule  $\varphi$ .

Soit  $M$  un modèle  $\omega$ -sature de  $T$  contenant les paramètres d'une formule  $\varphi_\emptyset$  sans rang de Morley. En particulier, on a que  $\text{RM}(\varphi_\emptyset) \geq \alpha + 1$ , donc il existe deux formules disjointes  $\psi_1$  et  $\psi_2$  dans  $\varphi_\emptyset$  de rang au moins  $\alpha$ , que l'on suppose aussi définies sur  $M$ . Puisque  $\psi_2 \vdash \varphi_\emptyset \wedge \neg \psi_1$ , la remarque 1.2.4 entraîne que  $\varphi_\emptyset$  est la réunion disjointe de deux formules  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sur  $M$  sans rang de Morley. Par récurrence, on obtient un arbre binaire des formules à paramètres dans  $M$ .

Si  $T$  admet un arbre binaire  $\{\varphi_s\}_{s \in {}^{<\omega}2}$  à paramètres sur un modèle  $M$ , supposons que le rang de Morley de  $\varphi_\emptyset$  est défini et égal à  $\alpha$ . Puisque  $\varphi_\emptyset$  contient la réunion disjointe de  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$ , soit le rang de Morley ou le degré de Morley doit diminuer à chaque étape, par le lemme 1.2.5 et le corollaire 1.2.11, ce qui contredit que l'arbre est infini. □

### 1.3 Le Théorème de Morley

**Définition 1.3.1.** La théorie  $T$  est  $\kappa$ -catégorique si elle n'admet qu'un seul modèle (à isomorphie près) de cardinalité  $\kappa$ .

**Remarque 1.3.2.** Notons que si  $T$  est  $\kappa$ -catégorique, elle doit être impérativement complète.

Donc par la suite, dans cette partie, on supposera que la théorie  $T$  est dénombrable et complète avec des modèles infinis. Le célèbre théorème de Morley affirme que la catégoricité dans un cardinal non-dénombrable entraîne la catégoricité dans tous les cardinaux non-dénombrables. Pour le démontrer, Morley introduisit des notions et techniques qui sont à la base de la théorie des modèles géométrique de nos jours.

**Définition 1.3.3.** Un modèle  $M \models T$  est dit *premier* s'il se plonge élémentairement dans tout autre modèle de  $T$ . On définit de façon analogue être *premier sur un sous-ensemble*  $A$ .

Un modèle  $M \models T$  est dit *minimal* sur la sous-partie  $A \subset M$  s'il ne contient pas de sous-modèles propres contenant  $A$ .

Un modèle  $M$  est *constructible sur*  $A$  si  $M = \{m_i\}_{i < \kappa}$  et le type de chaque  $m_i$  est atomique sur  $A \cup \{m_j\}_{j < i}$ . On dit que  $M$  est atomique s'il est constructible sur  $\emptyset$ .

**Proposition 1.3.4.** *Un modèle  $M$  de  $T$  est premier si et seulement s'il est dénombrable et atomique.*

*Démonstration.* Clairement, puisque  $T$  admet un modèle dénombrable, alors le modèle premier  $M$  doit l'être aussi. De même, tout type réalisé dans  $M$  l'est dans tout autre modèle de  $T$ , donc  $M$  ne réalise pas de types non-isolés.

Supposons que  $M \models T$  est constructible dénombrable et soit  $N \models T$  un autre modèle quelconque. Fixons une énumération  $M = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Nous allons construire une suite croissante d'applications élémentaires  $f_n : A_n \rightarrow N$ , où  $A_n = \{a_i\}_{i < n}$ . Notons que  $f_0$  est élémentaire puisque  $T$  est complète. Si  $f_n : A_n \rightarrow N$  est donnée, il suffit de montrer que le type  $f_n(\text{tp}(a_n/A_n))$  est réalisé dans  $N$ . Puisque le type  $\text{tp}(a_n/A_n)$  est isolé par la formule  $\varphi(x, \bar{a})$ , le type  $f_n(\text{tp}(a_n/A_n))$  est isolé par  $\varphi(x, f(\bar{a}))$  et donc réalisé dans  $N$ .  $\square$

**Corollaire 1.3.5.** *Un modèle premier de  $T$ , s'il existe, est unique à isomorphie près. De plus, il est  $\omega$ -homogène.*

**Proposition 1.3.6.** *La théorie  $T$  possède un modèle premier si et seulement si les types isolés sont denses dans  $S(\emptyset)$ .*

*Démonstration.* Si  $M \models T$  est premier, étant donné un voisinage  $[\varphi]$  d'un type  $p$  dans  $S(\emptyset)$ , la formule  $\varphi$  est constante et donc réalisé dans  $M$  par  $a$ . Or, le type  $\text{tp}(a)$  est isolé et contenu dans  $[\varphi]$ .

Pour l'autre direction, il suffit de montrer que, pour chaque  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , le type partiel

$$\Sigma(x_1, \dots, x_n) = \{\neg\varphi(x_1, \dots, x_n) \mid |[\varphi] \cap S_n| = 1\}$$

n'est pas isolé, puisque un modèle  $M$  dénombrable qui omet tout les  $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$  est, par construction, atomique. Si  $\psi$  isole  $\Sigma$ , la densité des types isolés entraîne qu'il existe un type  $p$  isolé par une formule  $\varphi$  qui est contenu dans  $[\psi]$ . En particulier, puisque  $|[\varphi] \cap S_n| = 1$ , on a que

$$T \vdash \forall x_1, \dots, x_n (\psi(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \neg\varphi(x_1, \dots, x_n)),$$

ce qui contredit le fait que  $\psi$  et  $\varphi$  sont dans  $p$ .  $\square$

**Corollaire 1.3.7.** *Si  $T$  est totalement transcendante, alors, pour tout ensemble  $A$ , les types isolés sont denses dans  $S(A)$ . En particulier, tout sous-ensemble  $A$  admet un modèle premier  $M$ , c'est à dire, toute application élémentaire de  $A$  dans  $N$  s'étend à une de  $M$  dans  $N$ . De plus, ce modèle  $M$  est constructible sur  $A$ .*

*Démonstration.* Sinon, il existe une formule  $\varphi$  telle que  $[\varphi]$  ne contient pas de types isolés. Or, en particulier,  $|[\varphi]| \geq 2$ , donc il existent deux formules  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  disjointes contenues dans  $\varphi$ . Ni  $[\varphi_0]$  ni  $[\varphi_1]$  contiennent des types isolés, donc on itère pour obtenir un arbre binaire.  $\square$

**Théorème 1.3.8** (Ryll-Nardzewski). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- La théorie  $T$  est  $\omega$ -catégorique.
- $S_n(\emptyset)$  est fini  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- Tout modèle dénombrable est  $\omega$ -saturé.
- Il n'existe qu'un nombre fini de formules à variables, à  $T$ -équivalence près.

**Remarque 1.3.9.** Notons que  $T$  est  $\omega$ -catégorique si et seulement si  $S_n(A)$  est fini pour chaque ensemble fini  $A$ . En particulier, la clôture algébrique d'une ensemble fini  $A$  est finie aussi (On dit que  $T$  est *localement finie*, cf. Corollaire 4.3.12).

**Corollaire 1.3.10** (Vaught). *Une théorie complète dénombrable  $T$  ne peut pas avoir exactement deux modèles dénombrables, à isomorphie près.*

**Définition 1.3.11.** *Une paire de Vaught de  $T$  est la donnée de  $\mathcal{M} \not\approx \mathcal{N} \models T$  et d'une formule  $\varphi$  à paramètres dans  $M$  tels que l'ensemble  $\varphi(M) = \varphi(N)$  est infini.*

**Remarque 1.3.12.** Notons que  $T$  n'admet pas de paires de Vaught si et seulement si, pour toute formule  $\varphi$  à paramètres dans  $A \subset M \models T$  telle que l'ensemble  $\varphi(M)$  est infini, alors  $M$  est minimal sur  $A \cup \varphi(M)$ .

**Théorème 1.3.13** (Le théorème de deux cardinaux de Vaught). *Si  $T$  admet des paires de Vaught, alors, pour tout  $\kappa \geq \omega$ , il existe  $M \models T$  de cardinalité  $\kappa$  et une formule  $\varphi$  à paramètres sur  $M$  telle que  $\varphi(M)$  est infini dénombrable.*

**Corollaire 1.3.14.** *Si  $\kappa > \omega$ , une théorie  $\kappa$ -catégorique n'a pas de paires de Vaught.*

*Démonstration.* Si  $T$  avait une paire de Vaught, alors par le théorème 1.3.13, il existe  $M \models T$  de cardinalité  $\kappa$  et  $\varphi$  telle que  $\varphi(M)$  est infini dénombrable.

Puisque le langage est dénombrable, c'est facile à construire, par un argument de chaîne, un modèle  $N$  de cardinalité  $\kappa$  tel que toute formule infini à paramètres dans  $N$  est non-dénombrable. Cela contredit la  $\kappa$ -catégoricité de  $T$ .  $\square$

**Définition 1.3.15.** La théorie  $T$  *élimine le quantificateur*  $\exists^\infty x$  si pour toute formule  $\varphi(x, y)$  il existe un entier  $n_\varphi$  tel que, pour tout  $M \models T$  et tout uple  $\bar{a}$  dans  $M$ ,

$$\varphi(M, a) \text{ est infini ou } |\varphi(M, a)| \leq n_\varphi.$$

Équivalamment, pour toute formule  $\varphi(x, y)$  il existe  $\psi(y)$  telle que, pour tout  $M \models T$  et tout uple  $\bar{a}$  dans  $M$ ,

$$\varphi(M, a) \text{ est infini } \Leftrightarrow M \models \psi(a).$$

**Remarque 1.3.16.** Pour éliminer  $\exists^\infty x$ , il suffit de le montrer pour  $x$  de longueur 1.

**Exercice.** Si  $T$  est la théorie dans le langage  $L = \{E\}$  qui énonce que  $E$  est une relation d'équivalence avec exactement une classe de taille  $n$ , pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $T$  n'élimine pas  $\exists^\infty x$ .

**Lemme 1.3.17.** *Si  $T$  n'a pas des paires de Vaught, elle élimine  $\exists^\infty x$ .*

*Démonstration.* Sinon, étant donnée une formule  $\varphi(x, y)$ , pour chaque entier  $n$ , il existe un modèle  $M_n \models T$  et un uple  $a_n$  dans  $M_n$  tels que l'ensemble  $\varphi(M, a_n)$  est fini mais de taille au moins  $n$ . Si l'on prend une extension élémentaire  $N_n$  de  $M_n$ , l'ensemble  $\varphi(M_n, a_n) = \varphi(N_n, a_n)$ , puisque c'est fini.

Par compacité (dans le langage  $\mathcal{L} \cup \{P\}$ , où  $P$  s'interprète comme une sous-structure élémentaire propre), on obtient une paire de Vaught pour  $T$ .  $\square$

**Définition 1.3.18.** La théorie  $T$  est  $\kappa$ -stable si  $|S(A)| \leq \kappa$  pour tout ensemble  $A$  de taille bornée par  $\kappa$ .

**Remarque 1.3.19.** Pour montrer que  $T$  est  $\kappa$ -stable, il suffit de borner le nombre des types unaires sur  $A$ , que l'on peut supposer un modèle.

Un argument de chaîne permet de montrer que si  $T$  est  $\kappa$ -stable, alors pour tout cardinal régulier  $\lambda \leq \kappa$ , il existe un modèle de cardinalité  $\kappa$ , qui est  $\lambda$ -saturé. Donc, si  $T$  est  $\kappa$ -stable pour  $\kappa$  régulier (en fait, cette condition n'est pas nécessaire), elle a un modèle saturé de cardinalité  $\kappa$ , qui est unique à isomorphie près, par le lemme 1.1.3. En particulier, nous n'avons pas besoin de travailler avec le monstre, et le modèle saturé de cardinalité  $\kappa$  nous suffit (si  $\kappa^{|T|} = \kappa$ ).

Grâce à la *Skolemisation* de toute théorie, on peut montrer le résultat suivant :

**Lemme 1.3.20.** *Pour tout  $\kappa \geq \omega$ , il existe  $M \models T$  de taille  $\kappa$  ne réalisant qu'un nombre dénombrable des types sur chaque ensemble dénombrable.*

Ceci permet de déduire le résultat suivant :

**Théorème 1.3.21.** *Si  $T$  est  $\kappa$ -catégorique pour un certain  $\kappa > \omega$ , alors  $T$  est  $\omega$ -stable.*

*Démonstration.* Sinon, il existe un ensemble  $A$  dénombrable tel que  $S(A)$  contient une collection de taille  $\omega_1$  des types distincts. On peut prendre un modèle  $N$  de  $T$  de cardinalité  $\kappa$  contenant  $A$  qui réalise tous ces types, et soit  $M$  le modèle de  $T$  comme dans le lemme 1.3.20. Clairement  $N \not\equiv M$ .  $\square$

**Théorème 1.3.22.** *Si  $T$  est  $\omega$ -stable, alors elle est totalement transcendante. De plus, si  $T$  est totalement transcendante, alors elle est  $\kappa$ -stable pour tout  $\kappa \geq \omega$ .*

*Démonstration.* Clairement, les paramètres nécessaires pour témoigner un arbre binaire des formules forment un ensemble dénombrable  $A$ . Chaque branche détermine un type différent, donc il existe  $2^{\aleph_0}$  types sur  $A$ .

Supposons maintenant que  $S(A)$  contient plus de  $\kappa$  types pour un ensemble  $A$  fixé de taille borné par  $\kappa$ . Nous appelleront une formule  $\varphi$  à paramètres sur  $A$  *large* si  $||\varphi|| > \kappa$ . Puisque le langage est dénombrable, le nombre des types contenant uniquement des formules non larges est borné par  $\kappa$ .

Par définition, la formule  $x = x$  est large. Si  $\varphi$  est large, elle est donc contenue dans deux types distincts, ne contenant chacun que des formules larges. Ceci donne un arbre binaire.  $\square$

En particulier, la théorie  $T$  est  $\omega$ -stable si et seulement si elle est totalement transcendante (Notons que le langage est dénombrable). De plus, la théorie  $T$  a un modèle saturé de cardinalité  $\kappa$  pour chaque  $\kappa$ , qui est donc unique à isomorphie près. Nous n'avons pas besoin de NBG pour obtenir un modèle monstre.

**Corollaire 1.3.23.** *Si  $T$  est  $\kappa$ -catégorique pour un certain  $\kappa > \omega$ , alors  $T$  est totalement transcendante.*

Grâce au lemme 1.1.3, on conclut le résultat suivant.

**Corollaire 1.3.24.** *La théorie  $T$  est  $\kappa$ -catégorique si et seulement si tout modèle de cardinalité  $\kappa$  est saturé.*

Lachlan montra que, si  $T$  est totalement transcendante et  $M \models T$  est un modèle non-dénombrable, il a des extensions élémentaires de cardinalité arbitraire qui omettent tout type partiel  $p$  sur un ensemble dénombrable  $A \subset M$ , si  $p$  est omis dans  $M$ . En particulier, ceci et le corollaire précédent permettent de montrer facilement que si  $T$  est  $\kappa$ -catégorique pour un certain  $\kappa > \omega$ , alors elle est  $\aleph_1$ -catégorique. Pour montrer que si  $T$  est  $\aleph_1$ -catégorique, alors elle est  $\kappa$ -catégorique pour tout  $\kappa > \omega$ , il nous faudra étudier d'ensembles dits *fortement minimaux*, qui déterminent chaque modèle, par le résultat suivant :

**Corollaire 1.3.25.** *Si  $\kappa > \omega$  et  $T$  est  $\kappa$ -catégorique, alors étant données un modèle  $M$  et une formule infinie  $\varphi$  à paramètres dans  $A \subset M$ , le modèle  $M$  est le modèle premier constructible sur  $A \cup \varphi(M)$ .*

*Démonstration.* Puisque  $T$  est totalement transcendante, par le corollaire 1.3.23, il existe un modèle premier sur  $A \cup \varphi(M)$ , qui est constructible, par le corollaire 1.3.7. Alors  $N$  se plonge dans  $M$  et donc est isomorphe à  $M$ , par minimalité de  $M$  sur  $A \cup \varphi(M)$ , par le corollaire 1.3.14 et la remarque 1.3.12.  $\square$

**Définition 1.3.26.** Une formule  $\varphi(x)$  à paramètres dans  $M \models T$  est *minimale* si pour toute  $\psi(x)$  à paramètres dans  $M$ , l'ensemble  $\varphi \cap \psi$  est soit fini soit cofini.

La formule  $\varphi$  est *fortement minimale* si  $\varphi$  est minimale dans toute extension élémentaire de  $M$ . Un type non-algébrique qui contient une formule fortement minimale est dit *fortement minimal*. La théorie  $T$  est *fortement minimale* si  $x = x$  l'est.

**Remarque 1.3.27.** Si  $\varphi(x, a)$  est fortement minimale, ceci est une propriété élémentaire de  $\text{tp}(a)$ , et donc indépendante du modèle qui contient l'uple  $a$ . En particulier, si  $\varphi(x, a)$  est fortement minimale, pour toute formule  $\psi(x, y)$  il existe un entier  $n_\psi$  tel que, si  $\psi(x, b) \vdash \varphi(x, a)$  pour un certain  $b$  et  $n \leq |\psi(x, b)|$ , alors  $|\varphi(x, a) \setminus \psi(x, b)| \leq n$ .

De plus, si  $T$  élimine  $\exists^\infty x$ , alors toute formule minimale est fortement minimale.

**Lemme 1.3.28.** *Si  $T$  est totalement transcendante, toute ensemble définissable infini de  $M^n$  contient une formule minimale.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi$  un ensemble infini définissable dans  $M^n$ , donc en particulier  $\text{RM}(\varphi) \geq 1$ . Prenons, parmi tous les sous-ensembles infinis définissables de  $\varphi$  à paramètres dans  $M$ , un de rang de Morley et degré de Morley minimal, dans l'ordre lexicographique. Il est clairement minimal, par le lemme 1.2.5 et le corollaire 1.2.11.  $\square$

**Corollaire 1.3.29.** *Une formule  $\varphi$ , à paramètres dans  $M$ , est minimale si et seulement s'il existe un seul type non-algébrique  $p$  dans  $S(M)$  la contenant.*

**Lemme 1.3.30.** *Un type fortement minimal  $p$  dans  $S(A)$  admet une seule extension non-algébrique sur chaque  $B \supset A$  dans une extension élémentaire. En particulier, le type  $p^{\otimes n}$  donné par  $n$  réalisations  $a_1, \dots, a_n$  de  $p$  telles que  $a_i \notin \text{acl}(A, a_1, \dots, a_{i-1})$  est uniquement déterminé par  $p$  et  $n$ .*

*Démonstration.* C'est évident que  $p$  admet d'extensions non-algébriques à l'ensemble de paramètres  $B$ . Or, si  $\varphi$  est une formule fortement minimale dans  $p$ , le corollaire 1.3.29 entraîne que  $\varphi$  est contenue dans un seul type dans  $S(M)$ , pour chaque  $M \supset B$ , ce qui donne l'unicité des extensions non-algébriques pour  $p$ .  $\square$

**Définition 1.3.31.** Une *pré-géométrie* est la donnée d'un ensemble  $X$  et un opérateur clôture  $\text{cl} : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  satisfaisant, pour tout  $A \subset X$  :

**Réflexivité**  $A \subset \text{cl}(A)$ ,

**Caractère fini**  $\text{cl}(A) = \bigcup_{\substack{A' \subset A \\ \text{fini}}} \text{cl}(A')$ ,

**Transitivité**  $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$ ,

**Principe d'échange de Steinitz** Pour tout  $a$  et  $b$  dans  $X$ ,

$$a \in \text{cl}(Ab) \setminus \text{cl}(A) \Rightarrow b \in \text{cl}(Aa)$$

En particulier, l'opérateur est monotone : si  $A \subset B$ , alors  $\text{cl}(A) \subset \text{cl}(B)$ .

Notons que dans toute structure  $\mathcal{A}$ , l'opérateur  $\text{acl}$  est réflexif, transitif et a caractère fini. Si  $\varphi$  est fortement minimale, alors  $\text{acl}$  restreint à  $\varphi$  induit une prégéométrie. De la même façon que dans le cas d'un espace vectoriel, étant donnée une formule fortement minimale  $\varphi$  sur  $A$ , à toute modèle  $M \supset A$  l'on peut associer sa *dimension*  $\dim_\varphi(M/A)$ , la longueur maximale d'un uple dans  $\varphi(M)$   $\text{acl}$ -indépendante sur  $A$ . Cette dimension est invariant par automorphismes.

Notons que la dimension d'une prégéométrie est *sous-modulaire* :

$$\dim(\text{cl}(YZ)) + \dim(X \cap Z) \leq \dim(Y) + \dim(Z),$$

pour tous sous-ensembles clos  $Y$  et  $Z$ .

**Définition 1.3.32.** Une prégéométrie est *triviale* si pour tous deux uples finies  $a$  et  $b$ , on a  $\text{cl}(ab) = \text{cl}(a) \cup \text{cl}(b)$ .

La prégéométrie est *localement modulaire* si, pour tous deux sous-ensembles clos  $Y$  et  $Z$  avec  $0 < \dim(Y \cap Z)$ , alors

$$\dim(\text{cl}(YZ)) + \dim(X \cap Z) = \dim(Y) + \dim(Z).$$

Elle est *modulaire* si l'on a toujours l'égalité sans restrictions.

**Corollaire 1.3.33.** Si  $\varphi$  est fortement minimale et définie sur  $A_0$ , étant donnés deux modèles  $M$  et  $N$  contenant  $A_0$ , il existe une application élémentaire entre  $\varphi(M)$  et  $\varphi(N)$  si et seulement si  $\dim_\varphi(M/A_0) = \dim_\varphi(N/A_0)$ .

Par le lemme de Tarski, on déduit le résultat suivant.

**Corollaire 1.3.34.** Si  $T$  est fortement minimale et  $S$  est un sous-ensemble infini de  $M \models T$  algébriquement clos, alors  $S \preceq M$ . En particulier, si  $A$  est infini, alors  $\text{acl}(A)$  est le modèle premier sur  $A$ .

**Corollaire 1.3.35.** Si  $T$  est fortement minimale, elle est  $\kappa$ -catégorique pour tout  $\kappa > \omega$ . Un modèle  $M$  de  $T$  est saturé si et seulement si  $\dim(M) = \kappa$ .

On a à notre disposition tous les ingrédients pour montrer le théorème de Morley, grâce au résultat suivant :

**Théorème 1.3.36** (Baldwin-Lachlan). Si  $\kappa > \omega$ , la théorie  $T$  est  $\kappa$ -catégorique si et seulement si elle est  $\omega$ -stable et sans paires de Vaught.

*Démonstration.* Si  $T$  est  $\kappa$ -catégorique, alors elle est  $\omega$ -stable par le théorème 1.3.21. De plus, elle n'a pas de paires de Vaught par le corollaire 1.3.14.

Si  $T$  est  $\omega$ -stable sans paires de Vaught, alors elle est totalement transcendante, par le théorème 1.3.22, donc par le corollaire 1.3.7, elle admet un modèle premier  $M_0$ . Puisque  $M_0$  est infini, le lemme 1.3.28 donne l'existence d'une formule minimale  $\varphi(x)$  à paramètres sur  $M_0$ . Le lemme 1.3.17 et la remarque 1.3.27 entraînent que  $\varphi$  est fortement minimale. Notons que les paramètres de  $\varphi$  sont réalisés dans tout modèle de  $T$ , car son type est atomique.

Étant donnés deux modèles  $M$  et  $N$  de  $T$  de cardinalité  $\kappa$ , nous pouvons voir  $M_0$  comme une sous-structure élémentaire commune de  $M$  et de  $N$ . Le corollaire 1.3.25 nous permet d'en déduire que  $\dim_\varphi(M/M_0) = \kappa = \dim_\varphi(N/M_0)$ . En particulier, par le corollaire 1.3.33, nous avons une application élémentaire entre  $\varphi(M)$  et  $\varphi(N)$ , qui s'étend à un isomorphisme entre  $M$  et  $N$ . □

**Corollaire 1.3.37** (Morley). Si  $\kappa > \omega$ , la théorie  $T$  est  $\aleph_1$ -catégorique si et seulement si elle est  $\kappa$ -catégorique.

# Chapitre 2

## Éléments de stabilité

### 2.1 Ensembles fortement minimaux

Dans cette partie, nous allons considérer d'ensembles fortement minimaux pour décrire certains de leurs propriétés. La remarque suivante suit immédiatement de la définition.

**Remarque 2.1.1.** Une formule  $\varphi$  est fortement minimale si et seulement si  $\text{RM}(\varphi) = 1$  et  $\text{DM}(\varphi) = 1$ .

**Théorème 2.1.2.** Si  $\varphi$  est une formule fortement minimale à paramètres sur  $B$ , alors pour tout uple  $a_1, \dots, a_n$  de réalisations de  $\varphi$ , on a que  $\text{RM}(a_1, \dots, a_n/B) = \dim_{\varphi}(a_1, \dots, a_n/B)$ .

En particulier, pour des réalisations de  $\varphi$ , le rang de Morley est additif, c'est à dire, si  $a$  et  $c$  sont des uples dont chaque coordonnée réalise  $\varphi$ , alors

$$\text{RM}(a, c/B) = \text{RM}(a/B) + \text{RM}(c/Ba).$$

*Démonstration.* Par le lemme 1.2.18, nous pouvons supposer que  $a_1, \dots, a_n$  sont algébriquement indépendantes sur  $B$ . Montrons d'abord, par récurrence, que  $\text{tp}(a_1, \dots, a_n/B)$  a rang de Morley au moins  $n$ . Si  $n = 1$ , alors c'est évident. Pour  $n > 1$ , soit  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  une formule dans  $\text{tp}(a_1, \dots, a_n/B)$ . La formule  $\psi_{a_1} = (\psi(a_1, x_2, \dots, x_n) \wedge x_1 = a_1) \in \text{tp}(a_1, \dots, a_n/Ba_1)$ . Or, le lemme 1.2.18 donne par récurrence  $\text{RM}(a_1, \dots, a_n/B) = \text{RM}(a_2, \dots, a_n/B) \geq n - 1$ . En particulier  $\text{RM}(\psi_{a_1}) \geq n - 1$ . Notons que si  $a'_1 \equiv_B a_1$  est un conjugué différent de  $a_1$ , alors  $\psi_{a_1} \cap \psi_{a'_1} = \emptyset$ . Comme  $a_1$  n'est pas algébrique, il donne un nombre infini de conjugués disjoints contenus dans  $\psi(x_1, \dots, x_n)$ . On conclut donc que  $\text{RM}(\psi) \geq n$ .

Par le lemme 1.3.30, le type d'un uple de longueur  $n$  algébriquement indépendant est uniquement déterminé. Par la discussion précédente, il a rang de Morley au moins  $n$ . Puisque le rang de la formule  $\varphi(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi(x_n)$  est le maximum des rangs de Morley des types qui la contiennent, il suit par récurrence que son rang est exactement  $n$ .  $\square$

**Corollaire 2.1.3.** Si  $\varphi$  est une formule fortement minimal, étant donnée une formule  $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$  telle que

$$\psi(x_1, \dots, x_n, y) \vdash \bigwedge_1^n \varphi(x_i),$$

alors l'ensemble  $\{b \mid \text{RM}(\psi(x_1, \dots, x_n, b)) = k\}$  est définissable pour tout  $k \leq n$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que l'ensemble  $\{b \mid \text{RM}(\psi(x_1, \dots, x_n, b)) \geq k\}$  est définissable. Si  $n = 1$ , ceci suit du fait que  $\exists^\infty x \psi(x, b)$  est une propriété élémentaire de  $b$ , par la remarque 1.3.27. Pour le cas général, il suit du théorème 2.1.2 que  $\text{RM}(\psi(x_1, \dots, x_n, b)) \geq k$  si et seulement si, soit il existe un  $a_1$  avec  $\text{RM}(\psi(a_1, x_2, \dots, x_n, b)) \geq k$ , soit il existe un  $a_1$  qui n'est pas algébrique sur  $b$  tel que  $\text{RM}(\psi(a_1, x_2, \dots, x_n, b)) \geq k - 1$ . Le premier cas suit par récurrence sur  $n$ . Le deuxième cas suit du fait que, si  $\theta(a_1, b)$  exprime que  $\text{RM}(\psi(a_1, x_2, \dots, x_n, b)) \geq k - 1$ , alors il suffit d'éliminer  $\exists^\infty x_1 \theta(x_1, b)$ .  $\square$

**Définition 2.1.4.** Une formule  $\psi$  est presque fortement minimale si et seulement s'il existe un ensemble fortement minimal  $\varphi$  à paramètres sur  $A$  tel que chaque élément de  $\psi$  est algébrique sur  $\varphi(\mathcal{C})A$ .

Notons que, par le lemme 1.2.18, le rang de Morley d'une formule presque fortement minimale est fini.

**Lemme 2.1.5.** *Soit  $\varphi$  une formule fortement minimale sur  $A$ . Si  $f \models \varphi$  n'est pas algébrique sur  $A \cup \{a\}$  avec  $\text{RM}(a/A)$  défini, alors  $\text{RM}(a/A) = \text{RM}(a/A, f)$ .*

*Démonstration.* En prenant une extension  $\omega$ -saturée des paramètres qui préserve le rang  $\text{RM}(a)$ , l'on peut supposer que l'ensemble de paramètres  $A$  de base nécessaires pour définir  $\varphi$  est fini et contenu dans un modèle  $\omega$ -saturé  $M$ . Soit  $\alpha = \text{RM}(a/M)$  et supposons que  $\text{RM}(a/Mf) < \alpha$ , témoigné par une formule  $\theta(a, f)$  à paramètres sur  $M$ . Puisque  $f \models \varphi(y) \wedge \theta(a, y)$  et  $f \notin \text{acl}(M, a)$ , cet ensemble doit être cofini. Comme  $M$  est  $\omega$ -saturé et  $\text{tp}(f/A)$  n'est pas algébrique, il existe une réalisation  $\tilde{f}$  dans  $M$  telle que  $\theta(a, \tilde{f})$ . Or, les éléments  $f$  et  $\tilde{f}$  ont le même type sur  $A$ , donc  $\text{RM}(\theta(x, \tilde{f})) < \alpha$ , ce qui contredit  $\text{RM}(a/M) = \alpha$ .  $\square$

À l'intérieur d'un ensemble presque fortement minimal, le rang de Morley est additif.

**Lemme 2.1.6.** *Soient  $a$  et  $b$  deux uples d'un ensemble presque fortement minimal  $\psi$  sur un ensemble  $C$  de paramètres. Alors*

$$\text{RM}(a, b/C) = \text{RM}(a/C) + \text{RM}(b/Ca).$$

*Démonstration.* On peut supposer que  $a$  et  $b$  sont algébriques sur  $\varphi(\mathcal{C})C$ , où  $\varphi$  est une formule fortement minimale à paramètres sur  $C$ . On note  $C$ , que l'on suppose vide. Or  $a$  est algébrique sur l'uple  $f$  dans  $\varphi$ , que l'on décompose comme  $f_1 f_2$ , où  $f_1$  est algébriquement indépendante de  $a$  et  $f_2$  est algébrique sur  $f_1 a$ . Par le lemme 1.3.30, nous pouvons supposer que  $f_1$  est algébriquement indépendante sur  $ab$ .

De même, l'élément  $b$  est algébrique sur  $g_1 g_2$ , où  $g_1$  est algébriquement indépendante sur  $f_1 a b$  et  $g_2$  est algébrique sur  $f_1 g_1 a b$ .

Notons que  $ab$  est interalgébrique avec  $f_2 g_2$  sur  $f_1 g_1$ . De plus, l'uple  $f_1 g_1$  est algébriquement indépendante sur  $ab$ , par construction. Donc, par les lemmes 2.1.5 et 1.2.18, nous avons que

$$\begin{aligned} \text{RM}(ab) &= \text{RM}(ab/f_1 g_1) = \text{RM}(f_2 g_2/f_1 g_1) = \text{RM}(f_2/f_1 g_1) + \text{RM}(g_2/f_1 f_2 g_1) \\ &= \text{RM}(a/f_1 g_1) + \text{RM}(b/f_1 g_1 a) = \text{RM}(a) + \text{RM}(b/a). \end{aligned}$$

$\square$

**Exemple 2.1.7.** Les théories  $T_\infty$ , Mod et  $\text{ACF}_p$  sont fortement minimales. De plus, le rang de Morley équivaut à

- $T_\infty \text{RM}(a/B) = |a \setminus B|$ .
- Mod  $\text{RM}(a/B) = \text{ldim}_B \langle aB \rangle$ , la dimension linéaire de l'espace vectoriel engendré par  $B$  sur  $\langle B \rangle$ .
- $\text{ACF}_p \text{RM}(a/B) = \text{tr}_B \langle a \rangle$ , le degré de transcendance du corps  $B(a)$  au-dessus du sous-corps  $B$ .

La géométrie de la théorie  $T_\infty$  est triviale et Mod est (localement) modulaire. La théorie  $\text{ACF}_p$  n'est pas localement modulaire : Soient  $a, b, c, d$  algébriquement indépendantes sur le corps premier  $F$  et on pose  $Y = F(a, b, c)$  et  $Z = F(a, d, cd + b)$ . Alors

$$\begin{aligned} 3 &= \text{RM}(Y) = \text{RM}(Z) \\ 1 &= \text{RM}(Y \cap Z) \\ 4 &= \text{RM}(YZ) \end{aligned}$$

Une question, nommée *la conjecture de Zilber ou de la trichotomie*, portait sur ces trois exemples archétypes : si une théorie fortement minimale non localement modulaire devait *recupérer* un corps infini de façon définissable (ou plutôt interprétable). Or, cette conjecture s'avère fautive, grâce aux contre-exemples de Hrushovski, qui ne définissent même pas des groupes infinis [4, 3, 12]. Néanmoins, dans le cas des *Structures de Zariski*, introduites par Hrushovski-Zilber [6], le principe de la trichotomie est valable, qui s'avère fondamentale pour la démonstration de Mordell-Lang fonctionnel en toute caractéristique par Hrushovski [5].

**Remarque 2.1.8.** Soit  $K$  un corps parfait. Rappelons que le domaine d'intégrité  $K[T_1, \dots, T_n]$  est un anneau noethérien : tout idéal est finiment engendré. En particulier, si  $I \subset K[T_1, \dots, T_n]$  est un idéal, on définit l'ensemble

$$Z(I) = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = 0 \forall P \in I\},$$

que l'on appelle le *fermé de Zariski* associé à  $I$ . De plus, tout ensemble  $S \subset K^n$  définit un idéal de  $K[T_1, \dots, T_n]$  :

$$I(S) = \{P \in K[T_1, \dots, T_n] \mid P(a_1, \dots, a_n) = 0 \forall (a_1, \dots, a_n) \in S\}.$$

Un fermé est dit  $K$ -irréductible (ou une *variété*) s'il n'est pas la réunion de deux sous-ensembles fermés propres. En particulier, nous avons une correspondance contrevariante entre la collection de fermés de Zariski

de  $K^n$  et les idéaux radicaux de  $K[T_1, \dots, T_n]$ . De plus, un fermé  $V$  est une variété si et seulement si  $I(V)$  est premier. La noéthérianité de  $K[T_1, \dots, T_n]$  équivaut à dire que tout fermé s'exprime comme la réunion finie des variétés, qui est unique (à permutation près) si l'on impose qu'aucune de variétés n'est contenue dans une autre. Les ensembles fermés de Zariski déterminent une topologie, qui cependant n'est pas Hausdorff : à l'intérieur d'une variété  $V$ , tous deux ouverts non-vides ont intersection non-vide.

Un ensemble de  $K^n$  est *constructible* s'il est une combinaison booléenne de fermés. L'élimination de quantificateurs pour  $\text{ACF}_p$  est équivalent au théorème de Chevalley, qui affirme que la projection d'un constructible l'est aussi. En particulier, la catégorie d'ensembles définissables d' $\text{ACF}_p$  correspond à celle d'ensembles constructibles.

## 2.2 Héritiers, cohéritiers et définissabilité

On considère par la suite une théorie complète dénombrable  $T$  avec des modèles infinis.

**Définition 2.2.1.** Soient  $A \subset B$  une extension de types  $p \in S(A)$  contenu dans  $q \in S(B)$ . Le type  $q$  est un *héritier* de  $p$  si toute formule  $\varphi(x, b) \in q$  est représentée dans  $p$ , c'est à dire, il existe  $a$  dans  $A$  tel que  $\varphi(x, a) \in p$ .

Le type  $q$  est un *cohéritier* de  $p$  si toute formule  $\varphi(x) \in q$  est satisfaite par un uple  $a$  de  $A$ .

**Exercice.** Soit  $\emptyset \neq A \subset B$  et  $p \in S(B)$  tel qu'il existe  $b \in B \setminus A$  avec  $b \models p$ . Alors  $p$  n'est ni héritier ni cohéritier de  $p|_A$ .

**Remarque 2.2.2.** Soient  $A$  un ensemble et deux uples  $b$  et  $c$ . Le type  $\text{tp}(b/Ac)$  est un héritier de  $\text{tp}(b/A)$  si et seulement si  $\text{tp}(c/Ab)$  est un cohéritier de  $\text{tp}(c/A)$ .

De plus, si  $q \in S(B)$  est un héritier de  $p \in S(A)$ , étant données des formules  $\varphi(x, y)$  et  $\theta(y)$  à paramètres dans  $A$  telles que  $\varphi(x, b) \in q$  et  $b \models \theta$ , alors il existe un  $a$  dans  $A$  tel que  $a \models \theta$  et  $\varphi(x, a) \in p$ .

**Lemme 2.2.3.** Si  $q \in S(B)$  est un héritier de  $p \in S(M)$ , où  $M$  est un modèle, alors, pour tout  $C \supset B$ , il existe une extension de  $q$  à  $C$  qui est un héritier sur  $p$ . De même si l'on remplace héritier par cohéritier.

*Démonstration.* Supposons que  $q$  est un héritier de  $p$ , et posons

$$r = q \cup \{\varphi(x, c) \mid \varphi(x, m) \in p \forall m \in M\}.$$

Si  $r$  est consistant, toute complétion de  $r$  est une extension de  $q$  et est un héritier de  $p$  par construction. Si  $r$  était inconsistant, il y aurait un nombre fini des formules  $\varphi_1(x, c_1), \dots, \varphi_k(x, c_k)$  inconsistantes avec un fragment fini  $\theta(x, b)$  de  $q$ . En particulier, la formule

$$\exists y_1 \dots \exists y_k \left( \theta(x, b) \wedge \bigvee_1^k \neg \varphi_i(x, y_i) \right)$$

appartient à  $q$ . Puisque  $q$  est un héritier de  $p$  et  $M$  est un modèle, on trouve des uples  $m, m_1, \dots, m_k$  tels que  $\theta(x, m) \in p$  et

$$\bigvee_1^k \neg \varphi_i(x, m_i) \in p,$$

ce qui contredit que  $\bigwedge_1^k \varphi_i(x, m_i) \in p$ , par définition.

Si  $q$  est un cohéritier de  $p$ , il suffit de montrer que toute collection  $r$  de formules à paramètres dans  $C$  contenant  $q$  finiment consistante dans  $M$  et maximale avec ces conditions est un type complet. Clairement  $r$  est consistant, par construction. Si ni  $\varphi(x, c)$  ni sa négation sont dans  $r$ , alors par maximalité, ni  $r \cup \{\varphi(x, c)\}$  ni  $r \cup \{\neg \varphi(x, c)\}$  sont finiment consistants dans  $M$ . Soit  $\theta \in r$  le témoin. Puisque

$$\mathfrak{C} \models \forall x \left( \theta(x) \vdash \varphi(x, c) \vee \neg \varphi(x, c) \right),$$

la formule  $\theta(x)$  ne peut pas être réalisée dans  $M$ , qui contredit que  $\theta$  est consistante.  $\square$

**Corollaire 2.2.4.** Si  $M$  est un modèle, la collection  $\text{Coher}_M$  de types globaux (à paramètres dans  $\mathfrak{C}$ ) qui sont des cohéritiers sur  $M$  est un fermé non-vide de  $S(\mathfrak{C})$ , qui est fixé point par point par  $\text{Aut}(\mathfrak{C}/M)$ . De plus, la cardinalité de  $\text{Coher}_M$  est bornée par  $2^{2^{|M|}}$ .

*Démonstration.* Puisque  $M$  est un modèle, tout type sur  $M$  est un cohéritier de lui-même et donc il admet une extension globale cohéritière. Soit  $\Sigma$  la classe de formules  $\varphi(x, c)$  à paramètres dans  $\mathfrak{C}$  telle que  $\models \varphi(m, c)$  pour tout  $m$  dans  $M$ . Un type global  $q$  est un cohéritier sur  $M$  si et seulement si  $q \in [\varphi]$  pour chaque  $\varphi \in \Sigma$ .

Soit  $q$  un cohéritier sur  $M$  et  $f$  un automorphisme de  $\mathfrak{C}$  qui fixe  $M$ . Si  $\varphi(x, c)$  est une formule à paramètres dans  $\mathfrak{C}$ , alors pour tout  $m$  dans  $M$ , on a que  $\varphi(m, c) \Leftrightarrow \varphi(m, f(c))$ , puisque  $c \equiv_M f(c)$ . Donc

$$q \in [\varphi(x, c) \Leftrightarrow \varphi(x, f(c))],$$

ce qui entraîne que  $\varphi(x, f(c)) \in q$  aussi.

Pour  $q \in S(\mathfrak{C})$ , on pose  $M(q) = \{\varphi(M, c) \mid \varphi(x, c) \in q\} \subset \mathcal{P}(M)$ . Clairement, l'ensemble  $M(q)$  est clos par des intersections finies. Si  $q \in \text{Coher}_M$ , alors  $\emptyset \notin M(q)$ . Pour montrer que  $|\text{Coher}_M| \leq 2^{2^{|M|}}$ , il suffit de voir que si  $p$  et  $q$  sont des cohéritiers sur  $M$  avec  $M(p) = M(q)$ , alors  $p = q$ . Si  $p \neq q$ , il existe  $\varphi(x, c) \in p$  avec  $\neg\varphi(x, c) \in q$ . Or, si  $M(p) = M(q)$ , alors  $\emptyset = \varphi(M, c) \cap \neg\varphi(M, c)$  serait dans  $M(p)$ , ce qui contredit la définition de cohéritier.  $\square$

**Remarque 2.2.5.** Si  $M$  est un modèle et les types  $\text{tp}(b/MC)$  et  $\text{tp}(a/MCb)$  sont des cohéritiers sur  $M$ , alors le type  $\text{tp}(ab/MC)$  l'est aussi.

**Définition 2.2.6.** Un type  $p \in S(B)$  est *définissable sur*  $A \subset B$  si, pour toute  $\mathcal{L}$ -formule  $\varphi(x, y)$ , il existe  $\psi(y)$  à paramètres dans  $A$  telle que, pour tout  $b$  dans  $B$ , on a

$$\varphi(x, b) \in p \Leftrightarrow b \models \psi(y).$$

Le type  $p$  est *définissable* s'il est définissable sur  $B$ . On posera  $d_p\varphi(y) = \psi(y)$  pour indiquer la dépendance du type et de la formule.

**Exemple 2.2.7.** Dans une théorie fortement minimale, tout type  $p$  est définissable. Pour le voir, prenons  $\varphi_0 \in p$  du rang et degré de Morley minimaux. Étant donnée une formule  $\varphi(x, y)$ , par le corollaire 2.1.3, soit  $\psi(y)$  la formule qui exprime  $\text{RM}(\neg\varphi(x, y) \wedge \varphi_0(x)) < \text{RM}(\varphi_0(x))$ . Notons que cette formule est définissable sur les mêmes paramètres de  $\varphi$  et  $\varphi_0$ , par lemme 1.1.10. Remarquons que, par le lemme 1.2.5 et le corollaire 1.2.11, on a que

$$\varphi(x, b) \in p \Leftrightarrow b \models \psi(y).$$

En particulier, si  $T$  est  $\text{ACF}_p$  et le type  $p$  est le (seul) type transcendant sur  $A$ , étant donnée une formule  $\varphi(x, y)$ , elle est une combinaison booléenne d'égalités polynomiales dans la variable  $x$  à coefficients dans  $F[y]$ , où  $F$  est le corps premier. On pose  $d_p\varphi(y) = \bigwedge a_i(y) = 0$ , avec  $a_i$  ces coefficients qui apparaissent dans la partie positive de  $\varphi(x, y)$  (ou  $d_p\varphi = y = y$  si cette partie est vide).

**Exercice.** Montrer que tout type unaire sur  $\mathcal{M} = (\omega, <)$  est définissable.

**Lemme 2.2.8.** *Un type définissable  $p \in S(M)$  admet, pour chaque  $B \supset M$ , une seule extension  $q \in S(B)$  définissable sur  $M$ . De plus, le type  $q$  est le seul héritier de  $p$ .*

*Démonstration.* Posons  $q = \{\varphi(x, b) \mid \models d_p\varphi(b)\}$ . Puisque

$$M \models \forall y_1 \dots \forall y_n \exists x \left( \bigwedge_1^n d_p\varphi_i(y_i) \Rightarrow \bigwedge_1^n \varphi_i(x, y_i) \right),$$

on a la consistance de  $q$ . De plus,

$$M \models \forall y \left( d_p\varphi(y) \Leftrightarrow \neg d_p(\neg\varphi)(y) \right),$$

ce qui entraîne que  $q$  est complet.

Le type  $q$  est bien un héritier de  $p$  : en effet, si  $\varphi(x, b) \in q$ , alors  $\mathfrak{C} \models \exists y d_p\varphi(y)$ , donc il existe  $m$  dans  $M$  avec  $\varphi(x, m) \in p$ . Clairement, le type  $q$  est définissable, par le même schéma de définition que  $p$ . De plus, comme

$$M \models \forall y \left( d_p\varphi(y) \Leftrightarrow d_q\varphi(y) \right),$$

nous avons l'unicité de l'extension définissable  $q$ . Si  $q'$  était une autre extension héritière de  $p$ , alors il existerait  $\varphi(x, b) \in q$  telle que  $\neg\varphi(x, b) \in q'$ . Alors  $(\neg\varphi(x, b) \wedge d_p\varphi(b)) \in q'$ , donc  $\neg\varphi(x, m) \in p$  pour un certain  $m$  avec  $d_p\varphi(m)$ . Ce contredit la définissabilité de  $p$ , puisque  $M \models \neg d_p\varphi(m)$ .  $\square$

Grâce au théorème de définissabilité de Beth, on peut montrer que la conclusion est bien nécessaire : si un type  $p$  sur un modèle n'admet qu'une seule extension héritière sur chaque ensemble  $A \supset M$ , alors  $p$  est forcément définissable. Un argument de chaîne nous permet donc de conclure le résultat suivant :

**Corollaire 2.2.9.** *Si  $p \in S(M)$  n'est pas définissable, alors pour tout  $\lambda \geq |M|$ , il existe  $M \preceq N$  de cardinalité bornée par  $\lambda$  tel que  $p$  possède au moins  $\lambda^+$  héritiers sur  $N$ .*

*En particulier, s'il existe un type non-définissable sur un modèle dénombrable, alors  $T$  n'est jamais  $\lambda$ -stable pour  $\lambda \geq \omega$ .*

**Corollaire 2.2.10.** *Étant donné un type  $p \in S(M)$  tel que, pour tout  $A \supset M$ , tout héritier de  $p$  sur  $A$  est un cohéritier, alors  $p$  est définissable.*

*Démonstration.* Puisque le nombre des cohéritiers est borné en fonction de  $|M|$ , par le corollaire 2.2.4, alors  $p$  doit être forcément définissable, par le corollaire 2.2.9.  $\square$

**Lemme 2.2.11.** *Si  $p$  est un type sur un modèle  $\omega$ -saturé  $M \models T$  avec  $\text{RM}(p) = \alpha \in \text{On}$ , et  $q \supset p$  est une extension sur  $B \supset M$  du même rang de Morley, alors  $q$  est un cohéritier de  $p$ .*

En fait, ceci est vrai pour toute théorie, indépendamment de la saturation du modèle.

*Démonstration.* Par  $\omega$ -saturation, soit  $\psi \in p$  de rang de Morley  $\alpha$  et degré 1. Prenons une formule  $\varphi(x, b)$  dans  $q$ . Notons que  $\varphi_1(x, b) = \varphi(x, b) \wedge \psi(x)$  a aussi rang  $\alpha$  et elle est contenue dans  $\psi$ . Il suffit de montrer que  $\varphi_1(M, b) \neq \emptyset$ .

Si  $\alpha = 0$ , alors  $\psi(M)$  est fini (en fait, l'ensemble  $\psi(M)$  consiste en un seul point), donc  $\varphi_1(M, b) \neq \emptyset$ . Si  $\alpha > 0$ , puisque  $\psi$  a degré de Morley 1, alors  $\text{RM}(\psi \wedge \neg\varphi_1) = \beta < \alpha = \text{RM}(\psi)$ . Soit  $\{\psi_i\}_{i < \omega}$  une famille de formules 2 à 2 disjointes à paramètres sur  $M$  du rang  $\beta$  et degré 1 contenues dans  $\psi$ . Si pour tout  $i < \omega$ , on a que  $\text{RM}(\psi_i \wedge \varphi_1) < \beta$ , alors  $\text{RM}(\psi_i \wedge \neg\varphi_1) = \beta$ , par le lemme 1.2.5, ce qui contredit que  $\text{RM}(\psi \wedge \neg\varphi_1) = \beta$ . Donc il existe une formule  $\psi_i$  telle que  $\text{RM}(\psi_i \wedge \varphi_1) = \beta$ . Par récurrence, l'ensemble  $(\psi_i \wedge \varphi_1)(M) \neq \emptyset$ , donc  $\varphi(M, b) \neq \emptyset$ .  $\square$

## 2.3 Stabilité et indépendance

Par la suite, on travaille toujours avec une théorie dénombrable complète  $T$  avec des modèles infinis.

**Définition 2.3.1.** Étant donnée une formule  $\varphi(x, y)$  sans paramètres, un  $\varphi$ -type (complet) sur  $B$  est une collection maximale consistante d'instances de la forme  $\varphi(x, b)$  ou  $\neg\varphi(x, b)$ , avec  $b$  dans  $B$ . On dénotera par  $S_\varphi(B)$  l'ensemble de  $\varphi$ -types sur  $B$ .

**Définition 2.3.2.** La théorie  $T$  est *stable* si elle est  $\lambda$ -stable pour un certain  $\lambda$ . De façon analogue, la formule  $\varphi$  sans paramètres est *stable* s'il existe  $\lambda \geq \omega$  tel que  $|S_\varphi(B)| \leq |B|$  pour tout ensemble  $B$  avec  $|B| \leq \lambda$ .

**Corollaire 2.3.3.** *La théorie  $T$  est stable si et seulement si, pour tout modèle  $M$ , tout type  $p$  sur  $M$  est définissable.*

*Démonstration.* S'il existe un type  $p$  sur un modèle  $M$  qui n'est pas définissable, puisque le langage est dénombrable, prenons une chaîne  $\{N_i\}_{i < \omega}$  des sous-structures élémentaires dénombrables de  $M$  telle que, pour tout  $i < \omega$  et toute formule  $\varphi(x, y)$  à paramètres sur  $N_i$  qui est représentée dans  $p$ , alors elle l'est dans  $p|N_{i+1}$ . Il suit que  $p$  est un héritier de  $p|N = \bigcup_{i < \omega} N_i$ . Si ce dernier était définissable, alors  $p$  le serait aussi, par le lemme 2.2.8. Donc nous pouvons supposer que  $M$  est dénombrable. Par le corollaire 2.2.9, nous avons que  $T$  n'est pas  $\lambda$ -stable pour aucun  $\lambda \geq \omega$ .

Si tout type sur un modèle est définissable, notons que le type  $p$  est déterminé par son schéma de définitions. Soit  $M$  un modèle de taille  $\lambda = \lambda^\omega$ . Alors, le nombre de tels schémas sur  $M$  est borné par  $\lambda^\omega = \lambda$ , et donc  $S(M) \leq \lambda$ . La théorie  $T$  est  $\lambda$ -stable.  $\square$

**Exercice.** Si  $M \subset N$  sont des modèles de la théorie stable  $T$ , et  $X \subset N$  est une partie définissable, alors  $X \cap M$  est un sous-ensemble définissable de  $M$  à paramètres dans  $M$ .

**Définition 2.3.4.** La formule  $\varphi(x, y)$  a la *propriété de l'ordre* (que l'on note par OP) s'il existe des uples  $\{a_i, b_i\}_{i < \omega}$  avec

$$\models \varphi(a_i, b_j) \Leftrightarrow i < j.$$

**Remarque 2.3.5.** En remplaçant  $\varphi(x, y)$  par  $\xi((x, x'), (y, y')) = \varphi(x, y')$ , si une formule dans  $T$  a la propriété de l'ordre, alors il existe une formule  $\xi$  et des uples  $\{a_i\}_{i < \omega}$  avec

$$\models \xi(a_i, a_j) \Leftrightarrow i < j.$$

Notons que si  $\varphi(x, y)$  a l'OP, alors  $\varphi(y, x)$  et  $\neg\varphi(x, y)$  l'ont aussi. De plus, si une formule dans  $T$  a la propriété de l'ordre, alors il en existe une le témoignant, où la longueur de la variable  $x$  est 1.

**Lemme 2.3.6.** *Pour tout  $\lambda \geq \omega$ , il existe un ordre total  $P$  de taille strictement supérieure à  $\lambda$  avec un sous-ensemble dense de taille bornée par  $\lambda$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mu$  le plus petit cardinal avec  $2^\mu > \lambda$ . On définit un ordre sur l'ensemble  ${}^\mu 2$  en posant :

$$s < t \Leftrightarrow \exists i < \mu \left( s \upharpoonright i = t \upharpoonright i \text{ et } s(i) < t(i) \right).$$

Cet ordre est linéaire. Soit  $X$  l'ensemble de suites qui deviennent la suite constante 1 à partir d'un moment et  $P = {}^\mu 2 \setminus X$ , avec l'ordre induit. Puisque  $|X| \leq \lambda$ , l'ensemble  $P$  a taille strictement supérieure à  $\lambda$ . L'ensemble de suites dans  $P$  qui deviennent la suite constante 0 à partir d'un moment est dense et de taille au plus  $\lambda$ .  $\square$

Nous avons tous les ingrédients pour montrer l'équivalence suivante :

**Théorème 2.3.7.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La théorie  $T$  est stable.*
2. *Toute formule consistante avec  $T$  est stable.*
3. *Aucune formule consistante avec  $T$  a la propriété de l'ordre.*
4. *Toute extension héréditaire d'un type sur un modèle est cohérente.*
5. *Tout type sur un modèle est définissable.*

*Démonstration.* Puisque tout  $\varphi$ -type se complète dans un type, on a (1)  $\Rightarrow$  (2). Pour l'implication (2)  $\Rightarrow$  (3), si  $\varphi$  avait la propriété de l'ordre, étant donné  $\lambda$ , soit  $P$  l'ordre linéaire comme dans le lemme 2.3.6, et notons par  $Q$  un sous-ensemble dense de  $P$  de taille bornée par  $\lambda$ . Par la remarque 2.3.5 et compacité, il existe des uples  $\{a_i\}_{i \in Q}$  avec

$$\models \varphi(a_i, a_j) \Leftrightarrow i < j.$$

Or, chaque  $r$  dans  $P \setminus Q$  détermine un  $\varphi$ -type partiel sur  $A = \{a_i\}_{i \in Q}$  en posant

$$\{\varphi(a_i, x)\}_{i < r} \cup \{\varphi(x, a_j)\}_{r < j}.$$

Ces types sont deux à deux inconsistants et donc la formule  $\varphi$  n'est pas stable.

Pour l'implication (3)  $\Rightarrow$  (4), soit  $M \models T$  et supposons que  $\text{tp}(b/Ma)$  est un héritier du type  $p$  dans  $S(M)$  qui n'est pas finiment satisfaisable sur  $M$ . Il existe donc une formule  $\varphi(x, y)$  à paramètres dans  $M$  telle que  $\models \varphi(a, b)$  mais  $\models \neg\varphi(a, b')$  pour chaque  $b' \in M$ .

Nous allons construire, par récurrence, une suite  $\{a_i, b_i\}_{i < \omega}$  dans  $M$ , avec  $\varphi(a_i, b)$  et

$$\models \varphi(a_i, b_j) \Leftrightarrow i \leq j,$$

ce qui montre que  $\varphi$ , plutôt  $\neg\varphi$ , a la propriété de l'ordre. Comme  $\models \varphi(a, b)$  et  $\text{tp}(b/Ma)$  est un héritier de  $p$ , il existe  $a_0 \in M$  avec  $\varphi(a_0, b)$ . Or,

$$\mathfrak{C} \models \exists y \varphi(a_0, y),$$

donc il existe  $b_0$  dans  $M$  avec  $\varphi(a_0, b_0)$ . Si  $a_0, b_0, \dots, a_n, b_n$  ont été déjà construits, notons que l'on a

$$\varphi(a, b) \wedge \bigwedge_{i \leq n} \varphi(a_i, b) \wedge \bigwedge_{i \leq n} \neg\varphi(a, b_i).$$

Puisque  $\text{tp}(b/Ma) \supset p$  est un héritier sur  $M$ , il existe  $a_{n+1} \in M$  avec

$$\varphi(a_{n+1}, b) \wedge \bigwedge_{i \leq n} \varphi(a_i, b) \wedge \bigwedge_{i \leq n} \neg \varphi(a_{n+1}, b_i),$$

donc

$$\mathfrak{C} \models \exists y \left( \varphi(a_{n+1}, y) \wedge \bigwedge_{i \leq n} \varphi(a_i, y) \wedge \bigwedge_{i \leq n} \neg \varphi(a_{n+1}, b_i) \right).$$

Comme  $M$  est un modèle, il existe  $b_{n+1} \in M$  la satisfaisant.

Le corollaire 2.2.10 entraîne (4)  $\Rightarrow$  (5). De même, le corollaire 2.3.3 donne (5)  $\Rightarrow$  (1).  $\square$

De la même façon qu'auparavant, on peut montrer que :

**Corollaire 2.3.8.** *La formule  $\varphi$  est stable si et seulement si tout  $\varphi$ -type sur un ensemble quelconque de paramètres est définissable.*

**Corollaire 2.3.9.** *Si  $T$  est stable et  $X$  est un ensemble définissable, tout sous-ensemble définissable de  $X$  l'est grâce aux paramètres de  $X$ .*

*Démonstration.* Soit  $\psi(x, a)$  un sous-ensemble définissable de  $X$ . Le  $\psi$ -type  $p$  de  $a$  sur  $X$  est définissable par la formule  $\xi(x)$  à paramètres dans  $X$ , par le corollaire 2.3.8.

Notons que  $b \in X$  satisfait  $\psi(x, a)$  si et seulement si  $\models \xi(b)$ , ce qui donne le résultat.  $\square$

**Définition 2.3.10.** Une formule  $\varphi(x, y)$  a la *propriété de l'indépendance* s'il existe des uples  $\{a_i\}_{i < \omega}$  tels que, pour chaque sous-ensemble  $I \subset \omega$ , le type partiel

$$\{\varphi(x, a_i)\}_{i \in I} \cup \{\neg \varphi(x, a_j)\}_{j \notin I}$$

est consistant.

La formule  $\varphi(x, y)$  a la *propriété de l'ordre strict* s'il existe des uples  $\{a_i\}_{i < \omega}$  qui définissent une chaîne strictement croissante :

$$\varphi(x, a_1) \subsetneq \varphi(x, a_2) \subsetneq \dots \subsetneq \varphi(x, a_n) \subsetneq \dots$$

La théorie  $T$  est NIP si aucune formule consistante avec  $T$  a la propriété de l'indépendance. La théorie  $T$  est NSOP si aucune formule consistante avec  $T$  a la propriété de l'ordre strict.

**Remarque 2.3.11** (Shelah). La formule  $\varphi$  est stable si elle n'a ni la propriété de l'indépendance ni, pour un certain  $s \in \omega^2$ , la formule

$$\xi_s(x, y_0, \dots, y_{n-1}) = \bigwedge_{i < n} \varphi(x, y_i)^{s(i)}$$

a la propriété de l'ordre strict, où  $\varphi(x, y)^0 = \varphi(x, y)$  et  $\varphi(x, y)^1 = \neg \varphi(x, y)$ .

De plus, si une formule dans  $T$  a la propriété de l'indépendance ou de l'ordre strict, alors il en existe une le témoignant, où la longueur de la variable  $x$  est 1.

**Exemple 2.3.12.** La théorie du corps réel est NIP mais a la SOP.

Le graph aléatoire est la limite de Fraïssé de la classe de tous les graphes finis. La théorie du graphe aléatoire est NSOP mais a la propriété de l'indépendance.

**Définition 2.3.13.** Étant donné un ordre linéaire  $I$ , la suite  $\{a_i\}_{i \in I}$  est *indiscernable* sur l'ensemble  $B$  (ou  $B$ -indiscernable) si, pour tous uples ordonnés  $i_1 < \dots < i_n$  et  $j_1 < \dots < j_n$ , on a

$$a_{i_1} \dots a_{i_n} \equiv_B a_{j_1} \dots a_{j_n}.$$

Si  $J$  est un ensemble, on dit que la collection  $\{a_j\}_{j \in J}$  est un *ensemble indiscernable* sur  $B$  si, pour tous uples  $i_1, \dots, i_n$  et  $j_1, \dots, j_n$ , avec  $i_k \neq i_r$  et  $j_k \neq j_r$ , alors

$$a_{i_1} \dots a_{i_n} \equiv_B a_{j_1} \dots a_{j_n}.$$

**Exemple 2.3.14.** Si  $\mathbb{Q} \models \text{DLO}$ , alors  $\mathbb{Q}$  est une suite indiscernable mais pas un ensemble indiscernable.

**Remarque 2.3.15.** Si  $p \in S(N)$  est un cohéritier de  $q = p \upharpoonright M$  et la suite  $\{a_i\}_{i < \omega} \subset N$  est telle que  $a_i$  réalise  $p \upharpoonright M \cup \{a_j\}_{j < i}$ , alors elle est  $M$ -indiscernable.

Le résultat reste vrai si l'on suppose uniquement que  $p$  est invariant sur l'ensemble  $A$ , sans supposer qu'il doit être un modèle.

**Définition 2.3.16.** Si  $I$  est un ordre linéaire qui indexe la suite  $\{a_i\}_{i \in I}$ , le type d'*Ehrenfeucht-Mostowski*  $\text{EM}(\{a_i\}_{i \in I}/B)$  est l'ensemble des formules  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , pour  $n < \omega$ , à paramètres sur  $B$  telles que  $\models \varphi(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$  pour chaque  $i_1 < \dots < i_n$ .

**Remarque 2.3.17.** Si la suite  $\{a_i\}_{i \in I}$  est  $B$ -indiscernable, alors le type  $\text{EM}(\{a_i\}_{i \in I}/B)$  est complet.

Un argument de combinatoire en utilisant le théorème d'Erdős-Rado permet de montrer le lemme suivant.

**Lemme 2.3.18.** *Pour tout ensemble  $A$ , il existe  $\lambda$  tel que, pour tout ordre linéaire  $I$  de taille  $\lambda$  et toute suite  $\{a_i\}_{i \in I}$ , il existe (dans le monstre) une suite  $\{b_j\}_{j < \omega}$  indiscernable sur  $A$  telle que, pour chaque  $j_1 < \dots < j_n$ , il existe  $i_1 < \dots < i_n$  avec*

$$b_{j_1}, \dots, b_{j_n} \equiv_A a_{i_1}, \dots, a_{i_n}.$$

*En particulier, la suite  $\{b_j\}_{j < \omega}$  réalise  $\text{EM}(\{a_i\}_{i \in I}/A)$ .*

**Définition 2.3.19.** Une famille  $\{\varphi_i(x)\}_{i \in I}$  est  $k$ -inconsistante si tout sous-ensemble  $\{\varphi_{i_j}(x)\}_{\substack{i_j \in I \\ 1 \leq j \leq k}}$  de taille  $k$  est inconsistant.

Une formule  $\varphi(x, b)$  *divise sur l'ensemble  $A$  (par rapport à  $k$ )* s'il existe une suite  $\{b_i\}_{i < \omega}$  de réalisations de  $\text{tp}(b/A)$  tel que  $\{\varphi(x, b_i)\}_{i < \omega}$  est  $k$ -inconsistant.

Un type (partiel)  $\Sigma$  à paramètres sur  $B$  *divise sur  $A$*  s'il entraîne une formule qui divise sur  $A$ .

Un type (partiel)  $\Sigma$  à paramètres sur  $B$  *dévie sur  $A$*  s'il entraîne une disjonction des formules (éventuellement avec plus des paramètres), chacune divisant sur  $A$ .

Par le lemme 2.3.18, nous pouvons supposer que la suite témoignant la division est indiscernable :

**Corollaire 2.3.20.** *Le type (partiel)  $\Sigma(x, b)$  divise sur  $A$  si et seulement s'il existe une suite  $A$ -indiscernable  $\{b_i\}_{i < \omega}$ , telle que  $b_0 \equiv_A b$  et  $\bigcup_{i < \omega} \Sigma(x, b_i)$  est inconsistant.*

**Remarque 2.3.21.** Si  $\Sigma$  est un type partiel consistant et à paramètres dans  $\text{acl}(A)$ , il ne divise pas sur  $A$ . De même, si le type  $\text{tp}(a/Aa)$  ne dévie pas sur  $A$ , alors  $a$  est algébrique sur  $A$ .

Un type global  $A$ -invariant ne dévie pas sur  $A$ .

Dans DLO, la formule  $b_1 < x < b_2$  divise sur  $\emptyset$ , mais la formule  $b < x$  ne divise pas sur  $\emptyset$ .

On considère  $\mathbb{Q}$  muni d'une relation ternaire cyc, que l'on interprète de la façon suivante :

$$\mathbb{Q} \models \text{cyc}(a, b, c) \Leftrightarrow \begin{cases} a < b < c \\ \text{ou} \\ b < c < a \\ \text{ou} \\ c < b < a \end{cases} .$$

Dans cette théorie, la formule  $x = x$  dévie sur  $\emptyset$ , mais elle ne divise pas sur  $\emptyset$ .

L'ensemble  $\text{NF}(B/A)$  de types sur  $B$  qui ne dévie pas sur  $A$  est un ensemble fermé de  $S(B)$  et donc forment un sous-espace compact aussi.

**Corollaire 2.3.22.** *Si  $p \in S(B)$  dévie sur  $A$ , il existe une formule  $\varphi \in p$  telle que tout type dans  $[\varphi]$  dévie sur  $A$ .*

**Corollaire 2.3.23.** *Si le rang de Morley de la formule  $\varphi$  sur  $A$  est défini et la formule  $\psi \vdash \varphi$  dévie sur  $A$ , alors  $\text{RM}(\psi) < \text{RM}(\varphi)$ . En particulier, si le rang de Morley de  $p \in S(A)$  est défini et  $p \subset q$  dévie sur  $A$ , alors  $\text{RM}(q) < \text{RM}(p)$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 1.2.5, il suffit de le montrer lorsque la formule  $\psi$  divise sur  $A$ , qui suit de la remarque 1.2.2.  $\square$

**Corollaire 2.3.24.** *Un type (partiel)  $p$  finiment satisfaisable sur  $A$  ne dévie pas sur  $A$ .*

**Corollaire 2.3.25.** *Si  $\Sigma$  est un type partiel sur  $B$  qui ne dévie pas sur  $A$ , alors il existe un type complet  $p \supset \Sigma$  sur  $B$  ne déviant pas sur  $A$ .*

*Démonstration.* Prenons  $p \supset \Sigma$  un ensemble maximal de formules à paramètres dans  $B$  qui ne dévient pas sur  $A$ . En particulier, le type  $p$  est consistant. Or, étant donné  $\varphi$  une formule sur  $B$  telle que ni elle ni sa négation sont dans  $p$ , alors les types  $p \cup \varphi$  et  $p \cup \neg\varphi$  doivent dévier sur  $A$  et, par le corollaire 2.3.22, il existe  $\theta \in p$  telle que  $\theta \wedge \varphi$  et  $\theta \wedge \neg\varphi$  dévient sur  $A$ . Puisque

$$\theta \vdash \left( (\theta \wedge \varphi) \vee (\theta \wedge \neg\varphi) \right),$$

la formule  $\theta$  dévie sur  $A$ , ce qui donne une contradiction. □

**Définition 2.3.26.** Étant donnés des sous-ensembles  $A, B$  et  $C$ , l'ensemble  $A$  est *indépendant de  $B$  sur  $C$* , que l'on note

$$A \downarrow_C B,$$

si, pour chaque uple fini  $a \in A$ , le type  $\text{tp}(a/BC)$  ne dévie pas sur  $C$ . Si  $C = \emptyset$ , on utilisera la notation  $A \downarrow B$ .

Notons que cette définition ne dépend pas de l'énumération de l'uple  $a$ .

**Remarque 2.3.27** (Théorème de Kim-Pillay). Si  $T$  est stable, la notion d'indépendance ci-dessus satisfait les propriétés suivantes :

**Invariance** Si  $ABC \equiv A'B'C'$ , alors  $A \downarrow_C B$  si et seulement si  $A' \downarrow_{C'} B'$ .

**Symétrie** Si  $A \downarrow_C B$ , alors  $B \downarrow_C A$ .

**Monotonie et Transitivité**  $A \downarrow_C BD$  si et seulement si  $A \downarrow_C B$  et  $A \downarrow_{CB} D$ .

**Caractère fini**  $A \downarrow_C B$  si et seulement si  $a \downarrow_C b$  pour chaque sous-uples finis  $a \in A$  et  $b \in B$ .

**Caractère local** Il existe  $\kappa_0$  (au fait  $\kappa_0 \leq |T|$ ) tel que pour toute uple fini  $a$  et tout ensemble  $B$ , il existe  $C \subset B$  de taille bornée par  $\kappa$  avec  $a \downarrow_C B$ .

**Extension** Pour tous  $A, C$  et  $B$ , il existe  $A' \equiv_C A$  avec  $A' \downarrow_C B$ .

**Stationnarité** Si  $M$  est un model, et  $A \downarrow_M B, A' \downarrow_M B$  et  $A \equiv_M A'$ , alors  $A \equiv_{MB} A'$ .

De plus, si la théorie  $T$  admet une relation ternaire  $\downarrow^0$  satisfaisant les conditions ci-dessus, alors elle correspond à la non-déviante, la théorie  $T$  est stable et

$$A \downarrow_C B \text{ si et seulement si } \forall a \in A, \text{ le type } \text{tp}(a/BC) \text{ ne dévie pas sur } C.$$

**Corollaire 2.3.28.** *Si  $T$  est stable, alors  $A \downarrow_C C$ .*

**Exercice.** Si  $A \downarrow_C B$  et  $AB \downarrow_C D$ , alors  $A \downarrow_{CD} B$ .

**Remarque 2.3.29.** Si  $C \subset B$  et  $A \downarrow_C B$ , alors  $A \downarrow_C \text{acl}(B)$ . De plus, si  $D \subset B$ , alors  $A \downarrow_C D$ .

**Définition 2.3.30.** Si  $I$  est un ordre linéaire, la suite  $\{a_i\}_{i \in I}$  est *indépendante* sur  $A$ , ou  *$A$ -indépendante*, si

$$a_i \downarrow_A \{a_j\}_{j < i}.$$

La suite  $\{a_i\}_{i \in I}$  est une suite de Morley (du type  $\text{tp}(a_i/A)$ ) si elle est  $A$ -indiscernable et  $A$ -indépendante.

Notons que, par la remarque 2.3.21, si le type  $p$  n'est pas algébrique, alors toute suite de Morley de  $p$  consiste d'uples distincts.

Par les remarques 2.3.15 et 2.3.21, on conclut que :

**Remarque 2.3.31.** Soit  $p$  un type global  $A$ -invariant. Toute suite  $\{a_i\}_{i<\lambda}$ , où  $a_i \models p \upharpoonright A\{a_j\}_{j<i}$ , est une suite de Morley.

**Lemme 2.3.32.** Si  $T$  est stable, tout type  $p \in S(A)$  non-algébrique admet une suite de Morley infinie.

*Démonstration.* Soit  $a_0 \models p$ . Par Extension, il existe  $a_1 \models p$  avec  $a_1 \downarrow_A a_0$ . On itère pour construire une suite  $\{a_i\}_{i<\lambda}$  indépendante sur  $A$ . Le lemme 2.3.18 entraîne qu'il existe une suite  $A$ -indiscernable de longueur  $\omega$  avec la même propriété. L'indépendance de la suite entraîne que les uples sont distincts, car sinon  $p$  serait algébrique.  $\square$

**Lemme 2.3.33.** Si  $T$  est stable et  $p \in S(A)$  ne dévie pas sur  $M$ , alors  $p$  est définissable sur  $M$ .

Notons que la réciproque suit du fait que les types  $M$ -définissables sont  $M$ -invariants (ceci n'utilise pas que  $M$  soit un modèle).

*Démonstration.* Par le lemme 2.2.8, il suffit de montrer que  $p$  est un héritier sur  $M$ . Soit donc  $\varphi(x, a) \in p = p(x, a)$  et prenons une suite de Morley  $\{a_i\}_{i<\omega}$  d'une extension globale cohéritier sur  $M$  du type  $\text{tp}(a/M)$ , par la remarque 2.3.31.

Puisque  $p$  ne dévie pas sur  $M$ , on a

$$\bigcup_{i<\omega} p(x, a_i)$$

est consistant. Soit  $b$  le réalisant; en particulier  $\models \varphi(b, a_i)$  pour chaque  $i < \omega$ . Posons  $q$  le  $\varphi$ -type complet de  $b$  sur  $M\{a_i\}_{i<\omega}$ . Le corollaire 2.3.8 entraîne que  $q$  est définissable par une formule  $d_q\varphi(y)$  à paramètres sur  $Ma_0, \dots, a_n$ . Puisque  $b \models \varphi(x, a_{n+1})$ , on a que  $\models d_q\varphi(a_{n+1})$ . Comme le type  $\text{tp}(a_{n+1}/Ma_0, \dots, a_n)$  est cohéritier sur  $M$ , alors  $\models d_q\varphi(a')$  pour un certain  $a' \in M$ . On conclut que  $\varphi(x, a') \in q \upharpoonright M \subset p \upharpoonright M$ .  $\square$

**Corollaire 2.3.34.** Soit  $T$  stable et  $p$  un type sur un modèle. Étant donné un ensemble  $A \supset M$ , il existe une et une seule extension  $q \in S(A)$  de  $p$  qui vérifie toutes les propriétés suivantes :

1.  $q$  ne dévie pas sur  $M$ .
2.  $q$  est définissable sur  $M$ .
3.  $q$  est un héritier sur  $M$ .
4.  $q$  est un cohéritier sur  $M$ .

**Définition 2.3.35.** Un type  $p$  sur  $A$  est *stationnaire* s'il n'admet qu'une seule extension non-déviante à tout ensemble contenant  $A$ .

Notons que, si  $T$  est stable et le rang de Morley de  $p$  est défini, alors cette définition équivaut la définition 1.2.16, puisque  $p$  admet toujours une extension sur  $A$  du même rang, par le corollaire 1.2.15, qui doit donc être la seule extension non-déviante, par le lemme 2.2.11.

On peut donc montrer le cas général du corollaire 1.2.17.

**Corollaire 2.3.36.** Si  $T$  est stable, tout type sur un modèle est stationnaire.

**Corollaire 2.3.37.** Si  $T$  est stable, le type d'une suite de Morley du type stationnaire  $p \in S(A)$  est unique.

*Démonstration.* Supposons que les suites  $\{a_i\}_{i<\omega}$  et  $\{b_i\}_{i<\omega}$  sont des suites de Morley du type  $p$ . Montrons par récurrence que

$$a_1, \dots, a_n \equiv_A b_1, \dots, b_n.$$

Pour  $n = 1$ , c'est évident. Si  $n > 1$ , il existe par hypothèse un  $A$ -automorphisme  $\sigma$  qui envoie l'uple  $(a_1, \dots, a_{n-1})$  sur  $(b_1, \dots, b_{n-1})$ . Or, les éléments  $\sigma(a_n)$  et  $b_n$  sont tous les deux des réalisations de  $p$  indépendantes de  $b_1, \dots, b_{n-1}$ . Par stationnarité, on conclut que

$$a_n \equiv_{b_1, \dots, b_{n-1}} b_n,$$

ce qui donne le résultat.  $\square$

Une des points fondamentales dans la démonstration du théorème de Kim-Pillay est que toute suite de Morley témoigne la déviation (cf. corollaire 2.3.20).

**Remarque 2.3.38.** Si  $T$  est stable, étant donné un type partiel  $\Sigma(x, b)$  sur  $A$  tel que

$$\bigcup_{i < \omega} \Sigma(x, b)$$

est consistant pour une (toute) suite de Morley  $\{b_i\}_{i < \omega}$  du type stationnaire  $\text{tp}(b/A)$ , alors  $\Sigma(x, b)$  ne dévie pas sur  $A$ .

## 2.4 Imaginaires et bases canoniques

Le passage au quotient s'avère très utile et naturel en mathématiques. Nous allons, dans cette première partie, introduire la façon modèle-théorique pour traiter les quotients d'un point de vue du premier ordre.

**Définition 2.4.1.** L'uple  $d$  est un *paramètre canonique* pour la classe définissable  $X = \varphi(\mathfrak{C})$  si, pour tout  $f \in \text{Aut}(\mathfrak{C})$ , on a que  $f(X) = X$  (en tant qu'ensemble) si et seulement si  $f$  fixe l'uple  $d$ .

Par le lemme 1.1.10, la classe  $X$  est définissable par une formule à paramètres dans  $d$ . De plus, l'uple  $d$  est unique à interdéfinissabilité près. On notera donc  $d = \ulcorner X \urcorner = \ulcorner \varphi \urcorner$ .

**Notation.** Un ensemble est *0-définissable* s'il est définissable sur  $\emptyset$ .

**Définition 2.4.2.** La théorie  $T$  *élimine les imaginaires* si, pour toute relation d'équivalence 0-définissable  $E$ , chaque classe  $a/E$  a un paramètre canonique.

**Lemme 2.4.3.** Pour la théorie complète  $T$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La théorie  $T$  a élimination des imaginaires et  $|\text{dcl}(\emptyset)| \geq 2$ .
2. Toute relation d'équivalence 0-définissable  $E$  est la fibre d'une fonction 0-définissable  $f : \mathfrak{C}^n \rightarrow \mathfrak{C}^m$ , c'est à dire, pour tous deux uples  $a$  et  $b$  dans  $\mathfrak{C}^n$ , on a  $E(a, b)$  si et seulement si  $f(a) = f(b)$ .

*Démonstration.* Pour l'implication (1)  $\Rightarrow$  (2), on a que chaque classe  $a/E$  est interdéfinissable avec un uple de  $\mathfrak{C}^m$  pour un certain  $m$  (indépendamment de la classe, par compacité). On peut donc trouver d'ensembles 0-définissables  $D_1, \dots, D_n$  (que l'on suppose disjoints) et des fonctions  $f_i$  à domaine  $D_i$  telles que leurs images recouvrent la réunion de classes. Grâce à deux éléments distincts quelconques dans  $\text{dcl}(\emptyset)$ , on obtient une seule fonction définissable  $f$  qui donne une injection de  $\mathfrak{C}^n/E$  vers  $\mathfrak{C}^m$ .

Pour (2)  $\Rightarrow$  (1), étant donné une relation d'équivalence 0-définissable  $E$ , soit  $f$  sa fibration. La classe  $a/E$  est interdéfinissable avec  $f(a)$ , qui est donc son paramètre canonique. La relation

$$(x_1, x_2)E(y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2)$$

a deux classes d'équivalence, chacune 0-définissable. Les images de ces classes par une fonction qui a  $E$  comme fibre donnent au moins deux éléments dans  $\text{dcl}(\emptyset)$ .  $\square$

**Lemme 2.4.4.** Si  $T$  a élimination des imaginaires, alors toute classe définissable a un paramètre canonique. De plus, tout type global  $p$  qui est définissable admet un ensemble  $B$  tel que  $p$  est fixé si et seulement si  $B$  l'est (point par point).

Un tel ensemble  $B$  est une *base canonique* pour le type  $p$ . Cet ensemble est unique, à interdéfinissabilité près, et on le notera par  $\text{Cb}(p)$ . Par la remarque 2.3.21, le type  $p$  ne dévie pas sur  $\text{Cb}(p)$ .

*Démonstration.* Si  $X = \varphi(x, a)$ , posons  $E$  la relation d'équivalence

$$yEz \Leftrightarrow \forall x \left( \varphi(x, y) \Leftrightarrow \varphi(x, z) \right).$$

Le paramètre canonique de la classe  $a/E$  est un paramètre canonique pour  $X$ .

Si  $p$  est définissable, l'ensemble  $B = \{ \ulcorner d_p \varphi \urcorner \}_{\varphi \mathcal{L}\text{-formule}}$  est fixé par l'automorphisme  $\sigma$  si et seulement si  $p$  l'est.  $\square$

**Lemme 2.4.5.** Si une théorie  $T$  élimine les imaginaires, alors étant donné un ensemble  $A$  et un ensemble définissable  $X$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. L'ensemble  $X$  est définissable sur  $\text{acl}(A)$ .
2. L'ensemble  $X$  a un nombre fini des conjugués sur  $A$ .
3. L'ensemble  $X$  est une réunion finie des classes d'équivalence  $A$ -définissables, chacune avec un nombre fini des classes.

*Démonstration.* Notons que le nombre de conjugués de  $X$  sur  $A$  correspond à l'orbite de son paramètre canonique sur  $A$ .

Si  $X$  est une réunion finie des classes d'équivalence  $A$ -définissables, chacune avec un nombre fini des classes, alors clairement il a un nombre fini des conjugués sur  $A$ . Supposons maintenant que  $X = X_1, \dots, X_n$  sont les différents conjugués de  $X$  sur  $A$ . Posons

$$xEy \iff (x \in X_i \iff y \in X_i) \forall i \leq n.$$

La relation d'équivalence  $E$  est  $A$ -définissable, par le lemme 1.1.10. Elle a un nombre fini des classes possibles. De plus, l'ensemble  $X$  est une réunion de  $E$ -classes, donc il est une réunion finie.  $\square$

D'après le lemme 2.4.3, nous allons donc maintenant considérer une expansion de  $T$ , notée  $T^{\text{eq}}$ , telle que toute relation d'équivalence 0-définissable de  $T$  est la fibre d'une fonction définissable dans  $T^{\text{eq}}$ . Pour cela, on considère l'expansion  $\mathcal{L}^{\text{eq}}$  de  $\mathcal{L}$  avec plusieurs sortes  $S_i$ , où  $\{E_i\}_{i \in I}$  est une énumération de toutes les relations d'équivalence 0-définissables, à  $T$ -équivalence près. De plus, la sorte  $S_0$  est l'univers, qui sera nommée la sorte *réelle*. Un élément d'une sorte  $S_i \neq S_0$  est un *imaginaire*. Toute structure  $\mathcal{A}$  s'étend dans une  $\mathcal{L}^{\text{eq}}$ -structure en posant  $S_i = A_i^{n_i}/E_i$ , munie des projections  $\pi_i : A^{n_i} \rightarrow A_i^{n_i}/E_i$ .

La théorie  $T^{\text{eq}}$  s'axiomatise par  $T$  et les axiomes :

$$\forall y \exists x \text{ avec } \pi_i(x) = y \text{ si } y \text{ est dans la sorte } S_i,$$

et

$$\forall x \forall y (xEy \iff \pi_i(x) = \pi_i(y)).$$

C'est facile à voir qu'il n'y a pas des nouvelles relations 0-définissables sur la sorte réelle.

**Définition 2.4.6.** Un ensemble  $X$  est dit *interprétable* s'il est définissable dans  $T^{\text{eq}}$ . Si  $X$  est interprétable en utilisant seulement la sorte réelle, on utilisera le terme *définissable*.

Puisque le monstre  $\mathfrak{C}^{\text{eq}}$  est un modèle monstre de  $T^{\text{eq}}$ , on peut montrer le résultat suivant :

**Proposition 2.4.7.** *La théorie  $T^{\text{eq}}$  a élimination des imaginaires. De plus, la théorie  $T$  élimine les imaginaires si et seulement si chaque imaginaire est interdéfinissable avec un uple réel.*

**Notation.** On notera par  $\text{dcl}^{\text{eq}}$  et  $\text{acl}^{\text{eq}}$  les clôtures définissables et algébriques dans la théorie  $T^{\text{eq}}$ .

**Corollaire 2.4.8.** *La théorie  $T$  est  $\kappa$ -catégorique si et seulement si  $T^{\text{eq}}$  l'est.*

*La théorie  $T$  est  $\kappa$ -stable si et seulement si  $T^{\text{eq}}$  l'est.*

**Exemple 2.4.9.** La théorie  $T_\infty$  n'a pas d'élimination des imaginaires. Pour cela, il suffit de voir que l'ensemble  $\alpha = \{a_1, a_2\}$ , qui est la classe de l'uple  $(a_1, a_2)$  modulo la relation d'équivalence

$$(x_1, x_2)E(y_1, y_2) \iff ((x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2) \vee (x_1 = y_2 \wedge x_2 = y_1)),$$

n'est pas interdéfinissable avec un uple réel. Un imaginaire qui encode un ensemble fini s'appelle un *imaginaire finitaire*.

Notons que  $\alpha$  est définissable sur  $a_1, a_2$ , qui est lui algébrique sur  $\alpha$ .

**Définition 2.4.10.** La théorie  $T$  a *élimination faible des imaginaires* si tout imaginaire  $\alpha$  est définissable sur un uple réel  $a$ , qui est lui algébrique sur  $\alpha$ .

**Corollaire 2.4.11.** *Une théorie  $T$  a élimination des imaginaires si et seulement si elle a élimination faible des imaginaires et élimine tout imaginaire finitaire.*

**Remarque 2.4.12.** Tout corps infini a élimination des imaginaires finitaires.

*Démonstration.* Étant donné l'ensemble fini  $\{a_1, \dots, a_n\}$  des points du corps  $K$ , on définit les *fonctions symétriques*  $s_0, \dots, s_{n-1}$  :

$$s_i = (-1)^{i+1} \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ |J|=i+1}} \prod_{j \in J} a_j.$$

Notons que  $\prod_1^n (T - a_i) = T^n + \sum_0^{n-1} s_i T^i$ .

L'ensemble  $\{a_1, \dots, a_n\}$  est interdéfinissable avec l'uplet  $(s_0, \dots, s_{n-1})$ . Pour éliminer des ensembles finis des  $n$ -uplets  $\{c_{ij}\}_{\substack{i < k \\ j < n}}$ , il suffit de considérer les coefficients du polynôme

$$p(T, T_0, \dots, T_{n-1}) = \prod_{i < k} T - \sum_{j < n} c_{ij} T_j.$$

□

**Théorème 2.4.13** (Lascar-Pillay). *Toute théorie fortement minimale avec  $\text{acl}(\emptyset)$  infini a élimination faible des imaginaires.*

*Démonstration.* Soit  $\alpha = a/E$  un imaginaire. Il suffit de trouver un représentant de la classe qui est algébrique sur  $\alpha$ , ou de façon équivalente, que tout ensemble définissable non-vide  $X$  contient un élément  $x$  algébrique sur  $\ulcorner X \urcorner$ . Si  $X \subset M$  est fini, il n'y a rien à faire. Si  $X$  est infini, il est cofini et donc il contient un élément  $x$  dans  $\text{acl}(\emptyset)$ , qui est infinie.

Si  $X \subset M^{n+1} = M \times M^n$ , on considère la projection  $Y$  de  $X$  sur  $M$ . Par le cas précédent, il existe  $y \in Y$  algébrique sur  $\ulcorner Y \urcorner$ . Par récurrence, la fibre  $X_y = \{z \in M^n \mid (y, z) \in X\}$  contient un élément  $z$  algébrique sur  $\ulcorner X_y \urcorner$ . En particulier, l'élément  $x = (y, z)$  de  $X$  est algébrique sur  $\ulcorner X \urcorner$ .

□

**Corollaire 2.4.14.** *Pour chaque  $p$  premier ou 0, la théorie  $ACF_p$  a élimination des imaginaires.*

**Définition 2.4.15.** Le *type fort* de  $a$  sur  $A$ , noté  $\text{stp}(a/A)$ , comme

$$\text{stp}(a/A) = \{b \mid E(a, b) \forall E \text{ relation d'équivalence } A\text{-définissable avec un nombre fini des classes}\}.$$

**Remarque 2.4.16.** Si  $a$  et  $b$  ont le même type fort sur  $A$ , ils ont le même type sur  $A$ .

De plus, les éléments d'une suite  $A$ -indiscernable  $\{a_i\}_{i < \omega}$  ont tous le même type fort sur  $A$ .

**Lemme 2.4.17.**  $\text{stp}(a/A) = \text{stp}(b/A)$  si et seulement si  $\text{tp}(a/\text{acl}^{\text{eq}}(A)) = \text{tp}(b/\text{acl}^{\text{eq}}(A))$ .

*Démonstration.* Pour chaque relation d'équivalence  $A$ -définissable  $E$  avec un nombre fini des classes, la classe  $a/E$  est algébrique (en tant qu'imaginaire) sur  $A$ , donc si  $b \models \text{tp}(a/\text{acl}^{\text{eq}}(A))$ , alors  $E(b, a)$ .

Si  $\varphi(x)$  est une formule à paramètres sur  $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$ , alors l'implication (1)  $\rightarrow$  (3) du lemme 2.4.5 donne que  $\varphi(x)$  est la réunion d'un nombre fini des classes des relations d'équivalence  $A$ -définissables avec un nombre fini des classes. En particulier, l'élément  $a \models \varphi$  si et seulement si  $b \models \varphi$ .

□

**Remarque 2.4.18.**  $\text{acl}(A) = \bigcap_{A \subset M} M$ .

*Démonstration.* Puisque tout modèle est algébriquement clos, l'inclusion  $\text{acl}(A) \subset \bigcap_{A \subset M} M$  est triviale.

Si  $b \notin \text{acl}(A)$ , étant donné un modèle  $M \supset A$ , il existe par compacité un élément  $b_1 \equiv_A b$  avec  $b_1 \notin M$ . L'automorphisme qui envoie  $b_1$  sur  $b$  et fixe  $A$  envoie  $M$  sur un modèle  $M_1 \supset A$  avec  $b \notin M_1$ .

□

**Proposition 2.4.19.** *Si  $T$  est stable et  $p \in S(B)$ , le type  $p$  ne dévie pas sur  $A \subset B$  si et seulement si  $p$  a un schéma de définition à paramètres sur  $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$  qui détermine un type global.*

*Démonstration.* Si  $p$  ne dévie pas sur  $A$ , le corollaire 2.3.25 entraîne qu'il existe un type global  $p' \supset p$  qui ne dévie pas sur  $A$ . Or, pour chaque  $M \supset A$ , le type  $p' \upharpoonright M$  est stationnaire et définissable sur  $M$  par les corollaires 2.3.34 et 2.3.36, donc  $p' \upharpoonright M$  a un schéma de définition à paramètres dans  $M$ , qui détermine un type global. La remarque 2.4.18 donne que  $p'$  est définissable sur  $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$ .

Si  $p$  admet un tel schéma de définition, alors  $p$  est invariant sur  $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$  et donc ne dévie pas sur  $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$ , par la remarque 2.3.21. Puisque  $p \upharpoonright \text{acl}^{\text{eq}}(A)$  ne dévie pas sur  $A$ , la transitivité de la déviation donne que  $p$  ne dévie pas sur  $A$ .

□

**Corollaire 2.4.20.** *Si  $T$  est stable est  $p \in S(B)$  est stationnaire, pour chaque  $A \subset B$ , on a que  $p$  ne dévie pas sur  $A$  si et seulement si  $\text{Cb}(p) \in \text{acl}^{\text{eq}}(A)$ .*

*De plus, si  $q \supset p$  est une extension non-déviante, alors  $q$  est aussi stationnaire et  $\text{Cb}(p) = \text{Cb}(q)$ .*

Une application du lemme de Harrington permet de montrer que tout type sur un ensemble  $\text{acl}^{\text{eq}}$ -clos est stationnaire.

**Corollaire 2.4.21.** *Si  $T$  est stable, tout type sur un ensemble  $\text{acl}^{\text{eq}}$ -clos est stationnaire.*

*En particulier, tout type fort est stationnaire.*

**Lemme 2.4.22** (Lemme de Shelah). *Dans une théorie stable  $T$ , si le  $\text{tp}(A/C)$  est stationnaire et  $A \downarrow_C B$ , étant donnés des applications  $C$ -élémentaires  $f : A \rightarrow A'$  et  $g : B \rightarrow B'$  telles que  $A' \downarrow_C B'$ , alors  $f \cup g$  est aussi  $C$ -élémentaire.*

*Démonstration.* Si l'on étend  $g$  en une application  $C$ -élémentaire globale  $\hat{g}$ , alors  $\hat{g}(A) \downarrow_C B'$ . Comme  $\hat{g}(A) \equiv_C A \equiv_C A'$ , la stationnarité donne un  $C$ -automorphisme  $\tau$  fixant  $B'$  qui envoie  $\hat{g}(A)$  sur  $A'$ . C'est facile à voir que  $(\tau \circ \hat{g}) \upharpoonright A \cup B$  est  $f \cup g$ .  $\square$

**Définition 2.4.23.** Une théorie stable  $T$  est *superstable* s'il n'existe pas de chaînes infinies  $p_0 \subset p_1 \subset \dots \subset p_n \subset \dots$ , où chaque  $p_{i+1}$  est une extension déviante de  $p_i$ , ou, de façon équivalente, chaque type  $p \in S(A)$  ne dévie pas sur une sous-partie fini  $A_0 \subset A$ .

On définit le *rang de Lascar*  $U$  comme  $U(p) \geq \alpha + 1$  s'il existe une extension déviante  $q$  de  $p$  avec  $U(q) \geq \alpha$ . Pour un théorie stable, la superstabilité équivaut à demander que  $U(p) \in \text{On}$  pour tout type  $p$ .

**Remarque 2.4.24.** Toute théorie  $\omega$ -stable est superstable : en effet, si  $p$  a rang de Morley défini, alors  $p \subset q$  est une extension déviante si et seulement si  $\text{RM}(q) < \text{RM}(p)$ , donc  $U(p) \leq \text{RM}(p)$ .

Notons que  $U(p) = 0$  si et seulement si  $p$  est algébrique, car si  $a \notin \text{acl}(B)$ , alors  $a \not\downarrow_B a$ .

**Exercice.** Soit  $T$  la théorie, dans un langage avec des relations unaires  $\{P_n\}_{n < \omega}$ , qui énonce que chaque  $P_i$  est infini et ils sont deux-à-deux disjoints. Montrer que cette théorie est  $\omega$ -stable.

De plus, si  $p$  est le type sur  $\emptyset$  déterminé par  $\{\neg P_n(x)\}_{n < \omega}$ , alors montrer que  $U(p) = 1$  mais  $\text{RM}(p) = 2$ .

**Théorème 2.4.25** (Inégalités de Lascar). *Si  $T$  est superstable, étant donnés deux uples  $a$  et  $b$  sur un ensemble  $A$ , on a*

$$U(a/Ab) + U(b/A) \leq U(a, b/A) \leq U(a/Ab) \oplus U(b/A),$$

où  $\alpha \oplus \beta = \sum_n \omega^{\gamma_i} \cdot (m_i + k_i)$  est la somme directe de

$$\alpha = \sum_n \omega^{\gamma_i} \cdot m_i$$

et

$$\beta = \sum_n \omega^{\gamma_i} \cdot k_i,$$

avec  $m_i, k_i$  sont des entiers naturels et  $\gamma_n \geq \dots \geq \gamma_0 \geq 0$ .

*En particulier, si les rangs  $U(a/A)$  et  $U(b/A)$  sont finis, on a égalité.*

**Exercice.** Un rang  $R$  défini sur les types complets est *continu* si, pour tout ordinal  $\alpha$ , l'ensemble  $\{p \in S(A) \mid R(p) \geq \alpha\}$  est fermé. C'est équivalent à dire que, si  $R(p) < \alpha$ , alors il existe une formule  $\varphi$  telle que  $R(q) < \alpha$  pour tout type  $q$  la contenant.

Le rang  $U$  n'est pas continu : en effet, si  $T$  est la théorie qui énonce que chaque relation d'équivalence  $E_{n+1}$  coupe chaque  $E_n$ -classe dans un nombre infini des classes, et de plus, il y a un nombre infini des  $E_0$ -classes, alors  $T$  est stable, mais le type  $p$  sur  $M \ni a$  déterminé par  $\{E_n(x, a)\}_{n < \omega} \cup \{x \neq c\}_{c \in M}$  a rang  $U = 1$  mais aucune formule l'isole.

**Lemme 2.4.26.** *Si la théorie  $T$  est superstable et  $p \in S(A)$  est stationnaire, alors  $\text{Cb}(p)$  est algébrique sur un segment fini d'une suite de Morley de  $p$ .*

Par le corollaire 2.3.37, la base canonique  $\text{Cb}(p)$  est algébrique sur un segment fini de toute suite de Morley de  $p$ . De plus, on peut montrer que, si  $T$  est superstable, alors la base canonique d'une type stationnaire  $p$  est *définissable* sur un segment fini de la suite de Morley de  $p$ .

*Démonstration.* Soit  $\{a_i\}_{i \leq \omega}$  une suite de Morley de  $p$ . En particulier,

$$a_\omega \downarrow_A \{a_i\}_{i < \omega}.$$

Si

$$a_\omega \not\downarrow_{a_0, \dots, a_i} A\{a_j\}_{i < j < \omega}$$

pour tout  $i < \omega$ , on obtient ainsi une chaîne infinie des types, chacun déviante sur les paramètres du type précédent, ce qui contredit la superstabilité. Par le corollaire 2.4.20, on conclut que  $\text{Cb}(p) = \text{Cb}(a_\omega/A) = \text{Cb}(a_\omega/A\{a_i\}_{i < \omega}) \in \text{acl}^{\text{eq}}(a_0, \dots, a_i)$ .

□

# Chapitre 3

## Groupes $\omega$ -stables

**Définition 3.0.1.** Un *groupe stable*  $G$  est la donnée d'un ensemble non-vide  $G$  muni d'une loi de groupe, le tout définissable (ou plutôt interprétable) à l'intérieur d'une théorie stable  $T$ .

Un groupe stable  $G$  est  $\omega$ -stable si sa théorie l'est.

Grâce au corollaire 2.3.9, la structure induite de la théorie  $T$  sur le groupe  $G$  est définissable avec des paramètres de  $G$ , et ce réduit est à nouveau stable. Donc souvent on supposera que l'univers de notre théorie est l'ensemble  $G$ .

### 3.1 Conditions de chaîne

**Lemme 3.1.1.** Soit  $G$  un groupe stable qui agit de façon définissable comme groupe des permutations d'un ensemble  $E$ . Étant donnée une sous-partie définissable  $A \subset E$  et un élément  $g \in G$ , on a que  $g \cdot A = A$  si et seulement si  $g \cdot A \subset A$

*Démonstration.* Si  $g$  est d'ordre  $n \in \mathbb{N}$ , le résultat est immédiat, puisque  $g \cdot A \subset A$  entraîne

$$A = g^n \cdot A \subset g^{n-1} \cdot A \subset \dots \subset A,$$

donc on a égalité.

Si  $g$  est d'ordre infini et  $g \cdot A \subsetneq A$ , alors  $g^2 \cdot A \subsetneq g \cdot A \subset A$ . La relation

$$x \prec y \Leftrightarrow x \cdot A \subsetneq y \cdot A$$

ordonne les puissances de  $g$ , ce qui contredit la stabilité.  $\square$

Dans le cas  $\omega$ -stable, on obtient un résultat plus fort, car si  $K \preceq H$  sont des sous-groupes définissables tels que  $\text{RM}(K) = \text{RM}(H)$ , alors l'indice  $[H : K]$  est fini et  $\text{DM}(K) \cdot [H : K] = \text{DM}(H)$ .

**Corollaire 3.1.2.** Un *monomorphisme définissable d'un groupe  $\omega$ -stable est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Soit  $\sigma$  le monomorphisme définissable. En particulier, l'image de  $\sigma$  a même rang et degré de Morley que  $G$ , qui est une réunion de ses translatés, donc, par le corollaire 1.2.11, on conclut que l'indice est 1.  $\square$

**Remarque 3.1.3.** Par récurrence, on montre facilement que  $\text{RM}(A) = \text{RM}(\sigma(A))$  si  $\sigma$  est un homomorphisme à fibres finies. Par contre, le degré de Morley ne doit pas être égal : en effet, si  $A \subset \text{Ker}(\sigma)$  est de taille arbitraire, mais finie, alors  $\text{DM}(\sigma(A)) = 1$ .

**Corollaire 3.1.4.** Un *groupe  $\omega$ -stable abélien sans torsion est divisible.*

**Définition 3.1.5.** Une famille  $\{A_i\}_{i \in I}$  des parties d'une structure  $\mathcal{M}$  est *uniformément définissable* s'il existe une formule  $\varphi(x, y)$  et des paramètres  $\{a_i\}_{i \in I}$  dans  $M$  tels que  $A_i = \varphi(M, a_i)$  pour chaque  $i \in I$ .

Si  $T$  est stable, une conséquence du fait qu'aucune formule a la propriété de l'ordre strict est qu'il n'existe pas de chaîne stricte infinie des parties uniformément définissables. De plus, on a le résultat suivant :

**Lemme 3.1.6.** *Si  $G$  n'a pas la propriété de l'indépendance, alors la famille d'intersections finies des sous-groupes uniformément définissables est aussi uniformément définissable.*

*Démonstration.* Soient  $\varphi(x, y)$  une formule et des paramètres  $b_i$  tels que  $H_i = \varphi(G, b_i)$  est un sous-groupe. Supposons qu'il existe des intersections finies arbitrairement larges

$$\bigcap_i^m H_i,$$

qui ne sont pas l'intersection d'une sous-famille propre.

Il existe donc un élément  $h_i \in H_j \setminus H_i$  pour chaque  $j \neq i$ . Pour chaque  $I \subset \{1, \dots, m\}$ , l'élément  $h_I = \prod_{i \in I} h_i$  satisfait  $\varphi(x, b_j)$  si et seulement si  $j \notin I$ . Cela témoigne la propriété de l'indépendance pour  $\varphi$ .

Par compacité, il existe un  $N$  tel que toute intersection parmi les  $H_i$  s'écrit comme une intersection d'au plus  $N$  parmi les  $H_i$  : ceci donne donc une famille uniformément définissable. □

**Corollaire 3.1.7** (Baldwin-Saxl). *Si  $G$  est un groupe stable, l'intersection de toute famille uniformément définissable est aussi définissable.*

*En particulier, le centralisateur de tout ensemble (pas forcément définissable) est définissable.*

*Démonstration.* Si la famille est définissable par la formule  $\varphi(x, y)$ , alors la suite des intersections finies de membres de la famille est uniformément définissable, par le lemme 3.1.6. Puisque  $G$  n'a pas la propriété de l'ordre strict, la chaîne des intersections finies doit se stabiliser.

Pour le dernier point, notons que  $C(A) = \bigcap_{a \in A} C(a)$ , où  $C(a) = \{g \in G \mid h \cdot a = a \cdot h\}$  est uniformément définissable. □

**Corollaire 3.1.8.** *Si  $G$  est  $\omega$ -stable, toute intersection des groupes définissables l'est aussi.*

**Définition 3.1.9.** Si  $G$  est un groupe stable, on appelle sa  $\varphi$ -composante connexe  $G^0(\varphi)$  l'intersection de tous les sous-groupes de  $G$  d'indice fini définis par une instance de la formule  $\varphi$ . Cette composante connexe est définissable et d'indice fini, par le corollaire 3.1.7.

La composante connexe (absolue)  $G^0$  de  $G$  est l'intersection de toutes les  $G^0(\varphi)$ , où  $\varphi$  parcourt l'ensemble des formules. La composante connexe  $G^0$  est type-définissable. De plus, si  $G$  est  $\omega$ -stable, elle est définissable d'indice fini par le corollaire 3.1.8.

Un groupe stable est connexe si  $G = G^0$ . Il est  $\varphi$ -connexe si  $G = G^0(\varphi)$ . Si  $\varphi(x, y)$  est  $xy = yx$  et  $G = G^0(\varphi)$ , alors on dit que  $G$  est *centralisateur-connexe*.

Notons que, même si l'indice de  $G^0$  dans  $G$  n'est pas forcément fini lorsque  $G^0$  est type-définissable, il est néanmoins borné (en tant que nombre hyperréel).

De plus, si  $G$  est stable, pour une formule  $\varphi(x, y)$  fixée, étant donné  $n \in \mathbb{N}$ , pour chaque uple  $a$ , si  $\varphi(x, a) \leq G$  est un sous-groupe d'indice borné par  $n$ , alors  $G^0(\varphi) \leq \varphi(x, a)$ , donc la  $\varphi$ -composante connexe ne change pas lorsque l'on passe à une extension élémentaire. De même pour  $G^0$  si  $G$  est  $\omega$ -stable.

Comme un sous-groupe d'indice fini s'envoie dans un autre sous-groupe fini par conjugaison pour un élément normalisant, on en déduit :

**Remarque 3.1.10.** La composante connexe est invariante par tous les automorphismes de  $G$ . En particulier, si  $H \triangleleft G$ , alors  $H^0 \triangleleft G$ .

Toute action définissable d'un groupe stable connexe sur un ensemble fini est triviale.

Tout groupe divisible est connexe (pas besoin de stabilité ici) : en effet, si  $H \leq G$  est définissable d'indice  $n \in \mathbb{N}$ , alors on a que pour tout  $g \in G$ , l'élément  $g^n \in H$ . Si  $g$  est un élément quelconque de  $G$ , soit  $g_1$  une racine  $n$ -ième de  $g$ . En particulier, l'élément  $g = g_1^n \in H$ .

**Corollaire 3.1.11.** *Si  $G$  est centralisateur-connexe, toute partie distinguée finie est centrale.*

*Démonstration.* Soit  $A$  une partie finie distinguée. Pour  $a \in A$ , l'indice du centralisateur de  $a$  est la taille de l'orbite de  $a$  modulo  $G$  (par conjugaison), qui est contenue dans  $A$ , donc cet indice est fini. Alors  $a$  est central dans  $G$ . □

Étant donnée une propriété  $P$ , le groupe  $G$  est dit  *$P$ -par-fini* s'il existe un sous-groupe  $H$  d'indice fini ayant la propriété  $P$ .

**Corollaire 3.1.12.** *Un groupe stable n'ayant qu'un nombre fini des commutateurs est central-par-fini.*

*Démonstration.* Soit  $H \leq G$  la composante centralisateur-connexe de  $G$ , qui est définissable et d'indice fini. Si  $a \in G$  est fixé, puisque l'ensemble  $\{a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a \cdot x\}_{x \in G}$  est fini, l'ensemble  $\{x^{-1} \cdot a \cdot x\}_{x \in G}$  l'est aussi. En particulier, l'orbite de  $a$  par conjugaison par  $G$  est finie, donc  $H \leq C_G(a)$ . On conclut que  $H$  est contenu dans  $Z(G)$ .  $\square$

**Lemme 3.1.13.** *Si le centre d'un groupe  $G$  centralisateur-connexe est fini, il est son deuxième centre.*

*Si  $G$  est infini, nilpotent et centralisateur-connexe, alors  $Z(G)$  est infini.*

*Démonstration.* Si  $a \in Z_2(G)$ , alors pour chaque  $x \in G$ , le commutateur  $a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a \cdot x$  est dans  $Z(G)$ , qui est fini. En particulier, le centralisateur  $C_G(a)$  est d'indice fini dans  $G$ , donc  $a \in Z(G)$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.14.** *Un sous-groupe infini distingué  $N$  (pas forcément définissable) d'un groupe centralisateur-connexe nilpotent  $G$  contient une infinité d'éléments centraux.*

*Démonstration.* Par le lemme 3.1.13, le centre  $Z(G)$  est infini. Si  $N \cap Z(G)$  est infini, il n'y a rien à démontrer. Sinon, puisque  $G$  est nilpotent, soit  $1 < n \in \mathbb{N}$  minimal tel que  $N \cap Z_n(G)$  est infini. Pour  $a \in N \cap Z_n(G)$  et  $x \in G$ , l'élément  $x^{-1} \cdot a^{-1} \cdot x \cdot a$  appartient à  $N \cap Z_{n-1}(G)$ , qui est donc fini. En particulier, l'orbite de  $a$  par conjugaison est finie, donc  $a$  est central puisque  $G$  est centralisateur-connexe. On en déduit que  $N \cap Z_n(G) \subset N \cap Z(G)$ , ce qui contredit  $n > 1$ .  $\square$

**Proposition 3.1.15.** *Un sous-groupe définissable  $H$  d'indice infini d'un groupe  $\omega$ -stable nilpotent  $G$  est aussi d'indice infini dans son normalisateur  $N_G(H)$ .*

*Démonstration.* D'abord montrons que si  $H$  est d'indice infini dans  $G$ , alors  $H \neq N_G(H)$ . Par nilpotence de  $G$ , soit  $n$  minimal tel que  $Z_n(G) \not\subseteq H$ . Puisque  $Z_{n-1}(G) \subset H$ , on conclut que  $Z_n(G) \subset N_G(H)$ , qui ne peut pas être donc égal à  $H$ .

Comme  $H$  est normal dans  $N_G(H)$ , sa composante connexe  $H^0$  l'est aussi, donc  $N_G(H) \subset N_G(H^0)$ . Si  $H^0$  est d'indice fini dans  $N_G(H^0)$ , on a que  $(N_G(H^0))^0 = H^0$ , donc  $[G : N_G(H^0)]$  est infini. Par la discussion précédente, il existe un élément  $g \notin N_G(H^0)$  le normalisant. En particulier, il normalise sa composante connexe  $H^0$ , donc  $g \in N_G(H^0)$ , ce qui donne une contradiction. On conclut que  $H^0$  est d'indice infini dans  $N_G(H^0)$ . Quitte à diviser  $N_G(H^0)$  par  $H^0$ , nous nous ramenons au cas où  $H$  est fini.

Or, si  $Z(G)$  (qui est toujours contenu dans  $N_G(H)$ ) est infini, on conclut le résultat. Sinon, prêt à diviser par le centre et par récurrence sur la suite centrale, on a que  $H \cdot Z(G)$  a un normalisateur  $N$  infini. La composante connexe  $N^0$  agit sur  $H$  de façon triviale par la remarque 3.1.10, donc  $N^0 \subset N_G(H)$  est aussi infini.  $\square$

## 3.2 Génériques

Par la suite, on travaillera à l'intérieur d'un groupe stable (infini)  $G$ , que l'on supposera définissable sans paramètres. Tous les types concernés entraînent en particulier  $G$  (en tant qu'ensemble définissable), même si l'on peut prendre des paramètres ailleurs.

**Définition 3.2.1.** Un ensemble définissable  $X$  est *générique (à droite)* s'il existe une partie finie  $A$  de  $G$  telle que  $G = A \cdot X = \bigcup_{a \in A} a \cdot X$ . Il est *générique (à gauche)* si  $G = X \cdot A$ . Il est *générique (bilatère)* s'il existent des parties finies  $A$  et  $B$  de  $G$  avec  $G = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \cdot X \cdot b$ .

Un type  $p \in S(A)$  est *générique (à gauche, à droite, bilatère)* s'il ne contient que des formules génériques (à gauche, à droite, bilatères).

**Lemme 3.2.2.** *Soit un ensemble  $X \subset G$  définissable est générique à gauche, soit son complément l'est à droite.*

*Démonstration.* Si  $X$  n'est pas générique à gauche, pour chaque  $n$  et  $a_1, \dots, a_n$ , il existe  $g$  dans  $G$  avec  $a_i \cdot g \in G \setminus X$ . De même, si  $G \setminus X$  n'est pas générique à droite, pour chaque  $n$  et  $b_1, \dots, b_n$  il existe  $z \in G$  avec  $z \cdot b_i \in X$ . La formule  $x \cdot y \notin X$  a la propriété de l'ordre : en effet, on construit par compacité une suite infinie  $\{a_i, b_j\}_{i,j < \omega}$  dans  $G$  telle que  $a_i \cdot b_j \notin X$  si et seulement si  $i \leq j$ . Soit  $a_1$  dans  $G$ . Par hypothèse, il existe  $b_1$  tel que  $a_1 \cdot b_1$  n'est pas dans  $X$ . Si l'on suppose  $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$  construits avec  $a_i \cdot b_j \notin X$  si et seulement si  $i \leq j$ , soit  $a_{n+1}$  tel que  $a_{n+1} \cdot b_i$  est dans  $X$  pour tout  $i \leq n$ , car  $G \setminus X$  n'est pas générique à droite. Comme  $X$  n'est pas générique à gauche, il existe  $b_{n+1}$  tel que  $a_i \cdot b_{n+1}$  n'est pas dans  $X$  pour  $i \leq n+1$ , comme souhaité.  $\square$

**Corollaire 3.2.3.** *Il existent des types génériques (bilatères) sur n'importe quel ensemble des paramètres. De même, si  $\Sigma$  est un ensemble des formules génériques fermé par d'intersections finies, alors il existe un type générique  $p$  le complétant.*

*Démonstration.* Sur un ensemble fixé des paramètres, il suffit de montrer que la famille  $\{G \setminus X \mid X \text{ n'est pas générique}\}$  est un filtre. En particulier, si  $X \cup Y$  est générique, alors soit  $X$  soit  $Y$  l'est aussi. Supposons que

$$G = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \cdot (X \cup Y) \cdot b = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} (a \cdot X \cdot b) \cup (a \cdot Y \cdot b) = \left( \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \cdot X \cdot b \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \cdot Y \cdot b \right).$$

D'après le lemme 3.2.2, l'une de deux parties doit être générique (à gauche ou à droite), donc soit  $X$  soit  $Y$  sont des parties génériques bilatères.  $\square$

**Lemme 3.2.4.** *Si  $p \in S(A)$  est un type générique, alors  $p$  ne dévie pas sur  $\emptyset$ .*

*Démonstration.* Soit  $M$  un modèle avec  $M \downarrow A$ . Par le corollaire 3.2.3, on peut compléter  $p$  en un type générique  $q$  sur  $M \cup A$ . Montrons que  $q$  ne dévie pas sur  $M$ , qui consiste à montrer que  $q$  est un cohéritier sur  $M$ , par le corollaire 2.3.24. Soit donc  $\varphi$  une formule dans  $q$ . Par stabilité, l'ensemble  $\varphi(M)$  est définissable à paramètres dans  $M$ . Or, puisque  $\varphi$  est générique, le groupe  $G$  est la réunion finie des translatés de  $\varphi$  et donc  $G(M)$  est aussi dans une réunion finie des translatés sur  $M$  de  $\varphi(M)$ . En particulier, l'ensemble  $\varphi(M) \neq \emptyset$ . Si  $c \models q$ , alors  $c \downarrow_M A$ . Par transitivité, on obtient que  $c \downarrow A$ , donc  $p$  ne dévie pas sur  $\emptyset$ , puisque  $c \models p$ .  $\square$

**Corollaire 3.2.5.** *Pour chaque formule  $\varphi(x, y)$ , il existe un entier  $n$  tel que, pour tout uple  $a$ , si  $\varphi(x, a)$  est une partie générique (bilatère) de  $G$ , alors  $G$  est la réunion de  $n$  translatés de  $\varphi(x, a)$ .*

*Démonstration.* Soit  $p$  un générique global de  $G$ , qui existe par le corollaire 3.2.3. Puisqu'il ne dévie pas sur  $\emptyset$ , par le lemme 3.2.4, alors il ne dévie pas sur un petit modèle  $M$ . En particulier, le type  $p$  est définissable sur  $M$ , par le corollaire 2.3.34.

La formule  $\varphi(x, a)$  est générique si et seulement s'ils existent des éléments  $b$  et  $c$  tels que  $b \cdot \varphi(x, a) \cdot c \in p$ . En particulier, si  $\chi(x, y) = \exists u \exists v (u \cdot \varphi(x, y) \cdot v)$ , l'uple  $a$  doit satisfaire  $d_p \chi$ . On conclut par compacité.  $\square$

**Corollaire 3.2.6.** *Si  $q \in S(B)$  est une extension non-déviant de d'un type générique  $p \in S(A)$ , alors  $q$  est aussi générique. De plus, si  $\text{tp}(g/A)$  est générique et  $g \downarrow_A h$ , alors  $\text{tp}(h \cdot g/A, h)$  est aussi générique et  $h \cdot g \downarrow A, h$ .*

*Démonstration.* Notons que le groupe de permutations de  $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$  qui fixent  $A$  agit transitivement sur les extensions  $\text{dep}$  (qui sont toutes non-déviantes!) : en effet, si  $p_1$  et  $p_2$  sont deux extensions non-déviantes de  $p$  à  $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$ , alors prenons  $c_1$  et  $c_2$  les réalisant. Il existe un  $A$ -automorphisme qui envoie  $c_1$  sur  $c_2$ , qui s'étend en un automorphisme de  $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$ , par le lemme 1.1.9. En particulier, si  $M \supset A$  est  $|A|^+$ -fortement homogène (par exemple, s'il est assez saturé, par stabilité), comme tout modèle  $M \supset A$  est algébriquement clos (au sens de  $T^{\text{eq}}$ ), le groupe  $\text{Aut}(M/A)$  agit transitivement sur les extensions non-déviantes de  $p$  sur  $M$ .

Prenons  $\tilde{p}$  une extension générique de  $p$  sur un tel modèle  $M$ . De même, soit  $q'$  une extension non-déviant de  $q$  sur  $M \cup B$  et  $p' = q' \upharpoonright M$ . Notons que  $p'$  ne dévie pas sur  $A$ . Par le lemme 3.2.4, le type  $\tilde{p}$  ne dévie pas sur  $\emptyset$ , donc il est aussi une extension non-déviant de  $p$ . On déduit de la discussion précédente que  $p'$  est aussi générique, donc on peut remplacer  $A$  par un modèle  $M$  le contenant. En particulier, le type  $q$  est l'extension héritière de  $p$ .

Par le corollaire 3.2.5, pour chaque  $\varphi(x, y)$ , soit  $\chi_\varphi(y)$  la formule qui exprime que  $\varphi(x, y)$  est générique. Puisque  $p$  omet  $\varphi(x, y) \wedge \neg \chi_\varphi(y)$ , le type  $q$  aussi, donc il est forcément générique.

Notons que si  $\text{tp}(g/A)$  est générique et  $g \downarrow_A h$ , alors le type  $\text{tp}(g/A, h)$  l'est aussi. En particulier, le type  $\text{tp}(h \cdot g/A, h)$  ne contient que des formules génériques, donc il ne dévie pas sur  $\emptyset$ .  $\square$

**Corollaire 3.2.7.** *Le produit de deux génériques indépendants l'est aussi et il est indépendant de chaque facteur. Tout élément de  $G$  s'exprime comme le produit de deux génériques.*

*Démonstration.* La première partie est immédiate. Pour la deuxième, étant donné un élément  $g \in G$ , soit  $h \downarrow g$  générique sur  $g$ . Notons que  $h^{-1}$  l'est aussi et de même pour  $h^{-1} \cdot g$ . L'élément  $g = h \cdot (h^{-1} \cdot g)$  est donc le produit de deux génériques (pas indépendants, en général!).  $\square$

**Corollaire 3.2.8.** *Une formule  $\varphi$  est générique à gauche si et seulement si elle l'est à droite si et seulement si elle l'est bilatèrement.*

*Démonstration.* Par symétrie, il suffit de montrer que toute formule  $\varphi$  générique bilatère est générique à gauche. On travaille sur un modèle  $M$  contenant les paramètres de  $\varphi$ . Par compacité, il suffit de montrer que tout type sur  $M$  est dans un translaté (sur  $M$ ) à gauche de la formule  $\varphi$ . Si  $p = \text{tp}(b/M)$  est un type quelconque sur  $M$ , prenons  $\text{tp}(a/M, b)$  un type générique bilatère contenant  $\varphi$ , par le corollaire 3.2.3. Si  $c = a \cdot b^{-1}$ , le type  $\text{tp}(c/M, b)$ , qui contient la formule  $\varphi(x \cdot b)$ , est aussi générique, donc  $c \perp_M b$ . Par cohéritiers, il existe  $c' \in M$  avec  $\models \varphi(c' \cdot b)$ .  $\square$

Il suit qu'un type global  $p$  est générique si et seulement si  $g \cdot p$  ne dévie pas sur  $\emptyset$  pour chaque  $g \in G$ .

**Définition 3.2.9.** Étant donné un type  $p \in S(B)$  définissable sur  $A$  et une formule  $\varphi$ , on définit son  $\varphi$ -stabilisateur  $\text{Stab}_\varphi(p) = \{g \in G \mid \forall y (\varphi(x, y) \in p \Leftrightarrow \varphi(g \cdot x, y) \in p)\}$ . Le stabilisateur  $\text{Stab}(p)$  de  $p$  est l'ensemble  $\bigcap_\varphi \text{Stab}_\varphi(p)$ .

La définissabilité des types entraîne que le sous-groupe  $\text{Stab}_\varphi(p)$  est définissable sur  $A$ . En effet, pour chaque formule  $\varphi(x, b)$ , si  $\varphi_1(x, b, g)$  note la formule  $\varphi(g \cdot x, b)$ , alors  $g \in \text{Stab}_\varphi(p)$  si et seulement si

$$d_p \varphi_1(b, g) \Leftrightarrow d_p \varphi(b).$$

En particulier, si  $A$  est algébriquement clos (au sens de  $T^{\text{eq}}$ ), cette définition s'étend à toute extension non-déviant de  $p \upharpoonright A$ , par la proposition 2.4.19. De même, le sous-groupe  $\text{Stab}(p)$  est définissable si  $G$  est  $\omega$ -stable. En effet : si  $\varphi(x, b)$  est une formule dans  $p$  du rang et degré de Morley minimal, alors  $\text{Stab}_\varphi(p) \subset \text{Stab}_\psi(p)$  pour toute formule  $\psi$ . Soit  $g$  dans  $\text{Stab}_\varphi(p)$  et une instance de  $\psi$  sur  $B$ , que l'on peut supposer de la forme  $\psi(x, b)$ . Si  $\psi(g \cdot x, b) \notin p$ , alors  $\text{RM}(\varphi(g \cdot x, b) \wedge \psi(g \cdot x, b)) < \text{RM}(\varphi(x, b)) = \text{RM}(p)$ , par la minimalité du rang et degré de  $\varphi(x, b)$ . Comme le rang de Morley est préservé par des bijections définissables, on conclut que  $\text{RM}(\varphi(x, b) \wedge \psi(x, b)) < \text{RM}(p)$ , ce qui contredit le choix de  $\varphi(x, b)$ .

Puisque  $p \upharpoonright \varphi$  détermine sa classe modulo  $G^0(\varphi)$  (qui est d'indice fini dans  $G$ ), on voit que tous les éléments de  $\text{Stab}_\varphi(p)$  sont dans la même  $G^0(\varphi)$ -classe. Donc  $\text{Stab}(p)$  est un sous-groupe de  $G^0$ , si  $G$  est  $\omega$ -stable.

**Lemme 3.2.10.** Si  $G$  est  $\omega$ -stable, alors une formule  $\varphi$  est générique si et seulement si son rang de Morley équivaut  $\text{RM}(G)$ .

*Démonstration.* Notons que si  $\varphi$  est générique, comme le rang de Morley de chaque translaté est égal à celui de  $\varphi$ , on a que  $\text{RM}(\varphi) = \text{RM}(G)$ , par le lemme 1.2.5. Donc les types génériques ont rang de Morley  $\text{RM}(G)$ .

Si  $\text{RM}(\varphi) = \text{RM}(G)$ , soit  $M$  un modèle et  $p$  sur  $M$  contenant  $\varphi$  avec rang de Morley  $\text{RM}(G)$ . Notons que l'ensemble des types de rang  $\text{RM}(G)$  est fini (borné par  $\text{DM}(G)$ ). Comme chaque classe de  $\text{Stab}(p)$  détermine l'un parmi ces types génériques, l'indice de  $\text{Stab}(p)$  dans  $G^0$  est fini. On conclut que l'action de  $G^0$  sur l'ensemble des types de rang maximal est donc triviale. Étant donné un type  $q \in S(M)$  contenant  $G^0$ , on réalise  $g \models p$  et  $h \models q$  avec  $g \perp_M h$ . En particulier, l'élément  $h \cdot g \models p$ , donc  $\models \varphi(h \cdot g)$ . Par cohéritiers, il existe un  $g' \in M$  avec  $\varphi(h \cdot g')$ . Un nombre fini des translatsés à droite de  $\varphi$  recouvrent  $G^0$ , donc aussi  $G$ .  $\square$

**Corollaire 3.2.11.** Si  $G$  est  $\omega$ -stable, il n'y a qu'un nombre fini des types génériques, qui sont en correspondance avec les classes de  $G$  modulo  $G^0$ .

Le générique de  $G^0$  s'appelle un *générique principal* de  $G$ .

*Démonstration.* Puisque les types génériques sont exactement ceux de rang de Morley  $\text{RM}(G)$ , ils sont en nombre fini. En particulier, l'action par translation de  $G^0$  sur un type générique est triviale. Si  $a$  et  $b$  sont deux réalisations indépendantes de deux types génériques de  $G^0$ , alors  $a \cdot b$  doit avoir le même type que  $a$  et que  $b$ , donc  $G^0$  ne contient qu'un seul type générique. De même, chaque classe de  $G$  modulo  $G^0$  ne contient qu'un seul type générique.  $\square$

Si  $p$  est stationnaire, comme les éléments de  $\text{Stab}(p)$  fixent la restriction de  $p$  à chaque formule, c'est facile à voir que  $g \in \text{Stab}(p)$  si et seulement si  $g \cdot p = p$ , où  $p$  est l'extension globale de  $p$ . En particulier, on a que  $g \in \text{Stab}(p)$  si et seulement si pour tout  $a \models p$  avec  $a \perp_A g$ , alors  $g \cdot a \perp_A g$  et  $g \cdot a \models p$  aussi.

Le résultat suivant est vrai, même si  $G$  n'est pas  $\omega$ -stable, mais seulement stable.

**Lemme 3.2.12.** Pour chaque formule  $\varphi$ , les  $\varphi$ -types complets (globaux) déterminés par les types génériques (globaux) de  $G$  sont en nombre fini. Le type  $p$  est générique si et seulement si  $\text{Stab}(p) = G^0$ . Chaque classe de  $G$  modulo  $G^0$  contient un seul générique. Donc  $p$  est générique si et seulement si  $\text{Stab}(p) \supset G^0$ .

*Démonstration.* Soit  $\varphi(x, z)$  une formule et  $p$  un type global. Soit  $\varphi'(x; y, z) = \varphi(y \cdot x, z)$ . Les  $\varphi$ -types déterminés par les types génériques sont en correspondance avec les classes de  $\text{Stab}_{\varphi'(x; y, z)}(p)$  (qui est définissable sur  $\text{acl}^{\text{eq}}(\emptyset)$ , puisque  $p$  ne dévie par sur  $\emptyset$  par le lemme 3.2.4). Ces classes sont en nombre fini.

Pour chaque  $H \leq G$  définissable d'indice fini, le type  $p$  entraîne  $x \in H \cdot a$  pour un certain paramètre  $a$ . Par compacité, le type  $p$  est dans une seule classe de  $G^0$ . En particulier, l'action de  $G^0$  sur le générique  $p$  est triviale, donc  $G^0 = \text{Stab}(p)$ . Si  $q$  est un autre générique contenu dans la même classe  $G^0 \cdot a$  que  $p$ , alors  $q = g \cdot p$ , pour  $g \in G^0$ , donc  $q = p$ .

Si  $G^0 \subset \text{Stab}(p)$ , comme  $p$  détermine sa classe modulo  $G^0$ , qui agit trivialement sur  $p$ , le type doit être le générique de cette classe.  $\square$

Les résultats ci-dessus, plus particulièrement l'existence et propriétés des génériques, peuvent se généraliser facilement au cadre d'un sous-groupe  $G$  type-définissable (ou même \*-définissable c'est à dire, où le type partiel en question a une infinité des variables). Dans le cadre stable, nous n'avons rien de nouveau :

**Proposition 3.2.13.** *Tout sous-groupe stable \*-définissable  $G$  (à l'intérieur d'un groupe ambiant  $H$ ) est l'intersection des groupes définissables.*

*Démonstration.* Pour chaque formule  $\varphi$ , le nombre de  $\varphi$ -types déterminés pas les types génériques globaux de  $G$  est fini, que l'on note par  $\{p_1, \dots, p_{n_\varphi}\}$ . Si  $p$  est un générique avec  $p \upharpoonright \varphi = p_1$ , alors  $\text{Stab}_\varphi(p)$  est définissable. Le sous-groupe  $G_\varphi$  des éléments de  $N_H(G)$  qui normalisent l'ensemble  $\{p_1, \dots, p_{n_\varphi}\}$  est la réunion finie des classes modulo  $\text{Stab}_\varphi(p)$ , donc définissable. Clairement  $G \subset \bigcap_{\varphi} G_\varphi$ .

Si  $a \in G_\varphi$  pour chaque  $\varphi$ , prenons  $b \in G$  générique indépendant de  $a$ . Le  $\varphi$ -type de  $a \cdot b$  appartient à l'ensemble  $\{p_1, \dots, p_{n_\varphi}\}$ , pour chaque  $\varphi$ . En particulier, l'élément  $a \cdot b$  est un générique de  $G$ . On conclut que  $a$  l'est aussi.  $\square$

**Remarque 3.2.14.** Notons que la stabilité est essentielle pour cette preuve, puisque les infinitésimaux forment un sous-groupe additive type-définissable d'une extension saturée de  $\mathbb{R}$ , qui n'est pas l'intersection des groupes définissables.

**Lemme 3.2.15.** *Si  $G$  est  $\omega$ -stable, étant donné un type stationnaire  $p$ , on a  $\text{RM}(p) \geq \text{RM}(\text{Stab}(p))$ . Si l'on a égalité, alors  $\text{Stab}(p)$  est connexe et  $p$  est le générique d'un translaté de  $\text{Stab}(p)$ .*

*Démonstration.* Supposons que l'on travaille sur un modèle  $M$ . On réalise  $a \models p$  et  $b$  un générique quelconque du  $\text{Stab}(p)$ , qui est définissable sur  $M$ , avec  $a \downarrow_M b$ . Alors  $b \cdot a \models p$  et  $b \cdot a \downarrow_M b$ .

Or,

$$\text{RM}(\text{Stab}(p)) = \text{RM}(b/M) = \text{RM}(b/Ma) = \text{RM}(b \cdot a/Ma) \leq \text{RM}(b \cdot a/M) = \text{RM}(p).$$

Si l'on a égalité, alors  $b \cdot a \downarrow_M a$ . Notons que le type  $\text{tp}(a/M, b \cdot a) \vdash x \cdot (b \cdot a)^{-1} \in \text{Stab}(p)$ , puisque  $a \cdot (b \cdot a)^{-1} \in \text{Stab}(p)$ . Par héritiers, on trouve  $c \in M$  tel que  $p \vdash x \cdot c \in \text{Stab}(p)$ .

Si  $H \leq \text{Stab}(p)$  est définissable sur  $M$  d'indice fini, alors  $p$  détermine sa classe  $C$  modulo  $H$ . Comme  $b = (b \cdot a) \cdot a^{-1}$ , le type  $\text{tp}(b/M, a)$  est dans la classe  $C \cdot a^{-1} = H$ , pour chaque  $b$  qui réalise un générique du  $\text{Stab}(p)$ , indépendant de  $a$ . On conclut que  $\text{Stab}(p)$  est connexe.  $\square$

**Lemme 3.2.16.** *Si  $G$  est un groupe stable et  $H \leq G$  est un sous-groupe définissable, le tout définissable sur un ensemble de paramètres  $A$  algébriquement clos (dans  $T^{\text{eq}}$ ), alors, étant donné un générique  $g \in G$  sur  $A$ , l'élément  $g/H$  est générique dans  $G/H$  sur  $A$  et  $g$  est générique dans  $g \cdot H$  sur  $A \cup \ulcorner g \cdot H \urcorner$ .*

Notons que  $\ulcorner g \cdot H \urcorner$  est interdéfinissable sur  $A$  avec l'imaginaire  $g/H$ .

*Démonstration.* Clairement, tout formule  $\varphi$  sur  $A$  réalisée par  $g/H$  se relève en une formule de  $G$  sur  $A$  réalisée par  $g$ , qui est elle donc générique. Puisque un nombre fini de ses translatés couvre  $G$ , le même est vrai pour  $\varphi$ .

Soit  $h \in H^0$  générique sur  $A \cup \{g\}$ . Par généricité, l'élément  $g \cdot h$  est générique sur  $A \cup \{g\}$ , donc il est générique sur  $A \cup \{g/H\}$ . De plus, l'élément  $g \cdot h$  est dans  $g \cdot H$ . Il suffit de montrer que  $g$  et  $g \cdot h$  ont le même type sur  $A \cup \{g/H\}$ .

Notons que le stabilisateur de  $\text{tp}(g/A)$  est définissable sur  $A$ , par la proposition 2.4.19 et il contient  $G^0 \supset H^0$ , par le lemme 3.2.12. En particulier  $g \equiv_A g \cdot h$ . Il existe un  $A$ -automorphisme qui envoie  $g \cdot h$  dans  $g$ . Or, comme  $g$  et  $g \cdot h$  sont dans la même classe  $g \cdot H$ , elle reste fixée. Donc  $g \equiv_{A, \ulcorner g \cdot H \urcorner} g \cdot h$  : le type  $\text{tp}(g/A, \ulcorner g \cdot H \urcorner)$  est générique dans  $g \cdot H$ .  $\square$

### 3.3 Indécomposables

On se place toujours à l'intérieur d'un groupe  $G$  stable (infini) définissable sans paramètres.

**Définition 3.3.1.** Une partie non-vide définissable  $A$  de  $G$  est *indécomposable (à gauche)* si la cardinalité de classes (à gauche) de  $H$  modulo  $G$  contenant un élément de  $A$  est soit 1 soit infinie, pour tout  $H \leq G$  définissable.

**Remarque 3.3.2.** Si  $A \subset G$  est indécomposable de taille au moins 2, alors  $A$  est infinie.

Un sous-groupe  $H$  de  $G$  est indécomposable si et seulement s'il est connexe.

Si  $A$  est stable par un ensemble  $S$  d'automorphismes de  $G$ , alors  $A$  est indécomposable si, pour tout sous-groupe définissable  $H \leq G$  invariant sous l'action de  $S$ , lorsque  $|A/H| \geq 2$ , alors c'est infini. En effet, si  $A$  a la propriété ci-dessus et  $H$  est un sous-groupe définissable quelconque qui découpe  $A$  dans  $n$  classes, alors pour chaque  $s$  dans  $S$ , le sous-groupe  $H^s$  (où l'on fait agir  $s$  sur les paramètres de  $H$ ) découpe  $A$  dans  $n$  classes aussi. Or, par la condition de Baldwin-Saxl 3.1.7, le sous-groupe  $H_S = \bigcap_{s \in S} H^s$ , qui est  $S$ -invariant, est définissable, en tant qu'intersection d'un nombre fini  $m$ . Or, la partie  $A$  se découpe dans (au plus)  $nm$  classes modulo  $H_S$ . Donc  $|A/H_S| = 1$  et de même  $|A/H| = 1$ .

Si  $A \cap B \neq \emptyset$  sont deux parties définissables indécomposables, alors  $A \cup B$  l'est aussi.

Un groupe  $G$  est *définissablement simple* si et seulement s'il n'a pas de sous-groupes définissables distingués propres.

**Corollaire 3.3.3.** Si  $G$  est définissablement simple, toute partie définissable infinie  $A$  stable par conjugaison est indécomposable.

**Lemme 3.3.4.** Si  $G$  est un groupe  $\omega$ -stable, alors toute partie définissable  $A$  s'écrit de façon unique, à permutation près, comme la réunion finie de sous-ensembles indécomposables maximaux disjoints (appelés les composants indécomposables de  $A$ ).

*Démonstration.* Si  $A$  est déjà indécomposable, il n'y a rien à faire. Sinon, il existe  $H_1 \leq G$  définissable qui découpe  $A$  dans un nombre fini non-trivial de classes, qui sont disjointes. Si chaque de ces parties  $A_i$  est maximal indécomposable, nous avons le résultat. Sinon, au moins une partie  $A_1$  est la réunion d'un nombre fini des classes modulo un sous-groupe définissable  $H_2$ , que l'on peut supposer  $H_2 \leq H_1$ . Par le corollaire 3.1.8, cette chaîne de sous-groupes doit s'arrêter, donc on trouve la décomposition cherchée, en regroupant les ensembles indécomposables dans des parties maximales indécomposables disjointes.

La décomposition  $A = \bigcup_1^n A_i$  est unique par la remarque 3.3.2. □

**Théorème 3.3.5** (Zilber). Si  $G$  est un groupe de rang de Morley fini, étant donnée une famille  $\{A_i\}_{i \in I}$  des parties définissables indécomposables, chacune contenant l'identité, alors le sous-groupe  $H$  engendré par la famille  $\{A_i\}_{i \in I}$  est définissable connexe, et engendré par un nombre fini de parties  $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ , avec  $m \leq \text{RM}(H) \leq \text{RM}(G)$ .

Si les parties  $\{A_i\}_{i \in I}$  sont indécomposables, mais elles ne contiennent pas l'identité, il suffit de considérer  $\{a_i^{-1} \cdot A_i\}_{i \in I}$ , avec  $a_i \in A_i$  pour chaque  $i \in I$ . En particulier, si  $A$  est indécomposable, le groupe engendré par  $A$  (ou  $A \cdot A^{-1}$ ) est définissable et connexe.

*Démonstration.* Soit  $B = A_{i_1} \cdot \dots \cdot A_{i_m}$ , avec  $\text{RM}(B)$  maximal parmi les produits finis des parties de la famille  $\{A_i\}_{i \in I}$ . Si  $H_1$  est un groupe définissable quelconque contenant chaque  $A_i$ , alors  $B \subset H_1$  et donc  $\text{RM}(B) \leq \text{RM}(H_1)$ . De plus, on a que  $\text{RM}(B) = \text{RM}(B \cdot A_i) = \text{RM}(A_i \cdot B)$  pour chaque  $i \in I$ .

Parmi les types qui entraînent la formule  $x \in B$ , prenons  $p$  de rang maximal et posons  $H = \text{Stab}(p)$ . Si l'on montre que  $p \vdash x \in H$ , alors  $\text{RM}(p) \leq \text{RM}(H)$ , donc  $H$  est forcément connexe et  $p$  est son générique principal, par le lemme 3.2.15.

Comme  $A_i$  est indécomposable, si  $A_{i_1}/H$  est infini, alors l'ensemble  $A_{i_1} \cdot B$  contiendrait une infinité des translatés de  $p$ , donc

$$\text{RM}(A_{i_1} \cdot B) > \text{RM}(p) = \text{RM}(B),$$

ce qui contredit la maximalité du rang de  $B$ . En particulier, l'ensemble  $A_{i_1}$  est dans une seule classe modulo  $H$ , qui doit être  $H$  même car  $A_{i_1}$  contient l'identité. De même pour  $A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$ , donc  $B \subset H$ . De plus, par le corollaire 3.2.7, le groupe  $H = B \cdot B$ , ce qui nous permet de conclure. □

**Corollaire 3.3.6.** *Un groupe  $G$  définissablement simple de rang de Morley fini est simple. De plus, étant donnée une classe de conjugaison non-triviale  $C$ , chaque élément de  $G$  s'écrit comme le produit d'au plus  $2\text{RM}(G)$  éléments de  $C$  ou leurs inverses.*

*Démonstration.* Puisque  $G^0$  est distingué, on peut supposer que  $G$  est infini et connexe du centre  $Z(G)$  trivial. Par le corollaire 3.3.3, si  $C = g^G$  est une classe de conjugaison non-triviale, alors  $C$  est infinie, puisque l'indice de  $C_G(g)$  dans  $G$  est infini. Donc, l'ensemble  $C \cup \{e_G\}$  est indécomposable, par la remarque 3.3.2. Le groupe engendré par  $C$  est non-trivial, définissable et distingué, donc égal à tout  $G$ .  $\square$

**Corollaire 3.3.7.** *Un groupe simple de rang de Morley fini est presque fortement minimal et  $\aleph_1$ -catégorique.*

*Démonstration.* Montrons d'abord que la théorie de  $G$  n'a pas de paires de Vaught. Soit  $X$  une partie infinie définissable de  $G$ . Par le lemme 3.3.4, on peut supposer que  $X$  est indécomposable. Fixons  $x_0$  dans  $X$ . Or, l'ensemble  $X' = x_0 \cdot X$  est aussi indécomposable et de même pour  $g \cdot X' \cdot g^{-1}$  pour chaque  $g \in G$ . En particulier, le groupe qu'ils engendrent est définissable et distingué, donc égal à tout  $G$ . En particulier, il existe  $g_1, \dots, g_n$ , avec  $n \leq 2\text{RM}(G)$  tels que  $G = (X')^{g_1} \dots (X')^{g_n}$ . Ceci doit rester vrai lorsque l'on passe à une extension élémentaire de  $G$ , donc la théorie de  $G$  n'a pas de paires de Vaught et est  $\aleph_1$ -catégorique, par le théorème 1.3.36.

Puisque  $G$  a d'ensembles définissables fortement minimaux, par le lemme 1.3.28, soit  $Y$  un tel ensemble, que l'on suppose toujours indécomposable. Puisque  $G = (Y')^{g_1} \dots (Y')^{g_n}$ , on conclut que  $G$  est presque fortement minimal.  $\square$

On finira par une observation, très naïve, qui sera néanmoins fort utile.

**Lemme 3.3.8.** *Tout monoïde associatif  $G$  non-vide stable simplifiable à gauche et à droite est un groupe.*

*Démonstration.* Si  $G$  est fini, puisque la multiplication pour un élément  $g$  est injective, elle doit être surjective. En particulier, il existe un élément  $e_g$  tel que  $g \cdot e_g = g$  ainsi qu'un inverse  $g^{-1}$  avec  $g \cdot g^{-1} = e_g$ .

Pour un élément quelconque  $h$ , on a que  $g \cdot h = g \cdot (e_g \cdot h)$ , on conclut que  $e_g$  est un élément neutre à gauche, qui est donc le seul. Par symétrie, on obtient un neutre à droite et ils doivent être égaux. On a bien un groupe.

Si  $G$  est infini et d'exposant non-borné, on considère un élément  $g$  d'ordre infini. Les paires  $(g^n, g^m)$  satisfont la formule  $\varphi(x, y) = x \neq y \wedge \exists z (y = x \cdot z)$ . Par stabilité, il existe  $n < m = n + r$  avec  $\varphi(g^n, g^m)$ . En particulier, pour un certain  $b \in G$ , on a  $g^n = g^{n+r} \cdot b$ . Si l'on pose  $e_g = g^r \cdot b$ , on conclut comme auparavant que  $G$  possède un neutre à gauche, qui l'est aussi à droite. De plus, l'inverse de  $g$  est  $g^{r-1} \cdot b$ . Pour  $h \in G$  quelconque, si les puissances de  $h$  sont toutes différentes, alors on conclut de la même façon que  $h^{-1}$  existe. Sinon, il existe  $k < p = k + s$  avec  $h^k = h^k \cdot h^s$ . Puisque  $h^k \cdot e_g = h^k$ , on a que  $h^s = e_g$ . L'inverse  $h^{-1} = h^{s-1}$ . Le monoïde  $G$  est bien un groupe.

Si l'exposant de  $G$  est borné, pour  $g \in G$ , on obtient  $g^n = g^m$  pour  $n < m$  et l'on conclut de la même façon l'existence d'un élément neutre et d'inverse.  $\square$

## 3.4 Orthogonalité, Régularité et Internalité

La partie suivante ne nécessite pas de la structure de groupe ambiante, mais que de la stabilité de la théorie  $T$ .

**Définition 3.4.1.** Les types stationnaires  $p$  et  $q$  (pas forcément sur le même ensemble de paramètres) sont *orthogonaux* si, chaque fois que l'on prend des extensions  $a \models p$  et  $b \models q$  non-déviantes sur le même ensemble de paramètres  $C$ , alors  $a \perp_C b$ . Le type  $p$  est *indifférent* du type partiel  $\Sigma$  (à paramètres sur l'ensemble des paramètres de  $p$ ) si chaque extension non-déviant de  $p$  est orthogonale à chaque complétion de  $\Sigma$ .

Un type stationnaire  $p$  est *régulier* s'il n'est pas algébrique et chacune de ses extensions non-déviantes est orthogonale à toute extension déviant de  $p$ .

Notons qu'une extension non-déviant d'un type régulier l'est aussi.

**Exemple 3.4.2.** Par les inégalités de Lascar, un type stationnaire de U-rang  $\omega^\alpha$  est orthogonal à la famille des types de U-rang strictement inférieur à  $\omega^\alpha$ . Il est en particulier régulier. De plus, si le type  $p$  a U-rang égal à

$$\sum_n^0 \omega^{\gamma_i} \cdot k_i,$$

où les  $m_i$  sont des entiers naturels et  $\gamma_n \geq \dots \geq \gamma_0 \geq 0$ , alors  $p$  n'est pas orthogonal à un certain type de U-rang  $\omega^{\gamma_0}$ .

**Remarque 3.4.3.** Deux types stationnaires  $p$  et  $q$  sont orthogonaux si et seulement si  $p(x) \cup q(y)$  détermine un seul type complet.

*Démonstration.* On suppose que  $p$  et  $q$  sont définis sur le même ensemble des paramètres. Si  $p$  et  $q$  sont orthogonaux, le lemme de Shelah 2.4.22 montre que le type  $\text{tp}(a, b)$ , où  $a \models p$  et  $b \models q$ , ne dépend pas du choix des réalisations.

De même, si  $p(x) \cup q(y)$  détermine un seul type complet, prenons  $a \models p$  et  $b \models q$  avec  $a \perp b$ . Alors ceci doit être vrai pour tout autre uple  $a' \models p$  et  $b' \models q$ , donc  $p$  et  $q$  sont bien orthogonaux.  $\square$

Dans une théorie superstable, il existe des types réguliers :

**Lemme 3.4.4.** Si  $M \subsetneq N$  sont des modèles saturés d'une théorie superstable et  $b \in N \setminus M$  est du rang  $U(b/M)$  minimal, alors  $\text{tp}(b/M)$  est régulier.

*Démonstration.* Sinon, il existe  $C \supset M$  et des réalisations  $b'$  et  $c'$  de  $p$  sur  $C$  avec  $b' \not\perp_C c'$ , où  $b' \perp_M C$  et  $c' \perp_M C$ . Par le caractère local de la déviation, on trouve  $A_0 \subset M$  et  $A_0 \subset C_0 \subset C$  d'ensembles petits tels que  $p$  (et donc  $\text{tp}(b'/C)$ ) ne dévie pas sur  $A_0$ , le type  $\text{tp}(c'/C)$  ne dévie pas sur  $C_0$  et  $b' \not\perp_{C_0} c'$ . Par saturation, on trouve  $D_0 \subset M$  avec  $D_0 \equiv_{\text{acl}^{\text{eq}}(A_0)} C_0$ . Puisque  $b \perp_{A_0} D_0$  et  $b' \perp_{A_0} C_0$ , le lemme de Shelah 2.4.22 nous donne que  $C_0 b' \equiv_{A_0} D_0 b$ . Soit  $c$  l'image de  $c'$  par cet automorphisme, que l'on peut supposer dans  $N$ .

Alors  $b \not\perp_{D_0} c$ , donc  $c \notin M$ , mais

$$U(c/M) \leq U(c/D_0) = U(c'/C_0) = U(c'/C) < U(c'/M) = U(b/M),$$

ce qui contredit la minimalité du  $U(b/M)$ .  $\square$

**Lemme 3.4.5.** Si  $p$  est un type sur  $A$  stationnaire et régulier, l'opérateur clôture

$$\text{cl}(a_1, \dots, a_n) = \{a \models p \mid a \not\perp_A a_1, \dots, a_n\}$$

définit une prégéométrie sur l'ensemble des réalisations de  $p$ . En particulier, si  $a, a_1, \dots, a_n$  sont des réalisations de  $p$  avec  $a \not\perp_A a_1, \dots, a_n$ , on peut supposer que  $a_1, \dots, a_n$  sont  $A$ -indépendants.

*Démonstration.* Le caractère fini de la déviation entraîne le caractère fini de l'opérateur. Comme  $p$  n'est pas algébrique, alors  $a \in \text{cl}(a)$  pour chaque  $a \models p$ , donc l'opérateur est réflexif.

Montrons qu'il est transitif, c'est qui équivaut à montrer que  $\text{cl}(\text{cl}(a_1, \dots, a_n)) \subset \text{cl}(a_1, \dots, a_n)$ . Soit  $a \in \text{cl}(\text{cl}(a_1, \dots, a_n))$ . Il existent donc  $b_1, \dots, b_m \in \text{cl}(a_1, \dots, a_n)$  avec

$$a \not\perp_A b_1, \dots, b_m.$$

Or, pour chaque  $i < m$ , on a que

$$b_i \not\perp_A a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{m-1}.$$

Donc, si  $a \notin \text{cl}(a_1, \dots, a_n)$ , alors la régularité de  $p$  donne que

$$a \perp_{A, a_1, \dots, a_n} b_1,$$

ce qui entraîne par récurrence que

$$a \perp_A b_1, \dots, b_m.$$

Il reste à montrer le principe de Steinitz : en effet, si  $a \not\perp_A a_1, \dots, a_n$  mais  $a \perp_A a_1, \dots, a_{n-1}$ , la transitivité donne  $a \not\perp_{A, a_1, \dots, a_{n-1}} a_n$ . Or, il suffit de montrer que

$$a_n \perp_A a_1, \dots, a_{n-1},$$

ce qui entraîne que

$$a_n \not\downarrow_A a, a_1, \dots, a_{n-1}.$$

Si  $a_n \not\downarrow_A a_1, \dots, a_{n-1}$ , alors l'extension non-déviante  $\text{tp}(a/A, a_1, \dots, a_{n-1})$  de  $p$  n'est pas orthogonale à l'extension déviante  $\text{tp}(a_n/A, a_1, \dots, a_{n-1})$  de  $p$ , ce qui contredit la régularité de  $p$ .  $\square$

**Définition 3.4.6.** Un type stationnaire  $p \in S(A)$  a *poinds* 1 si, pour tout ensemble  $B \supset A$  et toute réalisation  $a \models p$  non-déviante sur  $B$ , s'ils existent des uples  $c_1$  et  $c_2$  avec  $a \not\downarrow_B c_i$  pour  $i = 1, 2$ , alors  $c_1 \not\downarrow_B c_2$ .

Les types réguliers ont poinds 1 :

**Lemme 3.4.7.** *Tout type régulier dans une théorie superstable  $T$  a poinds 1.*

*Démonstration.* Soit  $p$  un type régulier sur  $A$ . Quitte à prendre une extension non-déviante, on peut supposer qu'il existe des uples  $c_1$  et  $c_2$  avec  $a \not\downarrow_A c_i$  pour  $i = 1, 2$ , où  $a \models p$ . Prenons une extension saturée  $M \supset Ac_1$  avec  $M \downarrow_{Ac_1} ac_2$ . Si  $c_1 \downarrow_A c_2$ , alors  $a \downarrow_{Ac_1} M$  et  $c_2 \downarrow_A M$ .

Soit  $\{a_i\}_{i < \omega}$  une suite de Morley du type  $\text{tp}(a/\text{acl}^{\text{eq}}(Ac_1))$  contenue dans  $M$ . Par le lemme 2.4.26, on a que  $a \downarrow_{A\{a_i\}_{i < \omega}} M$ , donc  $a \not\downarrow_A a_1, \dots, a_n$  pour un certain  $n < \omega$ . Par le lemme 3.4.5, on peut supposer que  $a_1, \dots, a_n$  sont  $A$ -indépendants. Notons que  $a_1, \dots, a_n \downarrow_A c_2$ , qui contredit la régularité de  $p$ , puisque  $a \not\downarrow_A c_2$ .  $\square$

**Corollaire 3.4.8.** *Si  $p, q$  et  $r$  sont des types stationnaires tels que  $q$  a poinds 1 et ni  $p$  et  $q$  sont orthogonaux ni  $q$  et  $r$  non plus, alors  $p$  et  $r$  ne sont pas orthogonaux. En particulier, la relation de non-orthogonalité entre des types réguliers est une relation d'équivalence.*

**Remarque 3.4.9.** Si  $p$  et  $q$  sont des types sur un modèle  $M$  d'une théorie dénombrable  $\omega$ -stable  $T$  tels qu'il existe  $b \models q$  dans  $M[p]$ , où  $M[p]$  dénote le modèle premier sur  $M \cup \{a\}$  avec  $a \models p$ , alors  $q$  et  $p$  ne sont pas orthogonaux.

Notons que  $M[p]$  existe, par le corollaire 1.3.7. De plus, le type  $q$  est réalisé dans  $M[p]$  si et seulement s'il est réalisé dans tout modèle  $N \supset M$  qui réalise  $p$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que, si  $\text{tp}(b/Ma)$  est atomique, étant donné un uple  $c$  avec  $c \downarrow_M a$ , alors  $b \downarrow_M c$ . Soit  $\models \theta(b, a)$ , où  $\theta$  est une formule sur  $M$  isolant  $\text{tp}(b/Ma)$ . Supposons que  $a \downarrow_M c$ . Nous allons montrer que  $\text{tp}(b/Mc)$  est un héritier de  $\text{tp}(b/M)$ , par le corollaire 2.3.34. Soit donc  $\varphi(x, y)$  une formule sur  $M$  avec  $\models \varphi(b, c)$ . Donc

$$\mathfrak{C} \models \exists x \left( \theta(x, a) \wedge \varphi(x, c) \right).$$

Puisque  $\text{tp}(a/Mc)$  est un héritier du  $\text{tp}(a/M)$ , il existe  $m \in M$  tel que

$$\mathfrak{C} \models \exists x \left( \theta(x, a) \wedge \varphi(x, m) \right),$$

Soit  $b'$  une réalisation de cette formule. Or, puisque  $b'$  réalise la formule  $\theta(x, a)$ , qui isole  $\text{tp}(b/Ma)$ , on conclut que  $b' \equiv_M b$ , ce qui nous permet d'en déduire que  $\varphi(b, m)$ .  $\square$

Par le lemme 1.2.14, une formule fortement minimale  $\varphi$  détermine un seul type non-algébrique  $p$ . On dira donc que le type stationnaire  $q$  n'est pas orthogonal à  $\varphi$  si  $q$  n'est pas orthogonal à  $p$ .

**Proposition 3.4.10.** *Soit  $T$  une théorie  $\omega$ -stable. S'il existe des formules fortement minimales  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  à paramètres sur le modèle premier telles que tout type régulier n'est pas orthogonal à une certaine  $\varphi_i$ , alors  $T$  a rang de Morley fini, qui est définissable et coïncide avec le rang  $U$ . Le rang de Morley est donc additif et  $T$  élimine  $\exists^\infty x$ .*

*Démonstration.* Quitte à nommer les paramètres, on peut supposer que les formules  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sont définissables sur  $\emptyset$ . On montrera par récurrence sur  $k$  les deux propriétés suivantes :

1. Si  $\text{RM}(a/A) \geq k + 1$  et  $\models \varphi_i(b)$  pour un certain  $i \leq n$ , alors  $\text{RM}(a/Ab) \geq k$ .
2. Si la suite des types  $\text{tp}(A_i a_i)$  converge vers  $\text{tp}(Aa)$  et  $\text{RM}(a_i/A_i) \geq k + 1$ , alors  $\text{RM}(a/A) \geq k + 1$ .

Si  $k = 0$ , il n'y a rien à démontrer pour (1). De même, si  $\text{RM}(a/A) = 0$ , témoigné par une formule qui rend  $a$  algébrique sur  $A$ , le même devrait être vrai à partir d'un certain  $i < \omega$ , donc on conclut (2). Supposons que les deux propriétés ont été démontrées pour tout  $m \leq k$ . Si  $\text{RM}(a/A) \geq k + 1$ , prenons un modèle  $\omega$ -saturé  $M \supset A$  avec  $M \downarrow_A a$ . En particulier, on a  $\text{RM}(a/M) = \text{RM}(a/A) \geq k + 1$ . Soit  $b$  avec  $\models \varphi_1(b)$ . Il suffit de montrer que  $\text{RM}(a/Mb) \geq k$ , puisque  $\text{RM}(a/Ab) \geq \text{RM}(a/Mb)$ . Si  $b \downarrow_M a$ , c'est évident. Sinon, puisque  $\text{RM}(b/Ma) = 0$ , il existe une formule  $\theta(x, a)$  sur  $M$  qui rend  $b$  algébrique. On peut supposer que  $\theta(x, a')$  est fini pour tout  $a'$ . Comme  $\text{RM}(a/Mb) \geq k + 1$ , le type  $\text{tp}(a/M)$  n'est pas isolé parmi les types (sur  $M$ ) du rang de Morley supérieur à  $k$ . Il existe donc une suite des types  $\text{tp}(a_i/M)$ , avec  $\text{RM}(a_i/M) \geq k$ , qui converge vers  $\text{tp}(a/M)$ . En particulier, pour  $i$  suffisamment large, la formule  $\theta(x, a_i) \wedge \varphi_1(x)$  est consistente, réalisée par  $b_i$ . Par compacité, on peut supposer que la suite  $\text{tp}(a_i b_i/M)$  converge : la limite est  $\text{tp}(a, c/M)$ , où  $c \equiv_{Ma} b$ , ce qui permet de supposer que  $c = b$ . Si  $b_i \in M$  pour  $i$  suffisamment large, alors  $\text{RM}(a_i/Mb_i) = \text{RM}(a_i/M) \geq k$ , donc  $\text{RM}(a/Mb) \geq k$ , par la propriété (2) et récurrence. Puisque  $a \not\downarrow_M b$ , on conclut que  $\text{RM}(a/Mb) \geq k$ .

Sinon, on peut supposer que chaque  $b_i \models \varphi_1$  a le même type sur  $M$  que  $b$ . Par automorphismes, on suppose que la suite  $\text{tp}(a_i/Mb)$  converge vers  $\text{tp}(a/Mb)$ . Par récurrence sur la propriété (1), on a  $\text{RM}(a_i/Mb) \geq k - 1$ , donc  $\text{RM}(a/Mb) \geq k$ . Ceci montre la récurrence pour (1).

Pour la propriété (2), on prend pour chaque  $i < \omega$ , un sous-modèle  $M_i \supset A$ , que l'on suppose indépendant de  $a_i$  sur  $A_i$ . De la suite  $\text{tp}(a_i M_i)$  on extrait une sous-suite convergent, avec limite  $\text{tp}(cM)$ , où  $M \supset A$ . Puisque  $c \equiv_A a$ , on peut supposer que la limite est  $\text{tp}(aM)$ . Comme  $a_i \notin \text{acl}(A_i)$ , alors l'extension  $M \subset M[a]$  est propre, donc il existe un type régulier  $q$ , par le lemme 3.4.4, qui n'est pas orthogonal à  $\text{tp}(a/M)$  par le corollaire ???. Or, le type  $q$  doit être non-orthogonal à un certain  $\varphi_i = \varphi_1$  et donc  $\varphi_1$  n'est pas orthogonal à  $\text{tp}(a/M)$  par le corollaire 3.4.8. Soit  $b \models \varphi_1$  avec  $b \not\downarrow_M a$ . En particulier, l'élément  $b \notin M$  mais il est algébrique sur  $Ma$ , témoigné par une formule  $\theta(x, a)$  sur  $M$  telle que  $\theta(x, a')$  est toujours fini pour tout  $a'$ . Par convergence, il existe  $b_i \models \theta(x, a_i) \wedge \varphi_1(x)$ . À nouveau, la suite  $\text{tp}(a_i b_i/M)$  converge vers  $\text{tp}(ab/M)$ . La récurrence sur (1) donne que  $\text{RM}(a_i/Mb_i) \geq k$  et donc  $\text{RM}(a/Mb) \geq k$ . Puisque  $a \not\downarrow_M b$ , on conclut que  $\text{RM}(a/A) \geq \text{RM}(a/M) \geq k + 1$ , ce qui montre la récurrence pour (2).

Voyons maintenant que le rang de Morley de  $T$  est fini : en effet, s'il avait un type de rang de Morley  $\omega$ , réalise par  $a$  sur un sous-modèle  $M$ , alors  $a \notin M$ , donc on trouve dans  $M[a]$  un type régulier, qui n'est pas orthogonal à une des formule  $\varphi_i$ . Comme auparavant, on conclut qu'il existe  $b \models \varphi_i$  avec  $b \not\downarrow_M a$ . Or, on a  $\text{RM}(a/Mb) = k < \omega$ . Puisque  $\text{RM}(a/M) = \omega \geq k + 2$ , ceci contredit la propriété (1). Le même argument montre que, pour tout type  $\text{tp}(a/M)$  du rang  $k + 1$ , il existe un  $b \models \varphi_i$  avec  $b \not\downarrow_M a$ . En particulier, le rang de Morley  $\text{RM}(a/Mb) = k$ , on a que  $\text{RM} \leq \text{U}$  et donc ils sont égaux, par la remarque 2.4.24.

Il reste à montrer que, pour toute formule  $\psi(x, y)$  et tout entier  $k$ , l'ensemble  $\{\text{tp}(a) \mid \text{RM}(\psi(x, a)) \geq k\}$  est un ouvert-fermé de  $S^T$ , ce qui donne la définissabilité du rang de Morley. La propriété (2) donne clairement qu'il est fermé, car il contient tous ses points d'accumulation. Voyons, par récurrence sur  $k$ , qu'il est ouvert. Étant donné  $\text{tp}(a)$  avec  $\text{RM}(\psi(x, a)) \geq k$ , si  $k = 0$ , clairement

$$\text{tp}(a) \vdash \exists x (\psi(x, y)).$$

Si  $k > 0$ , soit  $c \models \psi(x, a)$  avec  $\text{RM}(c/a) \geq k + 1$ . Par le même argument qu'auparavant, il existe (au-dessus des paramètres  $A$  contenant  $a$ ) un élément  $b \models \varphi_i$  tel que  $b \not\downarrow_A c$ , témoigné par une formule  $\theta$  (qui dépend de  $c$ ) telle que  $\theta(y, A', c')$  est toujours fini. Par compacité, il n'existe qu'un nombre fini des formules  $\theta$  possibles pour tout  $c \models \psi$ , que l'on dénote par une seule formule  $\theta$ . Or, par la propriété (1), le rang de Morley de  $\text{RM}(\psi(x, a) \wedge \theta(b, A, x)) \geq k$ , qui, par récurrence, donne un ouvert dans l'espace des types. En prenant une disjonction sur tous les uples  $A$  possibles, ceci détermine un ouvert pour  $\{\text{tp}(a) \mid \text{RM}(\psi(x, a)) \geq k\}$  □

**Définition 3.4.11.** Le type  $p$  est  $\Sigma$ -interne si toute réalisation de  $p$  est définissable, à l'aide des paramètres indépendants, sur un uple de réalisations de  $\Sigma$ . Si l'on a algébrique au lieu de définissable, on dira que  $p$  est presque  $\Sigma$ -interne.

Le type  $p \in S(A)$  est finiment engendré sur  $\Sigma$  s'il existe des paramètres  $B \supset A$  tels que toute réalisation de  $p$  est définissable sur  $B, c$ , où  $c$  est un uple des réalisations de  $\Sigma$ .

Le type  $p \in S(A)$  est  $\Sigma$ -analysable si toute réalisation de  $p$  est  $A$ -interalgébrique avec un uple  $a_0, \dots, a_n$  tel que chaque  $a_i$  est  $\Sigma$ -interne sur  $A, a_0, \dots, a_{i-1}$ .

**Exemple 3.4.12.** Dans un espace vectoriel  $V$  de dimension infinie sur un corps  $k$ , étant donné un opérateur linéaire, le type de l'espace non homogène  $L(x) = v$  est finiment engendré sur le type de l'espace homogène  $L(x) = 0$ .

Si l'on considère la théorie du pseudo-plan libre donné par un graphe de valence infinie sans cycles, qui est  $\omega$ -stable de rang de Morley  $\omega$ , prenons un modèle  $M$ . Le type de distance 2 de  $M$  est analysable par rapport à la famille de types à distance 1 de  $M$ . Il n'est pas interne à cette famille.

**Lemme 3.4.13.** *Le type stationnaire  $p \in S(A)$  est  $\Sigma$ -interne si et seulement s'il est finiment engendré sur  $\Sigma$ .*

*Démonstration.* Si  $p$  est finiment engendré sur  $\Sigma$ , il existe  $B \supset A$  tel que toute réalisation de  $p$  est définissable sur  $B$  et des réalisations de  $\Sigma$ . Étant donnée  $a \models p$ , soit  $a' \equiv_A a$  avec  $a' \downarrow_A B$ . En particulier, il existe un uple  $c$  des réalisations de  $\Sigma$  avec  $a' \in \text{dcl}(Bc)$ . Si  $B' \supset A$  est l'image de  $B$  par l'automorphisme qui envoie  $a'$  vers  $a$ , on conclut que  $a \downarrow_A B'$  et  $a \in \text{dcl}(B'c)$ , donc  $p$  est bien  $\Sigma$ -interne.

Si  $p$  est  $\Sigma$ -interne, pour  $a \models p$  il existe un uple  $b \downarrow_A a$  avec  $a \in \text{dcl}(bc)$ , où  $c$  est un uple des réalisations de  $\Sigma$ . Notons que si  $b' \models \text{tp}(b/A)$  est  $A$ -indépendant de  $a' \models p$ , alors  $a' \in \text{dcl}(b'c)$ , pour un uple  $c'$  des réalisations de  $\Sigma$ , par le lemme 2.4.22. Soit  $M \supset A$  un modèle suffisamment saturé et prenons une suite de Morley  $\{b_i\}_{i < |T|^+}$  dans  $M$  du type fort de  $b$  sur  $A$ . Si  $a \models p$  est une réalisation quelconque, le type  $\text{tp}(a/A\{b_i\}_{i < |T|^+})$  ne dévie pas sur un ensemble de taille au plus  $|T|$ , donc par transitivité, il existe  $i < |T|^+$  tel que  $b_i \downarrow_A a$ . On conclut que  $a \in \text{dcl}(Mc)$  pour un certain uple  $c$  des réalisations de  $\Sigma$ , donc  $p$  est finiment engendré sur  $\Sigma$ .  $\square$

**Lemme 3.4.14.** *Soit  $T$  une théorie superstable. Si le type stationnaire  $p \in S(A)$  n'est pas indifférent au type  $q$ , alors il existe, pour toute  $a \models p$ , un élément  $a_0 \in \text{acl}^{\text{eq}}(Aa) \setminus \text{acl}^{\text{eq}}(A)$  avec  $\text{tp}(a_0/A)$  qui est  $q$ -interne.*

*Démonstration.* Il existe  $C \supset A$  avec  $a \downarrow_A C$  et une réalisation  $b \models q$  telles que  $b \not\downarrow_{G_C} a$ . En particulier, on a  $a \not\downarrow_A bC$ . Nous pouvons donc supposer  $C$  fini. Posons  $a_0 = \text{Cb}(bC/\text{acl}^{\text{eq}}(Aa)) \in \text{acl}^{\text{eq}}(Aa) \setminus \text{acl}^{\text{eq}}(A)$ . Par le lemme 2.4.26, l'élément  $a_0$  est algébrique sur un segment fini d'une suite de Morley  $b_1C_1, \dots, b_nC_n$  du type fort de  $bC$  sur  $Aa$ . Par récurrence, on obtient que  $a \downarrow_A C_1 \cup \dots \cup C_n$ , donc le type  $\text{tp}(a_0/A)$  est  $q$ -interne.  $\square$

### 3.5 Analyses

Soit  $G$  maintenant un groupe  $\omega$ -stable, que l'on suppose suffisamment saturé.

**Proposition 3.5.1.** *Si  $G$  a rang de Morley fini, alors le rang de Morley est additif, définissable et coïncide avec le rang  $U$ .*

*Démonstration.* Il nous suffit de montrer que  $G$  satisfait les hypothèses de la proposition 3.4.10. Puisque  $G$  a rang de Morley fini, il existe un ensemble définissable fortement minimal  $\varphi_1$ , par le lemme 1.3.28, que l'on suppose indécomposable, par le lemme 3.3.4. Si  $a \models \varphi_1$ , le groupe  $G_1$  engendré par  $\{(a^{-1} \cdot \varphi_1)^g\}_{g \in G}$  est connexe, définissable et distingué dans  $G$ . Notons que  $G_1$  est presque fortement minimal. Si le quotient  $G/G_1$  n'est pas fini, on itère pour trouver un groupe connexe définissable distingué  $G_2 \subset G_1$ , tel que le quotient  $G_2/G_1$  est presque fortement minimal par rapport à la formule fortement minimale  $\varphi_2$ . Comme le rang de Morley augmente à chaque étape, on trouve une chaîne finie  $\{e_G\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$ , avec  $G_{i+1}/G_i$  presque fortement minimale par rapport à la formule fortement minimale  $\varphi_{i+1}$ .

Montrons que tout type unair non-algébrique stationnaire  $\text{tp}(a/A)$  dévie avec une réalisation d'une des formules  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , si l'on travaille dans l'expansion  $(G, \{c\}_{c \in C})$ , où l'on ajoute au langage les paramètres  $C$  nécessaires pour définir toutes les  $\varphi_{i+1}$ . Puisque  $\ulcorner a \cdot G \urcorner$  est algébrique sur  $A$ , on que  $a \downarrow_A \ulcorner a \cdot G \urcorner$ . En revanche, comme  $a \not\downarrow_A \ulcorner a \cdot G_0 \urcorner$ , il existe  $k$  minimal avec  $a \downarrow_A \ulcorner a \cdot G_k \urcorner$ . Donc  $\ulcorner a \cdot G_{k-1} \urcorner \notin \text{acl}^{\text{eq}}(A, \ulcorner a \cdot G_k \urcorner)$ , ce qui entraîne que l'ensemble  $a \cdot G_k$  n'est pas algébrique sur  $A$ . En particulier, si l'on prend  $b \in a \cdot G_k$  tel que  $\text{tp}(b/A, \ulcorner a \cdot G_k \urcorner)$  n'est pas algébrique et

$$b \downarrow_{A, \ulcorner a \cdot G_k \urcorner} \ulcorner a \cdot G_{k-1} \urcorner,$$

l'élément  $a \cdot b^{-1} \in G_k \setminus G_{k-1}$  est interalgébrique sur  $A, b, \ulcorner a \cdot G_k \urcorner$  avec  $a$ . Or, le quotient  $a \cdot b^{-1} \cdot (G_k/G_{k-1})$  est algébrique sur  $a \cdot b^{-1}$  et aussi algébrique sur un uple fini des réalisations de  $\varphi_k$ . Par transitivité, on conclut que  $\text{tp}(a/A)$  admet une extension non-déviant, qui dévie avec une réalisation générique de  $\varphi_k$ .

En particulier, étant donnée une formule sans paramètres  $\psi$ , l'ensemble des uples  $a$  tels que  $\psi(x, a)$  est infini est définissable dans la théorie  $(G, \{c\}_{c \in C})$ . Or, comme cet ensemble est invariant par tout automorphisme de  $G$ , alors il est définissable sans paramètres, par le lemme 1.1.10. La théorie de  $G$  élimine donc  $\exists^\infty x$ . Par la remarque 1.3.27, toute formule minimale est fortement minimale, ce qui entraîne par le même argument qu'auparavant que, si l'on se place à l'intérieur du modèle premier de  $G$ , il existe des formules minimales  $\varphi'_1, \dots, \varphi'_n$  tels que chaque quotient  $G_{i+1}/G_i$  est presque fortement minimale par rapport à  $\varphi_{i+1}$ . Elles sont bien fortement

minimales. On n'a plus besoin de considérer l'expansion  $(G, \{c\}_{c \in C})$  pour la définissabilité et additivité du rang de Morley.  $\square$

**Corollaire 3.5.2.** *Si  $G$  est un groupe de rang de Morley fini, étant donnés des ensembles définissables  $X$  et  $Y$  et une application surjective définissable  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $\text{RM}(f^{-1}(y))$  est constant, pour chaque  $y \in Y$ , alors*

$$\text{RM}(X) = \text{RM}(Y) + \text{RM}(f^{-1}(y)).$$

*En particulier, si  $H \leq G$  est un sous-groupe définissable, on a*

$$\text{RM}(G) = \text{RM}(H) + \text{RM}(G/H).$$

*Démonstration.* Pour  $x \in X$ , comme tous les rang son finis, l'inégalité de Lascar donne que  $U(x) = U(x, f(x)) = U(x/f(x)) + U(f(x))$ . Notons que  $x$  est interalgébrique sur  $f(x)$  avec tout autre élément de la fibre sur  $f(x)$ . Or, le rang de Morley est égal au rang de Lascar, par la proposition 3.5.1.  $\square$

**Proposition 3.5.3.** *Soit  $G$  un groupe  $\omega$ -stable tel que son générique principal  $p$  n'est pas orthogonal au type stationnaire  $q$ . Alors, il existe un sous-groupe distingué définissable  $K \triangleleft G$  d'indice infini tel que le quotient  $G/K$  est  $q$ -interne.*

*Démonstration.* Quitte à prendre d'extensions non-déviantes, on peut supposer que  $a \not\perp_M b$ , où  $M$  est un modèle saturé, avec  $p = \text{tp}(a/M)$  et  $q = \text{tp}(b/M)$ .

Soit  $D \subset M$  petit (algébriquement clos dans  $T^{\text{eq}}$ ) tel que  $a, b \perp_D M$  et posons

$$H = \{\xi \in G \mid a \equiv_{D,b} \xi \cdot a\},$$

qui est définissable par  $\omega$ -stabilité. Si l'on prends une réalisation  $c \models p \upharpoonright D$  dans  $M$ , l'élément  $c$  reste générique sur  $a, b, D$  et de même pour  $c \cdot a$ , par le corollaire 3.2.6. Donc  $c \equiv_{D,b} c \cdot a$ , mais clairement  $c \cdot a \not\equiv_{D,b} a$ , puisque  $a \not\perp_D b$ . Puisque  $c \in G^0$ , on conclut que  $H$  est d'indice infini dans  $G$ . Tout sous-groupe de  $H$  le sera aussi.

Soit maintenant  $\{a_i, b_i\}_{i < \omega} \subset M$  une suite de Morley du type  $\text{tp}(a, b/D)$  et  $h \perp_D a, b$  un générique dans  $M$  indépendant de la suite sur  $D$ . Par généricité, on a que  $\{a_i\}_{i < \omega} \equiv_{D,h} \{h \cdot a_i\}_{i < \omega}$ , donc ils existent  $b'_i$  tels que

$$\{a_i, b'_i\}_{i < \omega} \equiv_{D,h} \{h \cdot a_i, b_i\}_{i < \omega}.$$

Notons que la dernière suite est une suite de Morley du type  $\text{tp}(h \cdot a, b/D, h)$ , qui est aussi stationnaire et a  $\text{tp}(h \cdot a, b/M)$  comme extension non-déviantes.

Si  $h'$  est un élément de  $G$  dans  $M$ , on a que  $h \cdot H = h' \cdot H$  si et seulement si  $h^{-1} \cdot h' \in H$  si et seulement si  $a, b \equiv_D h^{-1} \cdot h' \cdot a, b$  si et seulement si  $a, b \equiv_M h^{-1} \cdot h' \cdot a, b$  si et seulement si  $h \cdot a, b \equiv_M h' \cdot a, b$ . En particulier, le paramètre canonique  $\ulcorner h \cdot H \urcorner$  est algébrique sur la base canonique du type  $\text{tp}(h \cdot a, b/M)$ , qui est elle définissable sur  $\{a_i, b'_i\}_{i < \omega}$ , par le lemme 2.4.26. En particulier, puisque  $h \perp_D \{a_i\}_{i < \omega}$ , le type de  $\ulcorner h \cdot H \urcorner$  sur  $D$  est  $q$ -interne. Donc tout générique de  $G/H$  est  $q$ -interne et de même pour tout générique de  $G/H^g$ , pour chaque  $g \in G$ . L'intersection  $K$  de tous les conjugués  $H^g$ , qui est distinguée dans  $G$ , reste définissable et est égale à un nombre fini  $H^{g_1} \cap \dots \cap H^{g_n}$ . Puisque la projection

$$\prod_1^n (G/H^{g_i}) \rightarrow G/K$$

est définissable, et tout élément de  $G/K$  est le produit de deux génériques, par le corollaire 3.2.7, le groupe  $G/K$  est aussi  $q$ -interne.  $\square$

Puisque tout type de rang de Morley fini n'est pas orthogonal à un certain type de U-rang 1, on obtient que :

**Corollaire 3.5.4.** *Si  $G$  est un groupe simple  $\omega$ -stable dont son générique principal n'est pas indifférent au type  $q$ , alors  $G$  est  $q$ -interne. En particulier, si  $G$  a rang de Morley fini, le groupe  $G$  est catégorique en cardinalité non-dénombrable.*

## 3.6 Groupes minimaux

**Définition 3.6.1.** Un groupe définissable infini  $G$  est *minimal* s'il n'admet pas de sous-groupes définissables infinis propres.

**Remarque 3.6.2.** Tout groupe connexe de rang de Morley 1 est minimal.

**Proposition 3.6.3** (Reinecke). *Un groupe  $\omega$ -stable minimal  $G$  est abélien.*

*Démonstration.* Supposons que  $G$  n'est pas abélien. Notons que  $G$  est connexe, donc centralisateur-connexe du centre fini. En particulier  $G/Z(G)$  est infini du centre trivial, par le lemme 3.1.13. Quitte à considérer ce dernier, on peut supposer que  $G$  est connexe sans centre. Si  $h \neq 1$ , alors  $C_G(h)$  est propre et donc fini. En particulier, l'ordre de  $h$  est borné. De plus, la correspondance

$$g \rightarrow g \cdot h \cdot g^{-1}$$

est à fibres finies, donc  $g$  et  $g \cdot h \cdot g^{-1}$  sont interalgébriques sur  $h$ . Si  $g \in G$  est générique sur  $h$ , on en déduit que la classe de conjugaison  $h^G$  est générique. Puisque  $G$  est connexe, donc il n'y a qu'un seul générique. En particulier, étant donné tout autre élément  $h_1 \neq 1$  dans  $G$ , sa classe de conjugaison  $h_1^G$  est aussi générique donc  $h^G = h_1^G$ . On conclut que  $G = g^G \cup \{1\}$  pour tout  $g \neq 1$ . Si l'on prend  $g$  d'ordre premier  $p$ , on en déduit que l'exposant de  $G$  est  $p > 2$ , puisque  $G$  n'est pas abélien. Comme  $g \neq g^{-1}$ , ils doivent être conjugués par un élément  $h$  de  $G$ . Or, si  $g^{-1} = h \cdot g \cdot h^{-1}$ , alors en conjuguant  $p$  fois par  $h$ , on conclut que  $g = h^p \cdot g \cdot (h^{-1})^p = g^{(-1)^p} = g^{-1}$ , ce qui donne une contradiction.  $\square$

**Corollaire 3.6.4.** *Si  $G$  est un groupe  $\omega$ -stable minimal, alors soit il est divisible abélien de  $n$ -torsion finie pour tout entier  $n$ , soit il est abélien d'exposant  $p$ , et donc il est isomorphe à un espace vectoriel de dimension infinie sur  $\mathbb{F}_p$ .*

*Démonstration.* Pour chaque nombre premier  $p$ , l'application

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow G \\ g &\rightarrow g^p \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes définissable, par la proposition 3.6.3. Si la  $p$ -torsion de  $G$  est finie pour tout  $p$ , alors l'image  $\varphi(G)$  est tout  $G$ , qui est donc divisible.

Sinon, il existe un nombre premier  $p$  tel que la  $p$ -torsion  $\ker(\varphi)$  est infinie et donc égale à  $G$  tout entier.  $\square$

**Corollaire 3.6.5.** *Un groupe de rang de Morley 1 est abélien-par-fini. Un groupe de rang de Morley fini admet un sous-groupe abélien définissable infini.*

*Démonstration.* Si  $G$  a rang de Morley fini, soit  $H$  un sous-groupe définissable infini de rang de Morley minimal. Sa composante connexe est définissable et minimale, par le corollaire 3.5.2, donc abélienne.  $\square$

Un élément non-trivial d'ordre 2 d'un groupe  $G$  s'appelle une *involution*. Le résultat suivant se démontre de façon analogue :

**Lemme 3.6.6.** *Si le groupe  $G$  connexe de rang de Morley fini n'a pas d'involutions, alors tout élément de  $G$  a un centralisateur infini.*

*Démonstration.* Supposons que  $g \in G$  a centralisateur fini, donc il est d'ordre fini. En particulier, la classe de conjugaison  $g^G$  contient un élément générique, et de même pour celle de  $g^{-1}$ . La connexité de  $G$  donne que  $g^G = (g^{-1})^G$ , donc  $g^{-1} = h \cdot g \cdot h^{-1}$ . C'est facile à voir que  $h^2 \in C(g)$ , qui est fini, donc  $h$  est d'ordre fini  $n$  (impair) aussi. En conjuguant  $n$  fois par  $h$ , on conclut que  $g = g^{-1}$ , ce qui donne que  $g$  est une involution.  $\square$

# Chapitre 4

## Corps $\omega$ -stables

### 4.1 Théorème de Macintyre et minimalité

De la même façon que dans la preuve du corollaire 3.3.7, on montre :

**Lemme 4.1.1.** *Un corps infini  $K$  de rang de Morley fini n'a pas de paires de Vaught, est presque fortement minimal, et donc  $\aleph_1$ -catégorique.*

En particulier, le rang de Morley est additif, par le lemme 2.1.6 et définissable, par la proposition 3.4.10.

*Démonstration.* Prenons une partie indécomposable infinie  $A$  de  $K$  contenant 0. Le sous-groupe engendré par  $\lambda \cdot A$ , où  $\lambda$  parcourt  $K$ , est un idéal définissable de  $K$ , qui doit donc être égal à  $K$ . On conclut que, pour toute partie définissable infinie  $\varphi$ , ils existent  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et  $a \models \varphi$  tels que

$$K = \lambda_1(\varphi(x) - a) + \dots + \lambda_n(\varphi(x) - a),$$

donc  $K$  est presque fortement minimal. □

**Lemme 4.1.2.** *Un corps  $\omega$ -stable infini  $K$  est additivement et multiplicativement connexe. Son générique additif l'est multiplicatif aussi.*

En particulier, la notion de *générique* de  $K$  a un sens, sans devoir préciser l'opération.

*Démonstration.* Notons que la multiplication par un élément de  $K^*$  est un isomorphisme additif. En particulier, la composante connexe de  $K^+$  est un idéal différent de 0, car le corps est infini. Donc  $K$  est additivement connexe. Si  $p$  est son générique additif, il entraîne la formule  $x \neq 0$ . En particulier, on a que  $a \cdot p = p$  pour tout  $a \neq 0$ . Comme  $K^*$  agit sur ses types génériques, le type  $p$  est forcément multiplicativement générique et donc  $K^*$  est aussi connexe. □

**Remarque 4.1.3.** La  $\omega$ -stabilité s'avère fondamentale, puisque  $\mathbb{R}^{\geq 0}$  est un sous-groupe multiplicatif de  $R^*$  d'indice 2. Par contre, le corps des nombres réels (comme tout corps de caractéristique 0) est additivement connexe, par la remarque 3.1.10

**Théorème 4.1.4** (Macintyre). *Un corps  $\omega$ -stable infini est algébriquement clos.*

*Démonstration.* Par le lemme 4.1.2, le corps  $\omega$ -stable  $K$  est additivement et multiplicativement connexe. Or, si  $a$  est le générique de  $K$ , l'élément  $a^n$  est interalgébrique avec  $a$  et donc son rang de Morley est  $\text{RM}(K)$ . Le sous-groupe  $(K^*)^n$  contient un générique, et donc il est d'indice fini. En particulier, le corps  $K$  est parfait. Si  $\text{car}(K) = p$  et  $\alpha$  est une racine de l'équation  $x^p - x = a$ , les autres racines sont de la forme  $\alpha + i$ , où  $i \in \mathbb{F}_p$ . De façon analogue, on conclut que tout élément de  $K$  s'écrit de la forme  $a^p - a$  pour un certain  $a \in K$  : le corps  $K$  n'a pas d'extension d'Artin-Schreier. Ces propriétés sont vraies pour tout corps  $\omega$ -stable, et donc, par interprétation, sont aussi vraies pour toute extension algébrique finie de  $K$ .

Pour montrer que  $K$  est algébriquement clos, il suffit de montrer que  $K$  n'a pas d'extensions algébriques propres. Si  $K \subset L$  est une telle extension de degré  $n$ , que nous supposons Galoisienne, soit  $p$  un nombre premier divisant  $n$ . Puisque  $K$  est parfait, il est séparable. Il existe alors un sous-corps  $K' \supset K$  avec  $[L : K'] = p$ . Si  $p \neq \text{car}(K)$ , alors soit  $K'$  contient une racine primitive  $p$ -ième de l'unité, et l'extension  $L : K'$  est de Kummer,

ce qui contredit la discussion précédente, soit l'on peut considérer l'extension  $K'(\xi) : K'$  obtenue en ajoutant une telle racine. Cette extension est d'ordre premier à  $p$ , et donc linéairement disjointe de  $L$  sur  $K'$ . On conclut que l'extension  $L(\xi) : K(\xi)$  est de Kummer, ce qui donne une contradiction. Si  $p = \text{car}(K)$ , alors l'extension  $L : K'$  est d'Artin-Schreier, ce qui est impossible aussi, puisque  $K'$ , étant  $\omega$ -stable aussi, n'en a pas.  $\square$

Nous allons donner une deuxième preuve du théorème de Macintyre, où la notion du type générique sera fortement utilisée :

*Démonstration.* Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , prenons des éléments génériques indépendantes  $x, a_1, \dots, a_{n-1}$  du corps  $\omega$ -stable  $K$ . Puisque l'élément

$$a_0 = -x^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i$$

est interalgébrique avec  $x$  sur  $a_1, \dots, a_{n-1}$ , l'uplet  $a_0, \dots, a_{n-1}$  est aussi un  $n$ -uplet générique, dont par construction, le polynôme  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$  a une racine dans  $K$ , par construction. Par le lemme 4.1.2, le corps  $K$  est connexe, donc il n'existe qu'un seul type générique en  $n$  variables. Il suit que tout polynôme unitaire sur  $K$  à coefficients génériques indépendants a aussi une racine sur  $K$ .

Nous allons maintenant transformer tout polynôme unitaire en un polynôme à coefficients génériques indépendants. Soit donc  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$  un polynôme unitaire irréductible sur  $K$  sans racines sur  $K$ . En particulier, le degré  $n > 1$ . La connexité de  $K$  entraîne qu'il est parfait, donc  $f$  a  $n$  racines distinctes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . L'extension  $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est donc Galois sur  $K$ . Puisque  $L$  est interprétable dans  $K$ , le corps  $L$  est aussi  $\omega$ -stable.

Considérons  $t_0, \dots, t_{n-1}$  des éléments génériques dans  $K$  indépendants sur  $a_0, \dots, a_{n-1}$ . Soit  $A$  la matrice inversible

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

et  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  le seul vecteur de  $L^n$  tel que

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Si  $b_0, \dots, b_{n-1}$  notent les fonctions symétriques de l'ensemble  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ , alors elles sont des éléments de  $K$ . C'est simple à voir, travaillant dans  $L$ , que l'uplet  $(b_0, \dots, b_{n-1})$  est interalgébrique avec l'uplet  $(t_0, \dots, t_{n-1})$  sur  $\text{acl}(a_0, \dots, a_{n-1})$ . En particulier, le polynôme  $g$  à coefficients  $(b_0, \dots, b_{n-1})$  a une racine dans  $K$ , disons  $\beta_1$ . Cela contredit l'irréductibilité de  $f$ , puisque  $\alpha_1$  satisfait donc une équation non-triviale sur  $K$  de degré  $n - 1$ .  $\square$

**Définition 4.1.5.** Un anneau de division  $D$  est un anneau (non-trivial) tel que tout  $x \in D \setminus \{0\}$  admet un inverse multiplicatif. La multiplication de  $D$  n'est pas forcément commutative.

**Corollaire 4.1.6.** Un anneau de division  $D$  de rang de Morley fini est commutatif. Soit il est un corps fini, soit il est un corps algébriquement clos.

Le théorème de Wedderburn énonce que tout anneau de division fini est un corps. Si  $D$  est un anneau de division, alors son centre  $Z(D) = \{x \in D \mid x \cdot y = y \cdot x \ \forall y \in D\}$  est un sous-corps et  $D$  est une algèbre sur  $K = Z(D)$  sans idéaux propres non-triviaux. Si la dimension de  $D$  sur  $K$  est finie, ceci est un exemple d'une algèbre centrale simple sur  $K$ . Toute algèbre centrale simple sur  $K$  est isomorphe à  $\text{Mat}_n(D)$  pour un anneau de division  $D$  du centre  $K$ . Deux algèbres centrales simples sur  $K$  sont Brauer équivalentes si et seulement si leur anneaux de division sont isomorphes. Le produit tensoriel induit une loi de groupe sur l'ensemble d'algèbres centrales simples, dont la classe de  $\text{Mat}_n(K)$  est l'élément neutre. Ce groupe s'appelle le groupe de Brauer, qui est toujours un groupe de torsion. Si  $K$  est algébriquement clos ou un corps fini, son groupe de Brauer est trivial.

*Démonstration.* Si  $D$  est fini, c'est exactement le théorème de Wedderburn. Si  $D$  est infini, prenons un contre-exemple de rang et degré minimaux. En particulier, tout sous-anneau non-trivial définissable propre de  $D$  est un corps, par le lemme 3.3.8. Le centre de  $D$  est soit fini, soit un corps algébriquement clos  $K$ , par le théorème 4.1.4. Ce dernier cas n'est pas possible, parce que  $D$  a forcément dimension fini sur  $K$ , par la finitude du rang et donc  $D$  serait isomorphe à  $K$ , puisque le groupe de Brauer de  $K$  est trivial et  $\text{Mat}_n(K)$  contient des sous-anneaux qui ne sont pas de corps, si  $n \neq 1$ .

Alors, le centre  $Z(D)$  est un corps fini et la dimension de  $D$  sur  $Z(D)$  est infinie. Par le corollaire 3.6.5, il existe un sous-groupe  $A \leq D^*$  abélien infini, qui doit contenir alors un élément  $a$  non-central. Or  $A \subset C_D(a) \subsetneq D$ , donc  $L = C_D(a)$  est un corps infini algébriquement clos. La finitude du rang donne que la dimension de  $D$  sur  $L$  est finie. À nouveau, on conclut que  $D$  était commutatif.  $\square$

**Corollaire 4.1.7.** *Un corps infini  $K$  de rang de Morley fini n'a pas de sous-anneau définissable infini propre.*

*Démonstration.* Si  $R$  est un sous-anneau définissable infini propre de  $K$ , il doit être un sous-corps, par le lemme 3.3.8, puisque  $R$  n'a pas de diviseurs de zéro. En particulier, il est algébriquement clos aussi. L'extension  $R \subset K$  doit contenir un élément transcendant sur  $R$ . Donc le corps  $K$  contient une copie de l'anneau des polynômes  $R[T]$ . Puisque l'ensemble des polynômes de degré borné par  $d$  est définissablement isomorphe à  $R^{d+1}$ , on conclut que  $\text{RM}(K) \geq d \text{RM}(R)$  pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , ce qui contredit la finitude du rang de Morley, si  $\text{RM}(R) \neq 0$ .  $\square$

**Corollaire 4.1.8.** *Un corps infini de rang de Morley fini et caractéristique 0 est additivement minimal : le seul sous-groupe définissable propre  $H \leq K^+$  est le sous-groupe trivial 0. Toute homomorphisme additive définissable de  $K^n$  dans  $K^m$  est linéaire. En particulier, le groupe d'endomorphismes définissables  $\text{End}(K^+)$  est isomorphe à  $K^*$ .*

*Démonstration.* Si  $H \leq K^+$  est un sous-groupe propre définissable, le sous-ensemble  $R = \{\lambda \in K \mid \lambda \cdot H \subset H\}$  est un sous-anneau infini de  $K$  contenant  $\mathbb{Z}$ , puisque la caractéristique est 0. Par le corollaire 4.1.7, il suit que  $H$  est un idéal et donc  $H = 0$ .

Si  $\varphi$  est un homomorphisme additive définissable de  $K^n$  dans  $K^m$ , l'ensemble  $\{\lambda \in K \mid \varphi \circ \lambda = \lambda \circ \varphi\}$  est un sous-groupe additif définissable contenant  $\mathbb{Z}$ , donc égal à tout  $K$ , ce qui montre la linéarité de  $\varphi$ .  $\square$

**Remarque 4.1.9.** En caractéristique positive  $p$ , il existe (même une quantité non-dénombrable) des corps de rang de Morley 2 ayant des sous-groupes additifs de rang 1, construits par une méthode d'amalgamation à la Hrushovski [2]. Le sous-groupe multiplicatif d'un corps de rang de Morley fini en caractéristique 0 n'est pas forcément minimal [1]. En revanche, en caractéristique positive, c'est probablement le cas [11], si l'on accepte qu'il existe une infinité des nombres premiers de la forme  $\frac{p^n-1}{p-1}$ , pour  $p$  fixé et  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corollaire 4.1.10.** *Un corps infini de rang de Morley fini et caractéristique 0 n'a pas d'automorphismes définissables non-triviaux. En caractéristique positive, tout automorphisme définissable d'un corps infini de rang de Morley fini l'est sans paramètres. Le groupe d'automorphismes définissables est commutatif et l'on peut le voir comme un sous-groupe de  $\hat{\mathbb{Z}}$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\text{End}(K^+) \simeq K^*$ , par le corollaire 4.1.8, la première affirmation est immédiate.

Posons  $Q$  la clôture algébrique (algebro-théorique) du corps premier du corps de rang de Morley fini  $K$ . Puisque  $K$  n'a pas de sous-anneaux définissables propres, tout automorphisme définissable est déterminé par son action sur  $Q$ . Le groupe d'automorphismes de ce dernier est  $\hat{\mathbb{Z}}$ , donc on conclut que le groupe d'automorphismes définissables de  $K$  est commutatif. Si  $\varphi$  est un automorphisme définissable de  $K$ , son graphe est un ensemble définissable de  $K \times K$  et donc, par compacité, l'automorphisme  $\varphi$  est déterminé par son action sur un corps fini. En particulier, il est une puissance du Frobenius et donc définissable sans paramètres.  $\square$

**Corollaire 4.1.11.** *Tout groupe définissable d'automorphismes définissables d'un corps de rang de Morley fini est trivial.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe définissable d'automorphismes définissables d'un corps de rang de Morley fini  $K$ . Si  $\varphi \in G$  n'est pas trivial, alors aucune puissance de  $\varphi$  l'est, car  $G$  est sans torsion par le corollaire 4.1.10. Par le corollaire 4.1.7, le corps fixé  $\text{Fix}(\varphi)$  de  $\varphi$  doit être fini. La correspondance de Galois nous donne que le corps fixé  $\text{Fix}(\varphi^2)$  est une extension quadratique de  $k_1$ , et en général, le corps fixé  $\text{Fix}(\varphi^{2^n})$  est une extension quadratique de  $\text{Fix}(\varphi^{2^{n-1}})$ . En particulier, leur taille de est finie mais arbitrairement large, ce qui entraîne que  $K$  n'élimine pas  $\exists^\infty x$  pour la formule  $x \in \text{Fix}(g) \wedge g \in G$ . Ceci contredit le lemme 1.3.17, puisque  $K$  n'a pas de paires de Vaught par le lemme 4.1.1,  $\square$

## 4.2 Groupes de rang petit

Comme les groupes divisibles sont exactement les objets injectifs dans la catégorie des groupes abéliens, on a le résultat suivant :

**Théorème 4.2.1** (Hall). *Pour tout sous-groupe divisible  $D$  d'un groupe abélien  $G$ , il existe un sous-groupe  $B$  tel que  $G = D \oplus B$ .*

**Définition 4.2.2.** Un sous-groupe  $H \leq G$  est *caractéristique* dans  $G$  s'il est invariant par tout automorphisme de  $G$ .

**Théorème 4.2.3** (Macintyre). *Si  $G$  est un groupe abélien de rang de Morley fini, il existe des sous-groupes caractéristiques définissables  $D$  et  $B$  tels que  $G = D + B$ , où  $D$  est divisible, le groupe  $B$  est d'exposant borné et  $D \cap B$  est finie.*

*Démonstration.* Par le corollaire 3.1.8, le sous-groupe  $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n!]G = [n_0!]G$  est définissable et caractéristique, où  $[n]G$  dénote l'image de la multiplication par  $n$ . Il est clairement divisible, donc par le théorème 4.2.1, il existe un complément  $K$  avec  $G = D \oplus K$ . En particulier, le sous-groupe  $K$  a exposant borné par  $n_0!$ , même s'il n'est pas forcément définissable. Posons donc  $B = \{g \in G \mid n_0!g = 0_G\}$ , qui est clairement définissable et d'exposant borné contenant  $K$ , donc  $G = D + B$ .

Puisque  $D$  est divisible, alors, par le corollaire 3.5.2, sa  $p$ -torsion doit être finie pour chaque  $p$ , donc  $D \cap B$  est finie aussi.  $\square$

**Lemme 4.2.4.** *Si  $G$  est un groupe de rang de Morley fini, étant donné une sous-partie  $X \subset G$ , il existe une enveloppe définissable  $\langle X \rangle_{\text{def}}$  de  $X$ , le plus petit sous-groupe définissable de  $G$  contenant  $X$ . De plus, si  $X = \{g\}$  consiste d'un seul élément, alors  $\langle g \rangle_{\text{def}} = D + B$ , où  $D$  est abélien divisible et  $B$  est un sous-groupe fini, et donc définissable, engendré par un élément d'ordre fini.*

L'existence des enveloppes définissables est vraie, dans le cas stable, due à Wagner. L'enveloppe définissable de  $X$  satisfait les mêmes propriétés génériques que  $X$ .

*Démonstration.* Par le corollaire 3.1.8, l'intersection  $\langle X \rangle_{\text{def}} = \bigcap_{X \subset H \leq G} H$  est définissable. Si  $X = \{g\}$ , puisque  $g \in Z(C_G(g))$ , qui est abélien, alors  $\langle g \rangle_{\text{def}}$  doit l'être aussi. Par le théorème 4.2.3, il existe un sous-groupe divisible définissable  $D \leq \langle g \rangle_{\text{def}}$  et un sous-groupe définissable  $K$  d'exposant borné avec  $\langle g \rangle_{\text{def}} = D + K$ . En particulier, l'élément  $g = d + b$ , pour certains  $d \in D$  et  $b \in K$  d'ordre fini. Or  $g \in D + \langle b \rangle$ , qui est donc définissable et égal à l'enveloppe de  $g$ .  $\square$

**Corollaire 4.2.5.** *Si  $G$  a rang de Morley fini et  $H \trianglelefteq G$  est un sous-groupe définissable distingué tel qu'il existe  $g \in G \setminus H$  et  $p$  un nombre premier avec  $g^p \in H$ , alors le translaté  $g \cdot H$  contient un élément d'ordre  $p^t$ , pour un certain  $t$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 4.2.4, l'enveloppe définissable  $\langle g \rangle_{\text{def}} = D \cdot \langle s \rangle$ , où  $D$  est divisible et  $s$  est d'ordre fini  $n$ . Notons que  $D$  est donc  $p$ -divisible. L'indice de  $H$  dans le groupe  $\langle H, g \rangle$  engendré par  $H$  et  $g$  est  $p$ , donc  $D \leq H$  et  $g \cdot H = s \cdot H$ . Notons que  $s \notin H$  mais  $s^p \in H$  aussi. Si  $p$  et  $n$  sont premier entr'eux, alors  $s \in \langle s^p \rangle \leq H$  et donc  $g \in H$ . Alors  $n = p^t m$ , où  $(p, m) = 1$ . Par Bezout, on trouve des entiers  $k$  et  $r$  avec  $1 = pk + mr$ . Soit  $y = s^{mr}$ . Clairement  $y^{p^t} = 1$ . Puisque  $s^{-1} \cdot y = s^{mr-1} = s^{pk} = (s^p)^k$  appartient à  $H$ , alors l'élément  $y$  donne le résultat souhaité.  $\square$

**Définition 4.2.6.** Étant données deux sous-parties  $X$  et  $Y$  d'un groupe  $G$ , l'on pose  $[X, Y]$  le groupe engendré par les commutateurs  $[x, y]$ , où  $x \in X$  et  $y \in Y$ . Notons que si  $X$  et  $Y$  sont des parties distinguées dans  $G$ , alors  $[X, Y]$  l'est aussi.

En particulier, le *dérivé*  $G'$  de  $G$  se définit comme  $[G, G]$ . Il est le plus petit sous-groupe distingué  $H$  de  $G$  tel que  $G/H$  est abélien.

On définit la *série dérivée*

$$G = G^{(0)} \supseteq G' \supseteq \dots \supseteq G^{(n)} \dots,$$

où  $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}] = (G^{(n)})'$ . De même, la *série centrale descendante* est

$$G = G_0 \supseteq G' = G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n \dots,$$

où  $G_{n+1} = [G, G_n] \geq G^{(n+1)}$ .

Notons que chaque quotient  $G^{(n)}/G^{(n+1)}$  est abélien et  $G_n/G_{n+1}$  est central dans  $G/G_{n+1}$ . Le groupe  $G$  est *résoluble* s'il existe un  $n$  avec  $G^{(n)} = 1$ . Il est *nilpotent* s'il existe un  $n$  avec  $G_n = 1$ .

Tout groupe nilpotent est résoluble. La résolubilité se transfère aux suites exactes : si

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow G/H \rightarrow 1,$$

alors  $G$  est résoluble si et seulement si  $H$  et  $G/H$  le sont aussi. Si  $G$  est nilpotent, alors  $H$  et  $G/H$  le sont aussi.

**Lemme 4.2.7.** *Si  $H$  est un sous-groupe connexe définissable d'un groupe  $G$  de rang de Morley fini et  $X \subset G$  est une partie quelconque (pas nécessairement définissable), alors le groupe  $[H, X]$  est définissable et connexe. En particulier, si  $G$  est connexe, son dérivé et chaque membre de la série dérivée ou centrale descendante sont définissables et connexes.*

*Démonstration.* Pour  $x \in X$ , l'ensemble  $H_x = \{h^{-1} \cdot x \cdot h\}_{h \in H}$  est indécomposable : en effet, par la remarque 3.3.2, il suffit de considérer le nombre de classes modulo un sous-groupe  $K \leq G$  normalisé par  $H$ . Or, les éléments  $h^{-1} \cdot x \cdot h$  et  $h_1^{-1} \cdot x \cdot h_1$  sont dans la même classe modulo  $K$  si et seulement si  $h$  et  $h_1$  sont dans la même classe modulo  $F = \{h \in H \mid h^{-1} \cdot x \cdot h \in x \cdot K\} \leq G$ . Puisque  $H$  est connexe, le nombre de classes  $H/F$  est soit infini soit 1.

L'ensemble  $x^{-1} \cdot H_x$  est aussi indécomposable et contient l'identité. Le groupe engendré par la famille  $\{x^{-1} \cdot H_x\}_{x \in X}$  coïncide avec  $[H, X]$ . □

**Corollaire 4.2.8.** *Si  $G$  est un groupe de rang de Morley fini connexe, son hypocentre  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$  ainsi que son hypercentre  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n(G)$  sont définissables.*

*Démonstration.* Puisque chaque  $G_n$  est définissable, l'hypocentre l'est aussi par le corollaire 3.1.8. Pour l'hypercentre, comme  $\text{RM}(G) < \omega$ , il existe un  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $Z_{n+1}/Z_n$  est fini. Par le lemme 3.1.13, on a  $Z_{n+1} = Z_{n+2} = Z_{n+k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . □

**Définition 4.2.9.** Si  $G$  est un groupe, un *Borel* de  $G$  est un sous-groupe  $B \leq G$  définissable connexe infini résoluble et maximal avec ces propriétés.

**Remarque 4.2.10.** Si  $B \leq G$  est un Borel, alors  $[N_G(B) : B]$  est fini.

*Démonstration.* Sinon, le groupe  $N_G(B)/B$  serait infini. Il contient donc un sous-groupe abélien définissable, par le corollaire 3.6.5. Sa préimage donne un sous-groupe résoluble  $B'$  de  $G$  contenant  $B$  avec  $[B' : B]$  infini, ce qui contredit la maximalité de  $B$ . □

**Proposition 4.2.11.** *Un groupe connexe de rang de Morley 2 est résoluble.*

*Démonstration.* Supposons que  $G$  est un groupe de rang de Morley 2 connexe non-résoluble. En particulier, le centre de  $G$  est fini. Sinon, le groupe  $Z(G) \neq G$  est infini et de même pour  $G/Z(G)$ , qui est connexe du rang 1, donc abélien, par la remarque 3.6.2. En particulier, le groupe  $G$  serait bien résoluble. En considérant  $G/Z(G)$ , on peut supposer que  $G$  n'a pas de centre, par le lemme 3.1.13.

Montrons d'abord que  $G$  est simple, ce qui par le corollaire 3.3.6 suit du fait que  $G$  est définissablement simple : en effet, si  $N \triangleleft G$  est un sous-groupe distingué définissable propre non-trivial, il doit être infini, par le corollaire 3.1.11. La composante connexe  $N^0$  est aussi infinie et distinguée dans  $G$ , car  $N^0$  est caractéristique dans  $N$ . Comme  $N^0$  et  $G/(N^0)$  ont rang 1, ils sont abéliens, par la remarque 3.6.2. La suite

$$1 \rightarrow N^0 \rightarrow G \rightarrow G/(N^0) \rightarrow 1$$

contredit la non-résolubilité de  $G$ .

Par le corollaire 3.6.5, le groupe  $G$  a un sous-groupe définissable abélien infini  $B$ , que l'on peut supposer connexe. Il est clairement de rang 1, donc il est un sous-groupe de Borel de  $G$ . Si  $B_1$  est un autre sous-groupe de Borel différent de  $B$ , montrons que  $B \cap B_1$  est triviale. Sinon, comme le groupe  $B$  est abélien, alors  $B$  centralise cette intersection :  $B \subset C(B \cap B_1)$ . De même pour  $B_1$ . Si  $B \neq C(B \cap B_1)^0$ , alors  $B \cap B_1$  serait centrale dans  $G$  et donc triviale, car  $G$  n'a pas de centre. En particulier  $B = C(B \cap B_1)^0 = B_1$ . Puisque tout conjugué de  $B$  est encore un Borel, on conclut que les conjugués de  $B$  sont en correspondance avec  $G/N_G(B)$ . Par la remarque 4.2.10, l'indice  $[N_G(B) : B]$  est fini, donc  $B$  a une infinité de conjugués.

L'ensemble

$$B^G = \{b^g\}_{\substack{b \in B \\ g \in G}} = \bigcup_{g \in G/N_G(B)} B^g,$$

est une réunion disjointe, par la discussion précédente. Comme  $\text{RM}(B^g) = \text{RM}(B) = 1$ , l'ensemble  $B^G$  a rang de Morley 2, donc il est générique dans  $G$ . Étant donné un autre Borel  $B_1$  de  $G$ , on conclut de façon analogue que  $B_1^G$  est générique dans  $G$ . Puisque  $G$  est connexe, l'intersection  $B^G \cap B_1^G \neq \{e_G\}$ , donc il existe  $b \in B$ ,  $b_1 \in B_1$  non-triviaux et  $g \in G$  avec  $b = b_1^g$ , ce qui entraîne que  $B \cap B_1^g \neq \{e_G\}$ . Les groupes  $B$  et  $B_1$  sont donc conjugués : tout Borel de  $G$  est conjugué de  $B$ .

Si  $g$  est un élément non-trivial de  $G$ , alors son centralisateur  $C(g)$  est propre. Si  $C(g)$  était fini, alors  $g$  aurait ordre fini. Sa classe de conjugaison  $g^G$  aurait rang de Morley 2 et serait donc générique. Puisque l'ensemble  $B^G$  l'est aussi, alors  $g \in B^h$  pour un certain  $h \in G$ . Puisque  $B^h$  est abélien, il suit que  $B^h \subset C(g)$ , ce qui contredit que ce dernier était fini.

En particulier, la composante connexe  $C(g)^0$  est donc infini définissable de rang 1, donc abélien. Elle est un Borel de  $G$ , que l'on note  $B_g = C(g)^0$ . Montrons d'abord que  $g \in B_g$ . Sinon, l'ensemble  $X = \{h \in G \mid h \notin C(h)^0\}$  n'est pas vide. Si  $b \in B \setminus \{1_G\}$ , alors  $B_b = C(b)^0$ , donc  $B \cap X = \emptyset$ . Comme  $C(h)^z = C(h^z)$ , l'ensemble  $X$  est invariant sur l'action de  $G$  par conjugaison, donc l'intersection  $B^G \cap X$  est aussi vide. Il suffit de montrer que  $X$  est générique pour avoir une contradiction : si  $x \in X$ , soit  $Y = x \cdot B_x$ . Si  $h$  normalise  $Y$ , alors il normalise aussi les produits  $y_1^{-1} \cdot y_2$ , qui sont dans  $B_x$ . De plus  $B_x$  normalise  $x$  et donc  $Y$ . En particulier, on a  $B_x \leq N_G(Y) \leq N_G(B_x)$ . Or, comme  $x$  et  $B_x$  centralisent  $B_x$ , chaque élément  $y$  de  $Y$  le fait aussi. En particulier  $B_y = B_x$  donc  $y \notin B_y$ , car  $x \notin B_x$ . On conclut que  $Y \subset X$ . Deux conjugués distincts de  $Y$  sont disjoints : en effet, si  $y \in Y \cap Y^z$ , alors  $B_x = B_y = B_{x^z}$ , donc les translatés  $Y$  et  $Y^z$  du même sous-groupe doivent être égaux. Puisque le normalisateur de  $Y$  a rang 1, alors  $Y$  a un nombre infini de conjugués. Comme  $Y \subset X$ , on conclut que  $\text{RM}(X) \geq \text{RM}(Y^G) = 2$ , ce qui donne la contradiction souhaitée.

En particulier, le seul Borel contenant l'élément non-trivial  $g$  de  $G$  est  $B_g = C(g)^0$ .

Montrons maintenant que  $B = N_G(B)$ . Soit  $g \in N_G(B)$ . La classe de conjugaison  $g^G$  est en correspondance avec  $G/C_G(g)$ , qui a rang de Morley 1 et degré 1, car  $G$  est connexe. Donc  $g^G$  est fortement minimale. Posons  $X = g^G \cap N_G(B)$  et  $Y$  son complément dans  $g^G$ . Notons que  $B$  agit par conjugaison sur  $X$  et  $Y$ . Par forte minimalité de  $g^G$ , soit  $Y$  est fini, soit  $X$  l'est. Si  $Y$  est fini, alors  $B$  doit agir trivialement sur  $Y$ , par la remarque 3.1.10. En particulier  $Y \subset C_G(B) \leq N_G(B)$ , donc  $Y = \emptyset$  et  $g^G \subset N_G(B)$ . La simplicité de  $G$  donne que  $g^G$  est indécomposable, donc le groupe engendré par  $g^G$  est définissable et distingué dans  $G$ , par le théorème 3.3.5. Alors, il est égal à  $G$ , ce qui donne que  $B$  est distingué dans  $G$ , qui était définissablement simple ! Si  $X$  est fini, alors  $B$  agit trivialement sur  $X$ . Puisque  $g \in X$ , alors  $B \subset C(g)^0 = B_g$  donc  $B = B_g \ni g$ . On conclut que  $B \supset N_G(B)$ .

Nous allons construire d'involutions de  $G$ . Soit  $B$  un Borel et  $g \notin B$ . L'application définissable

$$\begin{aligned} \varphi : B \times B &\rightarrow G \\ (x, y) &\rightarrow x \cdot g \cdot y \end{aligned}$$

est injective : en effet, si  $x \cdot g \cdot y = x_1 \cdot g \cdot y_1$ , alors  $(x_1^{-1} \cdot x)^g = y_1 \cdot y^{-1} \in B^g \cap B$ , qui est triviale, car  $B^g \neq B$ , parce que  $g \notin N_G(B) = B$ .

L'image  $B \cdot g \cdot B$  est alors générique et de même pour l'ensemble  $B \cdot (g^{-1}) \cdot B$ . La connexité de  $G$  donne l'existence de  $x$  et  $y$  dans  $B$  tels que  $x \cdot g \cdot y = g^{-1}$ . L'élément  $g \cdot x$  n'appartient pas à  $B$ , car  $g \notin B$ , mais  $(g \cdot x)^2 = y^{-1} \cdot x \in B$ . Par le corollaire 4.2.5, il existe un élément dans  $g \cdot B$  d'ordre une puissance de 2. En particulier, le groupe  $G$  contient d'involutions.

Soit  $i \in G$  une involution et  $B_i$  le seul Borel la contenant. Si  $g \notin B_i = N_G(B_i)$ , alors  $j = i^g \neq i$  est une involution contenue dans  $B_j = B_i^g \neq B_i$ . Notons que

$$(i \cdot j)^i = (i \cdot j)^{-1} = j \cdot i = (i \cdot j)^j.$$

Donc  $B_{i \cdot j}^i = B_{i \cdot j} = B_{i \cdot j}^j$ . Puisque  $B_{i \cdot j}$  est son propre normalisateur dans  $G$ , on conclut que  $i$  et  $j$  sont dans  $B_{i \cdot j}$ , donc  $B_{i \cdot j} = B_i = B_j$ , ce qui donne la contradiction finale.  $\square$

On finira avec une observation très utile par la suite.

**Lemme 4.2.12.** *Si  $G$  est un groupe résoluble de rang de Morley fini et  $H \trianglelefteq G$  est un sous-groupe infini distingué définissable et minimal avec ces propriétés, alors  $H$  est abélien.*

*Démonstration.* Notons que  $H^0$  est aussi infinie, définissable et distinguée, donc  $H$  est connexe, par minimalité. Supposons que  $H$  est résoluble de classe  $k$ . Or, le sous-groupe  $H'$ , qui est définissable et connexe, par le lemme 4.2.7, est caractéristique dans  $H$ , donc il est aussi distingué. De plus  $H \neq H'$ , car la classe de résolubilité de  $H'$  est  $k - 1$ . Donc  $H'$  est fini et donc trivial. Le groupe  $H$  est bien abélien.  $\square$

### 4.3 Actions minimales et mauvais groupes

**Définition 4.3.1.** Si  $G$  est un groupe qui agit sur un groupe  $A$ , le groupe  $A$  est  $G$ -minimal s'il est infini et tout sous-groupe propre de  $A$  clos par l'action de  $G$  est fini.

**Théorème 4.3.2 (Zilber).** *Si  $(G, A)$  est une structure de rang de Morley fini, où  $G$  est un groupe abélien infini d'automorphismes du groupe abélien  $A$  tel que  $A$  est  $G$ -minimal, alors il existe un corps infini définissable tel que  $A \simeq K^+$  et  $G$  est définissablement isomorphe à un sous-groupe de  $K^*$ . L'action de  $G$  sur  $A$  correspond à l'action de  $K^*$  sur  $K^+$  par translation.*

Notons que  $K$  est algébriquement clos, par le théorème 4.1.4. Comme  $G$  est infini, il suit du corollaire 4.1.7 que  $A$  n'a pas de sous-groupes non-triviaux clos par l'action de  $G$ .

*Démonstration.* Par le corollaire 3.1.7, le centralisateur de tout ensemble est définissable et égal au centralisateur d'une sous-partie finie. Donc  $\{e_G\} = C_G(A) = C_G(a_1, \dots, a_n)$ , pour certains  $a_1, \dots, a_n$  dans  $A$ . Tout élément de  $G$  est alors déterminé par son action sur  $a_1, \dots, a_n$ . Puisque  $G$  est infini, il doit avoir une orbite  $G \cdot a_i$  qui l'est aussi. Posons  $a = a_i$ . L'ensemble  $G \cdot a \cup \{0_A\}$  est indécomposable dans  $A$  : en effet, puisqu'il est invariant par l'action de  $G$ , par la remarque 3.3.2 il suffit de considérer des sous-groupes de  $A$  clos par l'action de  $G$ , qui sont soit finis soit  $A$  tout entier.

Par le théorème 3.3.5, le sous-groupe infini engendré par  $G \cdot a \cup \{0_A\}$  est définissable et connexe. Il est égal à tout  $A$ , par  $G$ -minimalité de ce dernier. En particulier, il existe un entier  $m$  dans  $\mathbb{N}$  telle que tout  $b \in A$  s'écrit de la forme

$$b = \sum_{i \leq m} g_i \cdot a. \quad (\dagger)$$

Soit  $R$  l'anneau d'endomorphismes de  $A$  engendré par  $G$  : l'addition est déterminé à chaque point par l'addition sur  $A$  et le produit est celui de  $G$ . Tout élément de  $R$  est déterminé par sa valeur sur  $a$  : en effet, si  $s$  est un élément de  $G$  et  $b$  satisfait  $(\dagger)$ , la valeur de  $s(b)$  est

$$\sum_{i \leq m} g_i \cdot s(a),$$

puisque  $R$  est commutatif. En particulier, l'anneau  $R$  est définissable, car si  $s(a) = \sum_{i \leq m} g_i \cdot a$ , alors  $s$  et  $\sum_{i \leq m} g_i$  ont la même action sur  $a$ .

Le noyau d'un élément  $s \in R \setminus \{0\}$  est un sous-groupe de  $A$  clos par l'action de  $G$ , qui doit être fini. Son image ne peut pas l'être et elle est alors égale à tout  $A$ . En particulier, si  $s \neq 0$ , il est surjectif, donc si  $t \cdot s = 0 = 0 \cdot s$ , alors  $t = 0$ . L'anneau  $R$  est intègre. Il s'agit donc d'un corps  $K$ , par le lemme 3.3.8. L'application

$$\begin{array}{ccc} \varphi & : K^+ & \rightarrow A \\ & s & \rightarrow s(a) \end{array}$$

est un isomorphisme. L'action du groupe  $G$  sur  $A$  correspond à celle de  $K^*$  sur  $K^+$  par translations.  $\square$

Il se peut que  $G \leq K^*$ . La caractérisation de groupes abéliens (théorème 4.2.3), permet de supposer que  $G$  est un sous-groupe multiplicatif infini définissable divisible. Une telle paire  $(K, T)$  s'appelle un *mauvais corps*, et on ignorait pendant plus de 20 ans s'il y en avait. Wagner montre que l'existence de mauvais corps en caractéristique positive  $p$  entraîne qu'il n'existe qu'un nombre fini des nombres premiers de la forme  $\frac{p^n - 1}{p - 1}$ . En revanche, en caractéristique 0, il existe (une quantité non-dénombrable à non-équivalence élémentaire près) des mauvais corps de rang 2 munis d'un sous-groupe multiplicatif divisible infini de rang 1.

De façon analogue, on montre le résultat suivant :

**Proposition 4.3.3.** *Soit  $(G, A)$  est une structure de rang de Morley fini, où  $G$  est un groupe infini d'automorphismes du groupe abélien  $A$ , qui lui est  $H$ -minimal pour un certain sous-groupe distingué définissable connexe  $H \leq G$  contenant un sous-groupe distingué infini abélien  $M \trianglelefteq H$ . Alors, il existe un corps définissable  $K$  tel que  $A$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. De plus, l'action de  $M$  sur  $A$  est  $K$ -scalaire et celle de  $G$  sur  $A$  est  $K$ -linéaire.*

Si l'on pose  $H = G^0$  et  $M = Z(G^0)$ , on est dans les hypothèses de la proposition lorsque  $M$  est infini, par exemple, si  $G$  est nilpotent, par le lemme 3.1.13. Le corps  $K$  obtenu est alors déterminé uniquement par  $Z(G^0)$  (et il ne dépend que de  $G$ ).

*Démonstration.* Prenons un sous-groupe  $B \leq A$  définissable, infini, clos par l'action de  $M$  et de rang de Morley minimal avec ces propriétés. Or, sa composante connexe  $B^0$  est aussi clos par l'action de  $M$ , puisqu'elle est caractéristique. En particulier, le groupe  $B^0$  est  $M$ -minimal. De plus, le sous-groupe  $B^0$  est une partie indécomposable de  $A$  : en effet, par la remarque 3.3.2, il suffit de considérer des sous-groupes  $K \leq A$  clos sous l'action de  $M$ . Or, si le nombre de classes modulo  $K$  de  $B^0$  n'est pas 1, le groupe  $B^0 \cap K$  doit être fini, par  $M$ -minimalité de  $B^0$ . L'indice  $[B^0 : B^0 \cap K]$  est bien infini.

Le théorème 3.3.5 entraîne que le sous-groupe engendré par  $B_h = h(B^0)$ , où  $h$  parcourt  $H$ , est définissable et connexe. Il est clairement clos par l'action de  $H$ , donc il doit être égal à  $A$  tout entier, par  $H$ -minimalité de ce dernier.

Si l'action de  $M^0$  sur  $B^0$  était triviale, alors l'action de  $h \cdot M^0 \cdot h^{-1} = M^0$  sur  $B_h$  le serait aussi. On conclut que l'action de  $M^0$  sur  $A$  est triviale, ce qui contredit que  $M$  est infini.

Posons  $\text{Ann}_M(B^0) = \{m \in M \mid m \text{ est trivial sur } B^0\}$ . Il est donc d'indice infini dans  $M$ . La paire  $(M/\text{Ann}_M(B^0), B^0)$  satisfait les conditions du théorème 4.3.2. L'anneau  $R$  d'endomorphismes de  $A$  engendré par  $M/\text{Ann}_M(B^0)$  ne doit pas être forcément définissable ; néanmoins son action sur  $B^0$  est celle d'un sous-groupe définissable de  $K^*$  sur  $K^+ \simeq B^0$ , où  $K$  est un corps (algébriquement clos) définissable. En particulier, l'annulateur dans  $R$  de  $B^0$  est un idéal maximal  $I$ , puisque  $K \simeq R/I$  est un corps.

Nous allons montrer que  $R$  est définissable. Si  $h$  appartient à  $H$ , le sous-groupe  $B_h$  est un  $R$ -module d'annulateur  $I_h = h \cdot I \cdot h^{-1}$ , qui est aussi maximal. Le théorème des restes chinois donne que, étant donnés  $h_1, \dots, h_n$  dans  $H$  avec  $I_{h_i} \neq I_{h_j}$ , alors il existe des éléments  $s_1, \dots, s_n$  tel que  $s_i = 1$  modulo  $I_{h_i}$  et  $s_i = 0$  modulo  $I_{h_j}$ , pour  $j \neq i$ . Les modules  $B_{h_1}, \dots, B_{h_n}$  sont en somme directe : en effet, si

$$\sum_i x_i = 0 \text{ avec } x_i \in B_{h_i},$$

en multipliant avec chaque  $s_i$ , on conclut que  $x_i = 0$ . Comme  $A$  est de rang fini et engendré par les sous-groupes  $B_h$ , où  $h \in H$ , il n'existe qu'un nombre fini des candidats possibles  $\{I_1, \dots, I_n\}$  pour les annulateurs  $I_h$ , avec  $h \in H$ . L'action de  $H$  par conjugaison sur l'ensemble  $\{I_1, \dots, I_n\}$  est définissable. Par la remarque 3.1.10, cette action est donc triviale. En particulier, l'idéal  $I$  est clos par l'action de  $H$  et il agit alors trivialement sur  $A$ , donc  $I = 0$ .

L'anneau  $R$  est alors un corps  $K$ . Son action sur  $A$  est déterminé par l'action de  $K$  sur  $B^0$ . Il est en particulier définissable : il existe un entier positif  $k$  tel que tout élément  $r$  de  $R$  s'écrit comme  $r = \sum_{j \leq k} m_j$ .

Notons que  $M$  agit de façon scalaire sur  $B^0$ . De même, le groupe  $H$  agit comme un groupe définissable d'automorphismes définissables de  $K$ , puisque  $M \trianglelefteq H$ . Le corollaire 4.1.11 donne que l'action de  $H$  sur  $K$  est triviale. Il suit que l'action de  $H$  sur  $A$  est donc  $K$ -linéaire et le groupe  $M \leq K^*$  est central dans  $H$ .

Si l'on considère l'anneau d'endomorphismes engendré par  $Z(H)$ , le même argument qu'auparavant permet de conclure que ce groupe engendre un corps  $L \supset K$  définissable d'automorphismes de  $A$ . Le corollaire 4.1.7 donne que  $K = L$ . Donc la structure de  $K$ -espace vectoriel pour  $A$  ne dépend pas de  $M$ , mais de  $H$ . Or, puisque  $H$  est distingué dans  $G$ , son centre  $Z(H)$  l'est aussi. Donc  $G$  agit (par conjugaison) comme un groupe définissable d'automorphismes du corps  $K$ . Cette action est triviale, par le corollaire 4.1.11, ce qui entraîne que l'action de  $G$  sur  $A$  est  $K$ -linéaire. □

**Corollaire 4.3.4.** *Soit  $(G, A)$  une structure de rang de Morley fini, où  $A$  est un groupe minimal et  $G$  est un groupe définissable d'automorphismes de  $A$ . Alors, si  $g \in G$  n'est pas trivial, l'ensemble  $\text{Fix}(g) = \{a \in A \mid g(a) = a\} = \{0_A\}$ . En particulier  $\text{RM}(G) \leq \text{RM}(A)$ .*

*Si  $M \trianglelefteq G$  est abélien infini définissable, son normalisateur  $N_G(M)$  l'est aussi.*

*Démonstration.* Notons que  $A$  est abélien, par la proposition 3.6.3, et  $H$ -minimal pour tout sous-groupe  $H \leq G$ . Le théorème précédent et le corollaire 3.6.5 donnent qu'il existe un corps algébriquement clos  $K$  tel que  $K^+ \simeq A$ . Si  $K$  a caractéristique 0, comme  $\text{Fix}(g)$  est un sous-groupe additif, le corollaire 4.1.8 donne l'affirmation souhaitée.

Supposons que la caractéristique de  $K$  est positive, égale à  $p > 0$ . Étant donné  $a$  dans  $\text{Fix}(g) \setminus \{0_A\}$ , alors  $C_G(a) \leq G$  n'est pas trivial. S'il est infini, alors il contient un sous-groupe abélien infini définissable  $M$ . Puisque  $A$  est  $M$ -minimal, le théorème 4.3.2 donne que  $M \leq K^*$ . Cependant, aucun élément de  $K^*$  fixe un point de  $K^+$  différent du 0. Donc  $C_G(a)$  est un groupe fini et  $A$  est engendré par  $G \cdot a$ , par le théorème 3.3.5.

La minimalité de  $A$  entraîne que tout endomorphisme définissable de  $A$  non-trivial doit être surjectif à noyau fini. En particulier, le sous-anneau d'endomorphismes de  $A$  engendré par  $C_G(a)$  est un anneau intègre fini, puisqu'il est un sous-ensemble interprétable de  $C_G(a)^n$  pour un certain  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Il est donc un corps commutatif, par le lemme de Wedderburn. On conclut comme auparavant que  $C_G(a)$  doit être trivial.

Puisque le générique  $g$  de  $G$  est interalgébrique sur  $a$  avec  $g(a)$ , on conclut que  $\text{RM}(G) \leq \text{RM}(A)$ .

Si  $M$  est un sous-groupe abélien distingué infini, il est alors un sous-groupe multiplicatif d'un corps sous-jacent  $K$  avec  $K^+ \simeq A$ . Puisque  $M$  est infini, pour chaque  $g$  appartient à  $N_G(M)$ , le sous-groupe  $H_g = \{\lambda \in K \mid g \circ \lambda = \lambda \circ g\}$  doit être tout  $K$ . L'action de  $N_G(M)$  sur  $A$  est donc  $K$ -linéaire, et par la remarque précédente, déterminé par sa valeur sur l'élément 1. En particulier  $N_G(M) \leq K^*$ , qui est abélien. □

**Proposition 4.3.5.** *Soit  $(G, A)$  une structure de rang de Morley fini, où  $G$  est un groupe infini résoluble connexe d'automorphismes du groupe abélien  $A$ . Si le sous-groupe définissable  $B \leq A$  est  $G$ -minimal ou  $G'$ -minimal, alors l'action de  $G'$  sur  $B$  est triviale.*

*Démonstration.* Si  $G$  est abélien, le résultat est immédiat. De même si  $B$  est fini, par connexité de  $G$  et  $G'$ , et le corollaire 3.1.10, donc nous pouvons supposer que  $B$  est infini et que le résultat est vrai pour tout sous-groupe résolubles de classe  $k$ , par récurrence sur la classe de résolubilité.

Soit  $G$  résoluble de classe  $k+1$ . Traitons d'abord le cas où  $B$  est  $G'$ -minimal. En particulier  $G'$  est définissable connexe résoluble de classe  $k$  et agit sur  $B$ , donc  $G^{(2)}$  agit de façon triviale sur  $B$ , par hypothèse.

Si  $G'$  n'agit pas de façon triviale sur  $B$ , posons alors  $A_1$  le sous-groupe de  $A$  engendré par  $g(B)$ , où  $g \in G$ . Comme  $B$  est  $G'$ -minimal, le groupe  $B \leq A$  est indécomposable, donc  $A_1$  est définissable par le théorème 3.3.5.

Si l'on considère le groupe  $G/G''$ , la proposition 4.3.3 donne qu'il existe un corps sous-jacent  $K$  tel que le groupe  $A_1$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie, où  $G/G^{(2)}$  agit de façon  $K$ -linéaire et  $G'/G^{(2)}$  agit  $K$ -scalairement.

En particulier, les éléments de  $G'/G^{(2)}$  sont des matrices de déterminant 1, puisque  $\det(Y^{-1} \cdot X^{-1} \cdot Y \cdot X) = 1$ , que l'on peut voir comme des racines de l'unité. Par compacité, le groupe  $G'/G''$  doit être fini d'exposant borné. Puisque  $G'$  est connexe, on a que  $G' = G^{(2)}$ , qui agit trivialement sur  $B$ .

Si  $B$  est  $G$ -minimal, prenons un sous-groupe infini  $B_1$  de  $B$  clos par l'action de  $G'$  du rang minimal. Sa composante connexe est donc  $G'$ -minimale et indécomposable dans  $B$ . Par la discussion précédente, l'action de  $G' \trianglelefteq G$  sur  $B_1^0$  est triviale et de même sur chaque  $g(B_1^0)$ , avec  $g \in G$ . Par  $G$ -minimalité de  $B$ , le groupe engendré par  $g(B_1^0)$  doit être égal à  $B$  tout entier, ce qui donne le résultat. □

**Corollaire 4.3.6.** *Si  $G$  est un groupe connexe résoluble de rang de Morley fini, son dérivé  $G'$  est nilpotent.*

*Démonstration.* Supposons que  $G'$  est infini. Notons que  $G'$  est connexe et distingué, donc il contient un sous-groupe définissable infini  $N$  distingué dans  $G$  et minimal avec ces propriétés, qui est lui abélien, par le lemme 4.2.12. Le groupe  $N$  est en particulier  $G$ -minimal, donc  $N \subset Z(G')$ , par la proposition 4.3.5. On conclut que  $Z(G') \triangleleft G$  est infini.

Par récurrence sur le rang de  $G$ , le sous-groupe  $G'/Z(G') = (G/Z(G'))'$  est nilpotent, donc  $G'$  l'est aussi. □

**Corollaire 4.3.7.** *Si  $G$  est un groupe connexe résoluble non-nilpotent de rang de Morley fini, alors il interprète un corps algébriquement clos.*

*Démonstration.* Notons que l'hypercentre de  $G$  est définissable, par le corollaire 4.2.8, et propre, puisque  $G$  n'est pas nilpotent. En prenant le quotient, qui reste infini, on peut supposer que  $G$  n'a pas de centre.

Soit  $A$  un sous-groupe infini définissable distingué dans  $G$  minimal. Il est abélien, par le lemme 4.2.12, et  $G$ -minimal. La proposition 4.3.5 entraîne que l'action de  $G'$  sur  $A$  par conjugaison est triviale. Or, l'action de  $G$  sur  $A$  ne l'est pas, car le centre de  $G$  est trivial. Donc  $G/G'$  donne un groupe infini abélien d'automorphismes du groupe abélien  $A$ . Par la proposition 4.3.3, il interprète un corps  $K$ , qui est donc algébriquement clos par le théorème 4.1.4. □

Notons que tout groupe algébrique sur un corps algébriquement clos est un groupe de rang de Morley fini, néanmoins on peut facilement montrer que le groupe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$  a rang de Morley fini, même s'il n'est pas un groupe algébrique. L'étude de groupes de rang de Morley fini aména Cherlin et Zilber de façon indépendante à poser la conjecture suivante :

**Conjecture** (Conjecture de l'Algébricité). Tout groupe simple infini de rang de Morley fini est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

Notons que, par le principe de Lefschetz, tout énoncé vrai dans un groupe algébrique  $G$  (en n'utilisant que la loi de groupe) doit rester vrai lorsque l'on considère  $\overline{\mathbb{F}}_p$ , pour un certain  $p > 0$ . Un groupe algébrique sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  est *localement fini* : toute partie finie engendre un groupe fini. Cette méta-propriété n'est pas valable pour une certaine classe des groupes de rang de Morley fini, dits *mauvais groupes*.

**Définition 4.3.8.** Un *mauvais groupe*  $G$  est un groupe infini connexe de rang de Morley fini non-résoluble tel que tout sous-groupe connexe définissable propre est nilpotent.

**Lemme 4.3.9.** Si  $G$  est un mauvais groupe, alors il admet un quotient simple qui est aussi un mauvais groupe.

*Démonstration.* Si  $G$  est simple, alors il n'y a rien à démontrer. Sinon, par le corollaire 3.3.6, il existe un sous-groupe définissable propre  $N \triangleleft G$ , que l'on suppose connexe. Alors  $N$  est nilpotent, donc  $G/N$  n'est pas résoluble. De plus, tout sous-groupe connexe propre définissable de  $G/N$  est l'image d'un de  $G$  contenant  $N$  et donc nilpotent. On conclut que  $G/N$  est un mauvais groupe aussi.

Si  $N$  était infini, le rang de  $G/N$  est inférieur au rang de  $G$ , donc par récurrence on obtient un quotient infini  $G_1$  de  $G$ , qui est un mauvais groupe sans groupes distingués définissables infinis.

Puisque  $G_1$  est connexe, tout groupe définissable distingué doit être central, par le corollaire 3.1.11. Le groupe  $G_1/Z(G_1)$  est donc mauvais et simple. □

Avant pouvoir décrire la structure d'un groupe simple mauvais, nous aurons besoin d'un résultat auxiliaire.

**Lemme 4.3.10.** Soit  $B$  un sous-groupe connexe définissable nilpotent d'un groupe  $G$  de rang de Morley fini. Si  $a \in G$  normalise le Borel  $B$  et  $B \cap C_G(a)$  est fini, alors l'application

$$[\cdot, a] : \begin{array}{l} B \longrightarrow B \\ x \longrightarrow a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a \cdot x \end{array}$$

est surjective.

*Démonstration.* Montrons donc que l'application ci-dessus est surjective, par récurrence sur la classe de nilpotence de  $B$ . Si  $B$  est abélien, l'application  $[\cdot, a]$  est un endomorphisme de  $B$  à noyau fini par hypothèse. Son image est alors d'indice fini dans  $B$ , qui est connexe, donc égale à  $B$  entier.

Si  $B$  est de classe de nilpotence  $n + 1$ , notons que chaque terme de sa série centrale est connexe et normalisé par  $a$ , puisqu'ils sont tous caractéristiques dans  $B$ . Par récurrence, tout élément de  $Z_n(B)$  s'écrit comme  $[x, a]$ , où  $x \in Z_n(B)$ . Comme  $B/Z_n(B)$  est abélien, l'application  $[\cdot, a]$  induit un endomorphisme de groupes de  $B/Z_n(B)$ . Si son noyau est fini, alors par la discussion précédente, il est surjectif.

Montrons que son noyau est fini : si  $[y, a] \in Z_n(B)$ , par surjectivité, il s'écrit comme  $[x, a]$ , où  $x \in Z_n(B)$ . Donc  $x \cdot y \in C_B(a)$ , qui est fini par hypothèse. En particulier, la classe de  $y/Z_n(B)$  parcourt un nombre fini.

Pour tout  $y \in B$ , il existe  $z \in B$  tel que  $[z, a] \cdot h = y$  avec  $h \in Z_n(B)$ . Par récurrence, il existe  $z_1 \in Z_n(B)$  avec  $[z_1, a] = h$ . Or,

$$y = a^{-1} \cdot z^{-1} \cdot a \cdot z \cdot a^{-1} \cdot z_1^{-1} \cdot a \cdot z_1.$$

Puisque  $z_1$  et  $a^{-1} \cdot z_1 \cdot a$  sont centraux dans  $B$  modulo  $Z_{n-1}(B)$ , il existe  $h_2 \in Z_{n-1}(B)$  et  $z_2 \in Z_{n-1}(B)$  avec  $h_2 = [z_2, a]$  et

$$y = a^{-1} \cdot (z \cdot z_1)^{-1} \cdot a \cdot z \cdot z_1 \cdot h_2,$$

donc

$$y = [z \cdot z_1, a] \cdot a^{-1} \cdot z_2^{-1} \cdot a \cdot z_2.$$

On répète cet argument avec  $z_2$  et  $a^{-1} \cdot z_2 \cdot a$  modulo  $Z_{n-2}(B)$  et on conclut que  $y$  s'écrit comme un commutateur de la forme  $[z \cdot z_1 \cdots z_{n-1}, a]$ . □

**Proposition 4.3.11.** *Si  $G$  est un mauvais groupe simple, alors il existe un sous-groupe propre définissable connexe  $B$  tel que  $B = N_G(B)$ , pour tout  $g$  et  $h$ , si  $B^g \neq B^h$ , alors  $B^g \cap B^h = \{e_G\}$  et  $G = \bigcup_{g \in G} B^g$ .*

Dans ces notes, nous allons uniquement montrer que  $N_G(B)^0 = B$ .

*Démonstration.* Notons que tout groupe propre connexe définissable de  $G$  est nilpotent, donc contenu dans un Borel de  $G$ , qui est aussi nilpotent.

Montrons d'abord que l'intersection de deux Borels  $B_1$  et  $B_2$  distincts est triviale. Sinon, parmi les Borels  $B_1$  et  $B_2$  Borels tels que  $B_1 \cap B_2$  pas triviale, prenons deux avec  $\text{RM}(B_1 \cap B_2)$ . Posons  $N = N_G(B_1 \cap B_2)$ . Notons que  $N \neq G$ , puisque  $G$  est simple. La composante connexe  $N^0 \subset B_3$  pour un certain Borel  $B_3$ .

Si  $B_1 \neq B_2$ , alors  $[B_1 : B_1 \cap B_2]$  est infini. Par la proposition 3.1.15, comme  $N_{B_1}(B_1 \cap B_2)^0 = N^0 \cap B_1 \subset B_3 \cap B_1$ , on a que  $[N \cap B_1 : B_1 \cap B_2]$  est aussi infini. En particulier, le rang  $\text{RM}(B_3 \cap B_1) \geq \text{RM}(N^0 \cap B_1) > \text{RM}(B_1 \cap B_2)$ . La maximalité du rang donne que  $B_1 = B_3$  et de même  $B_3 = B_2$ , donc  $B_1 = B_2$ .

Soit  $B$  un Borel fixé et  $N$  son normalisateur. Par la remarque 4.2.10, l'indice  $[N : B]$  est fini et  $\text{RM}(B) = \text{RM}(N)$ . La réunion  $B^G$  des conjugués de  $B$  est la réunion disjointe (modulo  $e_G$ ) de  $B^g$ , où  $g \in G/N$ , donc

$$\text{RM}(B^G) = \text{RM}(B) + \text{RM}(G/N) = \text{RM}(N) + \text{RM}(G/N) = \text{RM}(G),$$

par le corollaire 3.5.2. L'ensemble  $B^G$  est bien générique. En particulier, si  $B_1$  est un autre Borel, l'ensemble  $(B_1)^G$  est aussi générique, donc  $B$  et  $B_1$  sont conjugués, par connexité de  $G$ .

Notons que tout élément  $a$  de  $G$  a un centralisateur infini : en effet, sinon la classe de conjugaison  $a^G$  est générique et donc  $a^G \cap B^G \neq \emptyset$ , par connexité de  $G$ . En particulier, l'élément  $a$  est contenu dans un conjugué de  $B$ , qui a un centre infini, étant nilpotent, par le lemme 3.1.13, ce qui contredit  $|C_G(a)| < \omega$ . Puisque  $C(a) \neq G$ , alors  $C(a)^0$  est contenue dans un Borel, qui est l'unique à contenir l'ensemble infini  $C(a)^0$ . Notons-le par  $B_a$ . Remarquons que  $B_a$  est le seul Borel contenant une infinité d'éléments commutant avec  $a$  : en effet, si  $C_G(a)^0$  a un indice  $n$  dans  $C_G(a)$ , alors le principe du tiroir donne que si  $B' \cap C_G(a)$  est infini pour un Borel  $B'$ , alors de même pour  $B' \cap C_G(a)^0 \subset B' \cap B$ , donc  $B' = B$ . En particulier  $a \cdot B_a \cdot a^{-1} = B_a$ . Si  $a \in B$ , alors  $B_a = B$ , donc l'ensemble  $Y = \{a \in G \mid a \notin B_a\}$  ne peut pas être générique, puisque  $B^G \cap Y = \emptyset$ .

Nous allons montrer que si  $Y$  n'est pas générique, alors  $Y = \emptyset$ , ce qui entraîne que

$$G = \bigcup_{g \in G} B^g.$$

Soit  $b \in B_a$ . Si  $B_a \neq B_{a \cdot b}$ , alors l'élément  $a \cdot b$ , qui normalise  $B_a$ , ne commute qu'avec un nombre fini d'éléments de  $B_a$ . Par le lemme 4.3.10, il existe  $b' \in B_a$  avec  $[b', a \cdot b] = b^{-1}$ , par surjectivité. Donc

$$a = (a \cdot b) \cdot b^{-1} = (a \cdot b) \cdot [b', a \cdot b] = (a \cdot b)^{b'},$$

ce qui entraîne que  $a$  et  $a \cdot b$  sont conjugués par un élément de  $B_a$  et donc  $B_a = B_{a \cdot b}$ .

En particulier, on conclut que si  $a \in Y$ , alors  $a \cdot B_a \subset Y$ , puisque  $a \cdot b \notin B_a = B_{a \cdot b}$ . Le rang de  $Y$  est donc  $\text{RM}(B) + \text{RM}(G/N) = \text{RM}(G)$ , donc  $Y$  est bien générique. □

**Corollaire 4.3.12.** *Tout groupe mauvais satisfait un énoncé qui est faux dans tout groupe localement fini.*

*Démonstration.* Puisque tout quotient d'un groupe localement fini l'est aussi, il suffit de considérer un groupe mauvais simple, qui admet alors un Borel définissable comme dans la proposition 4.3.11 sur un ensemble de paramètres, que l'on suppose vide. Si  $G$  est un groupe dénombrable qui satisfait que  $B \leq G$  avec  $B = N_G(B)$  et  $G = \bigcup_{g \in G} B^g$ , avec  $B^g \cap B^h = \{e_G\}$  si  $B^g \neq B^h$ , alors il suffit de montrer que  $G$  n'est pas localement fini.

Prenons un sous-ensemble fini (de taille supérieure à 2) de  $G$  et soit  $G'$  le sous-groupe (fini) qu'il engendré, qui est supposé fini d'ordre  $n \geq 2$ . Or, il y a un nombre fini des conjugués  $B_1, \dots, B_k$  de  $B$  d'intersection non-triviale avec  $G'$ . Nous allons montrer que  $G'$  est contenu dans un seul conjugué. Posons  $B'_i = G' \cap B_i$ . En particulier, le groupe  $B'_1$  a un ordre  $m$ . Si  $m < n$ , puisque  $B$  est autonormalisant, alors  $B'$  a  $n/m$  conjugués différents dans  $G'$ , chacun à  $m$  éléments. Cela donne  $(m-1) \frac{n}{m} = n - \frac{n}{m} < n-1$  éléments, donc  $G'$  doit avoir une intersection non-triviale avec un autre conjugué  $B_2$  de  $B$ , qui n'est pas un conjugué de  $B_1$ . Si  $m_2$  est l'ordre de  $B'_2$ , on obtient donc  $(m_2-1) \frac{n}{m_2}$  nouveaux éléments, tous différents de l'identité. En revanche :

$$n - \frac{n}{m_1} + n - \frac{n}{m_2} \geq 2n - 2 \frac{n}{2} \geq n,$$

ce qui donne la contradiction souhaitée. Donc  $G' \subset B_1 \neq G$ . Soit alors le sous-groupe  $\hat{G}$  engendré par  $G' \cup \{g\}$ , pour un certain élément fixé  $g$  de  $G \setminus B_1$ . Le même argument qu'auparavant donne que  $\hat{G}$  est contenu dans un seul conjugué de  $B$ , qui doit être forcément  $B_1$ , puisque  $G' \subset B_1$  a taille au moins 2. Ceci donne une contradiction, car  $g \notin B_1$ .  $\square$

**Corollaire 4.3.13.** *Si  $T$  est une théorie stable qui n'interprète ni des corps algébriquement clos ni des mauvais groupes, alors tout groupe connexe interprétable dans  $T$  de rang de Morley fini est nilpotent.*

Par un théorème de Nesin, on peut montrer, de plus, que tout groupe connexe de rang de Morley fini interprétable dans une telle théorie  $T$  est de la forme  $D \cdot B$ , où  $[D, B] = 1$ , le groupe définissable  $D$  est abélien divisible et le groupe définissable  $B$  a exposant borné.

*Démonstration.* Il suffit de montrer que tout groupe connexe de rang de Morley fini interprétable dans  $T$  est résoluble : en effet, s'il existe un groupe connexe  $G$  résoluble dans  $T$  de rang de Morley fini qui n'est pas nilpotent, alors  $T$  interprète un corps algébriquement clos  $K$ , par le corollaire 4.3.7. Or, le groupe  $\mathrm{SL}_2(K)$  est infini, interprétable et non-résoluble.

Prenons donc un groupe connexe  $G$  interprétable dans  $T$  non-résoluble de rang de Morley minimal. En particulier, tout sous-groupe définissable connexe propre doit être résoluble. S'il admet un sous-groupe définissable connexe propre qui n'est pas nilpotent, le corollaire 4.3.7 donne l'existence d'un corps algébriquement clos. Sinon, le groupe  $G$  est alors un groupe mauvais, ce qui contredit nos hypothèses.  $\square$

## 4.4 Groupes monobasés

Rappelons que la base canonique d'un type stationnaire est toujours algébrique sur un bout fini de toute suite de Morley, par le lemme 2.4.26.

**Définition 4.4.1.** Une théorie  $T$  est monobasée si la base canonique de tout type stationnaire  $p$  est algébrique sur un élément d'une suite de Morley de  $p$ . De façon équivalente, donné un uple  $a$  et un ensemble  $B$ , alors

$$a \quad \downarrow \quad B \\ \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(a) \cap \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$$

**Exercice.** La théorie  $\mathrm{ACF}_p$  n'est pas monobasée.

**Remarque 4.4.2.** Si  $T$  est fortement minimale, alors la monobasitude est équivalente à la modularité locale.

La monobasitude est préservée si l'on ajoute ou enlève des paramètres au langage.

Par la suite, nous fixons un groupe  $G$  (infini) définissable dans une théorie dénombrable  $\omega$ -stable monobasée.

**Proposition 4.4.3.** *Tout type fort  $p = \mathrm{stp}(a/A)$  dans  $G$  est le générique d'un translaté, définissable sur  $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ , d'un sous-groupe connexe définissable sur  $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\emptyset)$ .*

*Démonstration.* Si  $p = \mathrm{stp}(a/A)$ , soit  $H = \mathrm{Stab}(p)$ , qui est définissable sur  $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ . Par le lemme 3.2.15, si l'on montre que le translaté  $H \cdot a$  est aussi définissable sur  $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ , alors on a la connexité de  $H$  et le fait que  $p$  est le générique de  $H \cdot a$  : en effet, puisque  $a$  appartient au translaté  $H \cdot a$ , si ce dernier est définissable sur  $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ , alors  $p = \mathrm{stp}(a/A)$  contient la formule  $x \in H \cdot a$ , donc  $\mathrm{RM}(p) \leq \mathrm{RM}(H \cdot a) = \mathrm{RM}(H) \leq \mathrm{RM}(p)$ .

Prenons un générique principal  $b$  de  $G$  indépendant de  $a$  sur  $A$ . Soit  $M \supset A \cup \{b\}$  un modèle saturé avec  $a \downarrow_A M$ . Montrons d'abord que  $b \cdot H$  est interdéfinissable avec  $\mathrm{Cb}(b \cdot a/M)$  sur  $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$  : en effet, si  $\sigma$  est un automorphisme de  $M$  fixant  $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ , alors  $\sigma(b \cdot H) = b \cdot H$  si et seulement si  $b^{-1} \cdot \sigma(b)$  est dans  $H$  si et seulement si  $b^{-1} \cdot \sigma(b) \cdot a \equiv_M a$  (par stationnarité, car  $b^{-1} \cdot \sigma(b)$  est dans  $M$  et donc indépendant de  $a$  sur  $A$ ) si et seulement si  $\sigma(b) \cdot a \equiv_M b \cdot a$  si et seulement si  $\sigma(\mathrm{tp}(b \cdot a/M)) = \mathrm{tp}(b \cdot a/M)$  si et seulement si la base canonique  $\mathrm{Cb}(b \cdot a/M)$  est fixée par  $\sigma$ .

Le corollaire 2.4.20 donne que  $\mathrm{tp}(b \cdot a/M)$  ne dévie pas sur  $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A, \ulcorner b \cdot H \urcorner) \subset M$ . De plus, l'imaginaire  $\ulcorner b \cdot H \urcorner$  est algébrique sur  $A \cup \{b \cdot a\}$ , par monobasitude.

Comme  $b$  est générique sur  $A, a$ , on a  $a \downarrow_A b \cdot a$  et donc

$$a \downarrow_A b \cdot a, \ulcorner b \cdot H \urcorner.$$

Par symétrie, on conclut

$$b \cdot a \downarrow_{A, \ulcorner b \cdot H \urcorner} a.$$

Les types forts  $\text{stp}(b \cdot a/M)$  et  $\text{stp}(b \cdot a/A, \ulcorner b \cdot H \urcorner, a)$  ont la même extension globale non-déviante, que l'on note  $\mathbf{q}$ . En particulier, le type  $\mathbf{q}$  ne dévie pas sur  $M$ , donc  $\text{Cb}(\mathbf{q}) = \text{Cb}(b \cdot a/M)$  est dans  $M$ . De plus, le type  $\mathbf{q}$  contient la formule  $x \in b \cdot H \cdot a$ , car elle appartient à  $\text{stp}(b \cdot a/A, \ulcorner b \cdot H \urcorner, a)$ . Si  $\tau$  est un automorphisme fixant  $M$ , alors  $x \in b \cdot H \cdot \tau(a) = \tau(b \cdot H \cdot a)$  appartient à  $\tau(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$ , donc  $b \cdot H \cdot \tau(a) \cap b \cdot H \cdot a \neq \emptyset$ . On conclut que  $H \cdot a$  est définissable sur  $M$ . Puisque  $a \downarrow_A M$ , cela entraîne que  $H \cdot a$  est définissable sur  $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$ , comme souhaité.

Finissons en montrant que  $H$  est définissable sur  $\text{acl}^{\text{eq}}(\emptyset)$ . Comme  $a \downarrow_A b$ , alors  $H = \text{Stab}(\text{stp}(a/A, b))$ , par stationnarité. Or, le paramètre canonique  $\ulcorner H \urcorner$  est définissable sur  $\ulcorner b \cdot H \urcorner$ , car

$$H = (b \cdot H)^{-1} \cdot (b \cdot H),$$

où  $(b \cdot H)^{-1} = \{k^{-1}\}_{k \in b \cdot H}$ .

Or, puisque  $H$  est connexe et  $p$  est son type générique, la classe  $b \cdot H$  est en correspondance avec le type  $b \cdot p$ , donc  $\ulcorner H \urcorner$  est définissable sur  $\text{acl}^{\text{eq}}(b \cdot a)$ , par monobasitude. Le type  $\text{stp}(b \cdot a/A, a)$  est générique, donc il ne dévie pas sur  $\emptyset$ , par le lemme 3.2.4. L'indépendance

$$b \cdot a \downarrow A, a$$

donne que  $\ulcorner H \urcorner$  appartient à  $\text{acl}^{\text{eq}}(\emptyset)$ . □

Rappelons que si  $H$  est connexe et définissable, alors  $H$  est le stabilisateur de son unique type générique. On obtient donc le résultat suivant :

**Corollaire 4.4.4.** *Tout sous-groupe définissable connexe du produit cartésien  $G^n$  est  $\text{acl}^{\text{eq}}(\emptyset)$ -définissable.*

**Corollaire 4.4.5.** *Tout groupe monobasé  $\omega$ -stable est abélien-par-fini.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que la composante connexe  $G^0$  de  $G$  est abélienne.

Soient deux réalisations  $g$  et  $h$  indépendantes du type générique principal. Le graphe de la conjugaison par  $g$  sur  $G^0$  définit un sous-groupe connexe de  $G^0 \times G^0$ . De même pour la graphe de la conjugaison par  $h$  sur  $G^0$ . Ces sous-groupes sont donc définissables sur  $\text{acl}^{\text{eq}}(\emptyset)$ , par le corollaire 4.4.4. L'automorphisme qui fixe  $\text{acl}^{\text{eq}}(\emptyset)$  et envoie  $g$  sur  $h$  doit les fixer, donc ils sont égaux. On conclut que le générique  $g \cdot h^{-1}$  est central dans  $G^0$ , donc  $Z(G^0)$  est d'indice fini dans  $G^0$  et donc égal à  $G^0$ , par connexité. □

**Corollaire 4.4.6.** *Tout ensemble  $A$ -définissable (dans un produit cartésien) d'un groupe monobasé  $\omega$ -stable est combinaison booléenne de translatés  $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$ -définissables de sous-groupes connexes de  $G$  définissables sur  $\text{acl}^{\text{eq}}(\emptyset)$ .*

En fait, le corollaire précédente est une équivalence.

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que si  $a$  et  $b$  sont dans les mêmes translatés  $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$ -définissables de sous-groupes connexes de  $G$  définissables sur  $\text{acl}^{\text{eq}}(\emptyset)$ , alors  $a \equiv_A b$ . Or, les types forts  $\text{stp}(a/A)$  et  $\text{stp}(b/A)$  sont deux génériques du même translaté d'un groupe connexe, donc il doivent être le même type. □

# Bibliographie

- [1] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro, and F. O. Wagner. Die böse Farbe. *J. Inst. Math. Jussieu*, 8(3) :415–443, 2009.
- [2] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro, and M. Ziegler. Red fields. *J. Symbolic Logic*, 72(1) :207–225, 2007.
- [3] J. B. Goode. Hrushovski’s geometries. In *Proceedings of the 7th Easter Conference on Model Theory (Wendisch-Rietz, 1989)*, volume 104 of *Seminarberichte*, pages 106–117. Humboldt Univ. Berlin, 1989.
- [4] E. Hrushovski. A new strongly minimal set. *Ann. Pure Appl. Logic*, 62(2) :147–166, 1993. Stability in model theory, III (Trento, 1991).
- [5] E. Hrushovski. The Mordell-Lang conjecture for function fields. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(3) :667–690, 1996.
- [6] E. Hrushovski and B. Zilber. Zariski geometries. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1) :1–56, 1996.
- [7] A. Pillay. *An introduction to stability theory*, volume 8 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1983.
- [8] A. Pillay. *Geometric stability theory*, volume 32 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. Oxford Science Publications.
- [9] B. Poizat. *Groupes stables*. Nur al-Mantiq wal-Ma’rifah, 2. Bruno Poizat, Lyon, 1987. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique.
- [10] K. Tent and M. Ziegler. *A course in model theory*, volume 40 of *Lecture Notes in Logic*. Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA, 2012.
- [11] F. O. Wagner. Bad fields in positive characteristic. *Bull. London Math. Soc.*, 35(4) :499–502, 2003.
- [12] M. Ziegler. An exposition of hrushovski’s new strongly minimal set. [home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/preprints/tutorial.pdf](http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/preprints/tutorial.pdf), 2010.