Глава 1

Элементарные классы отношений

– Eh bien, mon prince, Gênes et Lucques ne sont plus que des apanages, des *поместья*, de la famille Buonaparte. Non, je vous préviens, que si vous ne me dites pas que nous avons la guerre, si vous vous permetez encore de pallier toutes les infamies, toutes les atrocités de cet Antichrist (ma parole, j'y crois), je ne vous connais plus, vous n'êtes plus *мой верный раб*, comme vous dites. ...

Л.Н. Т.

1.a Локальные изоморфизмы между отношениями

Если E – множество и m – целое положительное число, то *m-арным отношением на E* называется подмножество R декартовой степени E^m. Множество E назовем *носителем* этого отношения. Если m-ка $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ из E^m принадлежит R , то говорят, что она *удовлетворяет* отношению R ; в противном случае $\bar{a}$ *не удовлетворяет* R . Число m называется *арностью* этого отношения.

Изоморфизмом двух m-арных (для одного и того же m) отношений R на R' соответственно на E и E' называется любая биекция s между E и E', такая, что для любой m-ки $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ из E кортеж $s\bar{a} = (sa_1, \ldots, sa_m)$ удовлетворяет R' тогда и только тогда, когда $\bar{a}$ удовлетворяет R . Если существует некоторый изоморфизм между R и R' , то говорят, что эти отношения *изоморфны*. Очевидно, что обратное отображение к изоморфизму, точно так же, как и композиция двух изоморфизмов, само является изоморфизмом.

Ограничение m-арного отношения R на подмножество E' его носителя E есть, по определению, m-арное отношение R' на E' , образованное m-ками из E' удовлетворяющими R . Как синоним говорят также, что R' – *ограничение* R или, что R – *расширение* R' . *Вложением* R' в R называется изоморфизм R' на некоторое ограничение R .

По определению мощность отношения есть число элементов его основного множества (а не число удовлетворяющих ему кортежей, как можно подумать) . Следовательно, будем говорить, что отношение *конечно*, если таковым является его носитель. Информацию о кардиналах и ординалах читатель, найдет в начале главы 8 . Мы вводим эти понятия тогда, когда нам будут нужны более точные вычисления с бесконечными мощностями.

Локальный изоморфизм из R в R' есть по определению изоморфизм между конечными ограничениями R и R' . Для локального изоморфизма s через $Dom(s)$ обозначим его область определения, а через $Im(s)$ – его образ. Если R и R' имеют одну и ту же арность, то множество $S_0(R, R')$ локальных изоморфизмов из R в R' всегда содержит пустой локальный изоморфизм $\varnothing$ (поскольку для любого $m > 0$, существует единственное m-арное отношение с пустым носителем само являющееся пустым множеством) . Возможно, оно состоит только из последнего, например, если R – рефлексивное бинарное (т.е. двухместное) отношение, а R' – антирефлексивное бинарное отношение.

Теперь определим индукцией по натуральным числам p множества $S_p(R, R')$ (локальных) *p-изоморфизмов* из R в R' : поскольку семейство $S_0(R, R')$ определено выше, то достаточно объяснить как построить $S_{p+1}(R, R')$ при предположении, что $S_0(R, R'), \ldots, S_p(R, R')$ уже построены. Локальный изоморфизм s принадлежит $S_{p+1}(R, R')$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет двум следующим условиям :

– (*челнок вперед*) для любого a из носителя E отношения R существует продолжение t отображения s (т.е. $Dom(s) \subset Dom(t)$ и s есть ограничение t на $Dom(s)$) , определенное на a , лежащее в $S_p(R, R')$;

– (*челнок назад*) для любого b из носителя E' отношения R', существует продолжение t отображения s, образ которого содержит b, лежащее в $S_p(R, R')$.

Так как множества S_p определены индукцией по p, то изучение их свойств может быть сделано лишь рекурсией по этому натуральному числу. Мы собираемся доказать некоторые из них.

Факт *Если $p < q$, то каждый q-изоморфизм является и p-изоморфизмом (т.е. $S_p(R, R') \supseteq S_q(R, R')$).*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого p $S_p(R, R') \supseteq S_{p+1}(R, R')$; это верно для $p = 0$, поскольку каждый 1-изоморфизм является по определению локальным изоморфизмом. Итак, предположим, что $p = q + 1$ и утверждение истинно для q: если s $(p + 1)$-изоморфизм, то для любого a из E он имеет продолжение на a являющееся p-изоморфизмом, которое следовательно, является $(p - 1)$-изоморфизмом по предположению индукции; точно так же, условие челнока вперед выполняется для всех b из E'. Значит, s является p-изоморфизмом.

□

Факт *Любое ограничение p-изоморфизма само является p-изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть s – p-изоморфизм и s' – ограничение s. Если $p = 0$, то s' – локальный изоморфизм и поэтому будет 0-изоморфизмом. Если $p = q + 1$, то для любого a из E существует изоморфизм t, определенный на a продолжающий s и являющийся q-изоморфизмом. Этот t продолжает также отображение s'. Так как мы имеем аналогичное условие челнока назад, то это означает, что s' является p-изоморфизмом.

□

Оставляем читателю проверку того, что обращение p-изоморфизма из R в R' есть p-изоморфизм из R' в R и, если t будет p-изоморфизмом из R' в R'', с $Dom(t) = Im(s)$, то композиция s и t есть p-изоморфизм из R в R''.

Факт *Если s – изоморфизм R на R', то любое конечное ограничение s является p-изоморфизмом из R в R' для любого p.*

Доказательство. Пусть t – конечное ограничение s. Для $p = 0$ оно является локальным изоморфизмом. Если $p = q+1$, то для любого a из E ограничение s на $Dom(t) \cup \{a\}$ является по предположению индукции q-изоморфизмом; те же рассуждения проходят и для обратного челнока и, значит, t будет p-изоморфизмом.

□

Локальные изоморфизмы, которые продолжаются до изоморфизма, являются в некотором роде тривиальными p-изоморфизмами; мы увидим среди них совершенно другие, позволяющие сравнивать неизоморфные отношения!

Множества $S_p(R, R')$ образуют тем самым убывающую цепь :

$S_0(R, R') \supseteq S_1(R, R') \supseteq \cdots \supseteq S_p(R, R') \supseteq S_{p+1}(R, R') \supseteq \ldots$. Я предоставляю снова читателю проверку того, что если $S_p(R, R') = S_{p+1}(R, R')$, то для всех $q > p$, $S_p(R, R') = S_q(R, R')$, это имеет место, в частности, если множество

$S_p(R, R')$ – пустое!

Локальный изоморфизм s из R в R' называется *ω-изоморфизмом* или ещё *элементарным локальным изоморфизмом*, если он является p-изоморфизм для любого натурального p , и через $S_\omega(R, R')$ обозначим множество всех таких изоморфизмов: здесь ω обозначает наименьший счетный ординал, который идет непосредственно за всеми натуральными числами; читатель, не имеющий сейчас никакого представления об ординалах, может рассматривать его пока только как простое удобное обозначение.

Если $S_\omega(R, R')$ пусто, значит, $S_p(R, R')$ пусто для некоторого p; действительно, если для каждого p существует p-изоморфизм, то $S_\omega(R, R')$ содержит по крайней мере пустое отображение. Два случая возможны для локального изоморфизма s : $s \in S_p(R, R')$, $s \notin S_{p+1}(R, R')$ для некоторого p, и в этом случае говорят, что его *ранг Фраиссе равен* p; иначе s принадлежит всем $S_p(R, R')$, тогда говорят, что его *ранг Фраиссе больше или равен* ω.

Мы ввели до настоящего момента три равнозначных выражения: " $s \in S_p(R, R')$ " , "s – p-изоморфизм" и "ранг Фраиссе s больше или равен p ". И мы собираемся обогатить наш словарь: будем говорить, что кортежи элементов $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ из носителя R и $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ из носителя R' *p-эквивалентны*, если они соответствуют друг другу при некотором p-изоморфизме. В других терминах можно сказать, что они удовлетворяют одним и тем же равенствам: $a_i = a_j \iff b_i = b_j$; и отображение s , определенное как $sa_1 = b_1, \ldots, sa_k = b_k$ является p-изоморфизмом из R в R' . Разумеется, речь идёт об отношении эквивалентности, т.е. рефлексивном, симметричном и транзитивном бинарном отношении. Мы обозначим этот факт через $(\bar{a}, R) \sim_p (\bar{b}, R')$, где указание отношения, для которого берётся кортеж $\bar{a}$, является особенно необходимым, если, например, R' – расширение R , так как в этом случае $\bar{a}$ может быть рассмотрен как кортеж из носителя R' . Когда контекст достаточно ясен, можно ограничиться записью $\bar{a} \sim_p \bar{b}$. Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ p-эквивалентны для всех p то говорят, что они ω-эквивалентны или, что *они имеют одинаковый тип.*

Если пустое отображение является p-изоморфизмом из R в R' для всех p (что равносильно тому, что $S_\omega(R, R')$ не пусто), то говорят, что R и R' *элементарно эквивалентны*, и обозначают $R \sim_\omega R'$. В более общих терминах, говорят, что R и R' p-эквивалентны и пишут $R \sim_p R'$, если $\varnothing$ является p-изоморфизмом из R в R'.

Теперь предположим, что R' – расширение R и носитель E отношения R – подмножество носителя E' отношения R' . Скажем, что это расширение *элементарно*, если для любого $\bar{a}$ из E $(\bar{a}, R)$ и $(\bar{a}, R')$ имеют одинаковый тип: другими словами тождественное отображение, ограниченное на любую конечную часть E, является p-изоморфизмом из R в R' для любого p. Тот факт, что R' – элементарное расширение R обозначается через $R \prec R'$. В этом случае также говорят, что R элементарное сужение R' Изоморфизм R на элементарное сужение R' называется *элементарным вложением* R в R' . Естественно, если R элементарно вкладывается в R' , то R и R' элементарно эквивалентны.

Теперь можно сделать паузу, поскольку мы определили на нескольких страницах два основных понятия теории моделей, главной деятельностью которой является изучение класса отношений, элементарно эквивалентных данному отношению R , а также элементарных вложений одного отношения в другое из этого класса.

Упражнение 1.1 *Докажите, что если R и R' элементарно эквивалентны, то для любого кортежа $\bar{a}$ элементов из носителя отношения R и для любого p , существует кортеж $\bar{b}$ элементов из носителя отношения R', такой, что $(\bar{a}, R) \sim_p (\bar{b}, R')$.*

Упражнение 1.2 *Если $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_k)$, $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_l)$, тогда их сочленением называется кортеж $\bar{a}^\frown\bar{b} =_{def} (a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l)$. Докажите, что если R' – элементарное расширение R и $\bar{a}$ из базы отношения R , а $\bar{b}$ из базы отношения R' , то для любого p найдется $\bar{c}$ из базы отношения R, такой, что $(\bar{a}^\frown\bar{c}, R) \sim_p (\bar{a}^\frown\bar{b}, R')$.*

1.b Примеры

Тривиальным случаем элементарной эквивалентности является изоморфность. Как показывает следующая теорема это единственно возможный случай для конечных отношений.

Теорема 1.3 *Если R – конечное отношение, определенное на p элементах, то любое $(p+1)$-эквивалентное ему отношение S ему же изоморфно.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_p$ является полным списком всех элементов носителя отношения R . Так как $\varnothing$ является $(p+1)$-изоморфизмом между R и S , то существует его продолжение S_1 на $\{a_1\}$, являющееся p-изоморфизмом. Последнее имеет продолжение s_2 на $\{a_1, a_2\}$, являющееся $(p-1)$-изоморфизмом. Продолжая дальше, получим 1-изоморфизм s из R в S , определённый на всех точках носителя отношения R . Значит s вложение R в S . Если бы существовал элемент b в носителе отношения S, лежащий вне образа s , то мы не смогли бы продолжить s^{-1} до локального изоморфизма t определенного на b , так как $t(b)$ должно отличаться от $a_1, \ldots, a_p$. Как следствие, s – сюръективное отображение и, значит, оно является изоморфизмом между R и S.

$\square$

В частности, конечное отношение не имеет элементарных расширений кроме самого себя.

Теперь рассмотрим натуральное число m и два m-арных пустых отношения R и R' , соответственно на носителях E и E' . Значит, R и R' не удовлетворяются никакой m-кой с их носителей; R и R' изоморфны тогда и только тогда, когда E и E' имеют одинаковое "число элементов" (это число может быть конечным или бесконечным; более точно говорят, что они имеют один и тот же кардинал). По теореме 1.3, если они элементарно эквивалентны и одно из них конечно, то они изоморфны; докажем, что, напротив, если оба бесконечны, то они элементарно эквивалентны (в этом случае, они не обязательно изоморфны, например, если E – множество натуральных чисел, а E' – множество действительных чисел). На самом деле, в данном случае любой локальный изоморфизм из R в R' является p-изоморфизмом для любого p (это влечёт, что $\varnothing$ является ω-изоморфизмом из R в R' !) . Для этих отношений, локальный изоморфизм есть нечто иное, как инъекция конечной части E в E' ; покажем переход от p к $p+1$. Если я добавлю к $Dom(s)$ элемент a , то поскольку E' бесконечно, можно найти вне $Im(s)$ элемент b и продолжать s до t , полагая $t(a)=b$; доводы для "челнока назад" аналогичны.

Тот же результат остаётся в силе, если R и R' совпадают со всеми m-ками своих носителей. Как и в предыдущем случае, ситуация сводится к определению на множествах E и E' структуры, связанной только с равенством.

Теперь изучим, чуть менее тривиальный случай унарных отношений (т.е. одноместных). Такому отношению R на носителе E , припишем символ (x,y), называемый его *характером*, где x полагается равным числу элементов E удовлетворяющих R , если это число конечно и символу ∞ в противном случае, а y равно числу элементов E не удовлетворяющих R , если это число конечно и символу ∞ в противном случае. Например, если ω_1 обозначает наименьший несчётный кардинал, то существуют, с точностью до изоморфизма, три унарных отношения с характером (∞,∞) , соответствующие делениям (ω,ω_1) , (ω_1,ω) , (ω_1,ω_1) .

Теорема 1.4 *Два унарных отношения R и S элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый характер, и в этом случае каждый локальный изоморфизм из R в S является p-изоморфизмом для любого p .*

Доказательство. То, что s – локальный изоморфизм из R в S , значит, что если $a\in R$, то $sa\in S$ и если $b\notin R$, то $sb\notin S$. Предположим, что характер R равен (p,y) и , что S $(p+1)$-эквивалентно R и обозначим через $a_1,\dots,a_p$ элементы носителя отношения R , удовлетворяющие R . Так как $\varnothing$ $(p+1)$-изоморфизм, то после p шагов получим 1-изоморфизм s , определенный на $a_1,\dots,a_p$. Элементы $sa_1,\dots,sa_p$ удовлетворяют S и невозможно найти другой элемент b носителя отношения S, удовлетворяющий S , поскольку иначе не сможем продолжить s^{-1} на b . Следовательно, характер S имеет вид (p,z). Тем же способом показывается, что если R и S $(q+1)$-эквивалентны и характер R имеет вид (x,q) , то такой же вид имеет характер S .

Это доказывает, что если R и S элементарно эквивалентны, то они имеют одинаковый характер. Обратно, пусть они имеют одинаковый характер и s является локальным изоморфизмом из R в S. Теперь если, например, добавить элемент a, удовлетворяющий R к $Dom(s)$, то всегда можно найти и добавить к $Im(s)$ элемент b, удовлетворяющий S, откуда и следует утверждение.

□

Начиная с арности 2 , задача определения классов элементарной эквивалентности достигает своей общей сложности. Здесь можно обсудить только несколько простых случаев бинарных отношений. Бинарное отношение R называется *рефлексивным*, если ему удовлетворяют все пары (a,a) для любого a из носителя. Если S 1-эквивалентно рефлексивному отношению, то оно само рефлексивно, действительно если S не содержит пару (b, b) , то невозможно определить локальный изоморфизм из S в R , определенный на b . Отношение R называется *симметричным*, если вместе с каждой парой (a, b) , содержащей-ся в нем, оно содержит и пару (b, a) ; оно называется *антисимметричным* если оно не содержит одновременно (a, b) и (b, a) , когда a отличен от b . Оставляем читателю проверку того, что отношение, 2-эквивалентное симметричному (соответственно антисимметричному) отношению, само является таковым. Оно называется *транзитивным*, если как только (a, b) и (b, c) удовлетворяют R , ему удовлетворяет также (a, c) . Отношение 3-эквивалентное транзитивному отношению само является транзитивным. Наконец, R называется *тотальным*, если для всех a и b из его носителя, по крайней мере одна из пар (a, b) и (b, a) принадлежит R . Отношение, 2-эквивалентное тотальному отношению, тотально.

Каждый знает с первого курса университета, что *отношение эквивалентности* это рефлексивное, симметричное, транзитивное бинарное отношение и что отношению эквивалентности на носителе E соответствует разбиение множества E на попарно дизъюнктные классы. Мы увидели, что бинарное отношение, 3-эквивалентное отношению эквивалентности, само является отношением эквивалентности. Достаточно легко характеризовать отношения эквивалентности, с помощью одной "характеристической функции", связанной с ними. Но это – предмет упражнения 1.6 . Я же довольствуюсь подробным рассмотрением частного случая :

Теорема 1.5 *Если R, R' два отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных классов, то они элементарно эквивалентны; и любой локальный изоморфизм между R и R' является p-изоморфизмом для любого p . Обратно, если R, R' два элементарно эквивалентных отношения эквивалентности и R состоит из бесконечного числа бесконечных классов, то таковым является и R' .*

Доказательство. Пусть s – локальный изоморфизм из R в R' , если добавить a к области его определения, то независимо от того, конгруэнтен a некоторому элементу из $Dom(s)$ по модулю R или он лежит в новом классе, всегда можно продолжить s до локального изоморфизма, определенного на a, поскольку R' состоит из бесконечного числа бесконечных классов, откуда и следует утверждение.

Обратно, легко видеть, что если R имеет по крайней мере p классов и R' ему p-эквивалентно, то оно также имеет по крайней мере p классов. Если каждый класс отношения R имеет по крайней мере p элементов и R' ему p-эквивалентно, то оно обладает тем же свойством.

$\square$

Упражнение 1.6 *С каждым отношением эквивалентности R связана функция f_R , которая числу p приписывает число p-элементных классов, если оно конечно, иначе символ ∞ . Она приписывает символу ∞ число бесконечных классов, если это число конечно, иначе символ ∞ .*

1. *Докажите, что если $f_R(q) = p$ и R' $(p + q + 1)$-эквивалентно R , то $f_{R'}(q) = p$.*

2. *Докажите, что если R имеет по крайней мере p классов, каждый из которых имеет по крайней мере p элементов, и R' $p+q$-эквивалентно R , то оно имеет такое же свойство.*

3. *Пусть R_p отношение эквивалентности, полученное из R заменой каждого класса мощности, не меньшей p , на p-элементный класс ; докажите, что R и R_p p-эквивалентны.*

4. *Докажите, что R и R' элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда f_R и $f_{R'}$ равны за исключением, возможно бесконечности, в том случае когда они принимают бесконечное число раз ненулевые значения.*

5. *Предположим, что R и R' элементарно эквивалентны и R' расширение R . Докажите, что это расширение элементарно тогда и только тогда, когда каждый конечный класс R' , содержащий элемент из носителя R является классом R .*

Если участь отношений эквивалентности легко решается, то проблема классификации *цепей* (рефлексивные, антисимметричные, транзитивные и тотальные бинарные отношения; их называют также *линейными порядками*) с точностью до элементарной эквивалентности, является намного более сложной, и здесь можно дать только некоторые простые, но тем не менее поучительные, частные случаи. Локальный изоморфизм между цепями есть просто напросто возрастающая функция : если $a < b$, то обязательно $sa < sb$.

Цепь, имеющая по крайней мере два элемента, называется *плотной* , если между любыми её двумя точками всегда найдется третья; говорят также, что она не имеет концевых элементов, если она не имеет ни наименьшего ни наибольшего элементов.

Теорема 1.7 *Бинарное отношение, 3-эквивалентное плотной цепи без концевых элементов, само является плотной цепью без концевых элементов; обратно две плотные цепи без концевых точек C и C' элементарно эквивалентны, так как любой локальный изоморфизм из C в C' является элементарным.*

Доказательство. Пусть C – плотная цепь без концевых элементов. Мы знаем, что бинарное отношение C' , 3-эквивалентное C , является цепью. Если цепь C' была бы не плотной, то существовали бы последовательные a и b из C' . Пусть s – 1-изоморфизм из C' в C , определенный на a и b , пусть c из C таков, что $s(a) < c < s(b)$. Тогда невозможно продолжить s^{-1} на c , что противоречит гипотезе. Если цепь C' имела бы наименьший элемент a , то 1-изоморфизм s из C в C' , содержащий в своем образе a , не смог бы продолжаться на точке $b < s^{-1}(a)$, что является противоречием. Аналогично показывается, что C' не имеет наибольшего элемента.

Обратно, предположим, что C и C' – плотные цепи, без концевых элементов. Локальный изоморфизм s из C в C' отображает $a_1 < \cdots < a_k$ на $b_1 < \cdots < b_k$. Если добавим, например, a к первой цепочке, то можно выбрать

b в соответствующем сегменте второй цепи, который всегда непуст, так как C' – плотный порядок без концевых элементов. Значит, любой 0-изоморфизм является 1-изоморфизмом. Это влечет, что каждый 0-изоморфизм является p-изоморфизмом для любого натурального p . □

Следовательно, в частности, цепь $\mathbb{R}$ действительных чисел элементарно эквивалентна цепи $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Противоположностью к плотным цепям являются дискретные цепи, которые не содержат точек сгущения; каждый элемент, кроме наибольшего, имеет последователя (b называется *последователем* a и a называется *предшественником* b , если $a < b$ и между ними ничего нет) , и каждый элемент, за исключением наименьшего, имеет предшественника. Легко видеть, что бинарное отношение, 3-эквивалентное дискретной цепи без концевых элементов само является таковым. Будет доказано и обратное, что две дискретные цепи без концевых элементов (например, цепь $\mathbb{Z}$ целых чисел и цепь $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$, полученная из двух копий $\mathbb{Z}$, идущих одна за другой) элементарно эквивалентны.

Пусть a и b взяты из такой цепи и $a < b$. Полагаем $d(a,b) = q$, если строго между a и b находятся q элементов и $d(a,b) = \infty$ если таковых бесконечное число. Тогда $d(a,b) = 0$ означает, что a и b последовательные элементы. Обещанный результат является следствием следующей теоремы, которая среди прочих утверждает, что $\varnothing$ является p-изоморфизмом для любого p .

Теорема 1.8 *Пусть C и C' – две бесконечные дискретные цепи без концевых элементов и $a_1 < \cdots < a_k$ – возрастающая последовательность из первой, а $b_1 < \cdots < b_k$ – возрастающая последовательность из второй цепи. Для их p-эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы $d(a_i,a_{i+1})$ и $d(b_i,b_{i+1})$ были равными или оба были $\geq 2^p - 1$ для любого i, $1 \leq i \leq k-1$.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по p . Это очевидно для $p = 0$, поскольку по условию теоремы обе последовательности одинаково упорядочены. Докажем переход от p к $p+1$, и сначала, что если две последовательности удовлетворяют поставленному условию, то они $p+1$-эквивалентны.

Добавим, например, a к первой последовательности. Предположим сначала, что $a < a_1$. Если $d(a,a_1) = q$, то можно ответить таким элементом $b < b_1$, что $d(b,b_1) = q$. Если $d(a,a_1) = \infty$ ответим таким элементом $b < b_1$, что $d(b,b_1) = 2^p - 1$. Аналогично рассматривается случай $a > a_k$. Предположим теперь, что $a_i < a < a_{i+1}$, и рассмотрим два случая :

(i) $d(a_i,a_{i+1}) < 2^{p+1} - 1$, в этом случае $d(a_i,a_{i+1}) = d(b_i,b_{i+1})$ и отвечаем таким b , $b_i < b < b_{i+1}$, что $d(a_i,a) = d(b_i,b)$.

(ii) $d(a_i,a_{i+1}) \geq 2^{p+1} - 1 = (2^p - 1) + 1 + (2^p - 1)$; если $d(a_i,a) = q < 2^p - 1$, ответим таким b , что $d(b_i,b) = q$ и так как $d(b_i,b_{i+1}) \geq 2^{p+1} - 1$, то $d(b,b_{i+1}) \geq 2^p - 1$. Аналогично, если $d(a,a_{i+1}) = q < 2^p - 1$, ответим таким b , что $d(b,b_{i+1}) = q$; и если $d(a_i,a) \geq 2^p - 1$ и $d(a,a_{i+1}) \geq 2^p - 1$, то можно ответить таким b , что $d(b_i,b) \geq 2^p - 1$ и $d(b,b_{i+1}) \geq 2^p - 1$.

Докажем теперь, что условие теоремы является необходимым для того, чтобы две последовательности были $(p+1)$-эквивалентны. Рассмотрим три случая

(i) $d(a_i, a_{i+1}) \geq 2^{p+1} - 1 = (2^p - 1) + 1 + (2^p - 1)$; выберем a таким, что $a_i < a < a_{i=1}$, $d(a_i, a) \geq 2^p - 1$, $d(a, a_{i+1}) \geq 2^p - 1$; должен существовать b между b_i и b_{i+1}, такой, что (a_i, a, a_{i+1}) и (b_i, b, b_{i+1}) были p-эквивалентны, значит, по предположению индукции $d(b_i, b) \geq 2^p - 1$, $d(b, b_{i+1}) \geq 2^p - 1$ и $d(b_i, b_{i+1}) \geq 2^{p+1} - 1$

(ii) $d(a_i, a_{i+1} \leq 2^{p+1} - 3 = (2^p - 2) + 1 + (2^p - 2)$; если a_i и a_{i+1} являются последовательными элементами, то таковыми должны быть и b_i, b_{i+1} , иначе можно найти a между a_i и a_{i+1}, такой, что $d(a_i, a)$ и $d(a, a_{i+1})$ оба строго меньше $2^p - 1$. Тогда по предположению индукции, существует b в другой цепи такой, что $d(a_i, a) = d(b_i, b)$, $d(a, a_{i+1}) = d(b, b_{i+1})$ и $d(a_i, a_{i+1}) = d(b_i, b_{i+1})$.

(iii) $d(a_i, a_{i+1}) = 2^{p+1} - 2 = (2^p - 2) + 1 + (2^p - 1)$; итак, существует b между b_i и b_{i+1}, такой, что $d(b_i, b) = 2^p - 2$, $d(b, b_{i+1}) \geq 2^p - 1$ и $d(b_i, b_{i+1}) \geq 2^{p+1} - 2$. Но на самом деле $d(b_i, b_{i+1}) = 2^{p+1} - 2$, поскольку иначе по первому случаю, примененному в другом направлении (от b_i до a_i) , если $d(b_i, b_{i+1}) \geq 2^{p+1} - 1$, то это же верно и для $d(a_i, a_{i+1})$.

$\square$

Таким образом, мы видим, что расширение дискретной цепи без концевых элементов является элементарным, если значение d сохраняется для любых двух элементов из меньшей цепи; например, цепь $\mathbb{Z}$ целых чисел и цепь $\mathbb{Z}^*$ целых чисел без нуля элементарно эквивалентны, поскольку они изоморфны; однако $\mathbb{Z}^*$ не является элементарным сужением $\mathbb{Z}$, так как -1 и 1 – последовательные элементы в $\mathbb{Z}^*$, но не в $\mathbb{Z}$.

Напротив, расширения плотных цепей без концевых элементов, или отношений эквивалентности с бесконечным числом бесконечных классов, или унарных отношений с одинаковым характером, всегда элементарны, поскольку в этих случаях локальные изоморфизмы являются элементарными.

Упражнение 1.9 *Докажите, что две плотные цепи с наименьшим элементом, но без наибольшего элемента (соответственно : с наибольшим элементом, но без наименьшего; с наименьшим и наибольшим элементами) элементарно эквивалентны.*

Упражнение 1.10 *Докажите, что две дискретные цепи с наименьшим элементом (он обозначается символом 0) , но без наибольшего элемента (например, цепь ω натуральных чисел) элементарно эквивалентны. Классифицируйте дискретные цепи с точностью до элементарной эквивалентности.*

Упражнение 1.11 1°) *Если C – цепь, то через C^- обозначим обратную цепь, где $a < b$ в смысле C тогда и только тогда, когда $b < a$ в смысле C^- . Докажите, что если C и C' элементарно эквивалентны, то таковыми являются и C^-, C'^- .*

2°) *Если C и D – цепи с дизъюнктными носителями (если это не так, то можно заменить C и D их изоморфными копиями с дизъюнктными носителями) , цепь $C + D$ является общим расширением C и D , где считается, что* *каждый элемент C меньше каждого элемента из D . Докажите, что если цепи C и C' элементарно эквивалентны так же, как и D и D', то таковыми являются $C+D$ и $C'+D'$.*

Упражнение 1.12 *Для данных двух цепей C и D , лексикографическим произведением C на D называется цепь, определенная на декартовом произведении их носителей и такая, что $(a,b)<(c,d)$ в смысле $C\times D$, если $b<d$ в смысле D , или $b=d$ и $a<c$ в смысле C . Если оба множества C и D являются множеством букв русского алфавита, то это обычный порядок расположения слов из двух букв в в любом словаре русского языка.*

1°) *Докажите, что дискретные цепи без концевых точек и только они представимы в виде $\mathbb{Z}\times C$. Аналогично, только те, которые имеют наименьший элемент, но не имеют наибольшего элемента представимы в виде $\omega+\mathbb{Z}\times C$.*

2°) *Докажите что, если C и C' , точно так же как и D и D' , элементарно эквивалентны, то таковыми являются $C\times D$ и $C'\times D'$.*

1.c Бесконечный "челночный" метод

У нас нет никакой причины останавливаться на ω . Используя "челнок" ещё один раз, определяем понятие $(\omega+1)$-изоморфизма, потом $(\omega+2)$-изоморфизма и т.д., пока не дойдем до $\omega+\omega$ и далее рекуррентно определяем понятие α-изоморфизма для всех ординалов α . Пока нам не нужно знать много об ординалах, за исключением того, что они являются объектами, призванными для обозначения моментов ожидания. Они позволяют делать рассуждения по индукции, а также построения по индукции, которые содержат не только конечное число этапов. После всех натуральных чисел идет ординал ω , потом $\omega+1,\ldots,\omega+n,\ldots$. После всех $\omega+n$ идет $\omega+\omega=\omega\times 2,\ldots,\omega\times n,\ldots$ и после всех $\omega\times n$ идет $\omega\times\omega$ и т.д. Пока довольствуемся замечанием, что имеется два вида ординалов – *последователи*, которые имеют вид $\alpha+1$, и другие, как $0,\omega,\omega\times n,\omega\times\omega,\ldots$, которые называются *предельными*. Определим индукцией по α семейство $S_\alpha(R,R')$ α-изоморфизмов из R в R' следующим образом:

- если α предельный, то s принадлежит $S_\alpha(R,R')$ тогда и только тогда, когда он принадлежит $S_\beta(R,R')$ для всех β , строго меньших чем α .
- если $\alpha=\beta+1$, то s принадлежит $S_\alpha(R,R')$ тогда и только тогда, когда для для любого расширения области определения или области значения одним элементом s продолжается на это расширение до β-изоморфизма из R в R' .

Нетрудно проверить, что α-изоморфизм является β-изоморфизмом для любого β, меньшего, чем α, значит, для локального изоморфизма возможны только два случая :

- существует α, такой, что $s\in S_\alpha(R,R')$, $s\notin S_{\alpha+1}(R,R')$, в этом случае говорят, что s имеет *ранг Фраиссе* α .

– $s \in S_\alpha(R, R')$ для всех ординалов α , тогда говорят, что ранг Фраиссе для s не определен, или ещё, что он равен ∞ , и через $S_\infty(R, R')$ обозначается пересечение всех $S_\alpha(R, R')$.

Так же, как в конечном случае определяются понятия α-эквивалентности и ∞-эквивалентности. Так как всегда ординалов больше, чем элементов $S_0(R, R')$, то существует на самом деле α_0 , зависящий от R и R' , такой что $S_\infty(R, R') = S_{\alpha_0}(R, R')$ (это множество, конечно, может быть пустым) , который равен первому ординалу α , для которого $S_{\alpha+1}(R, R') = S_\alpha(R, R')$. Точно так же ∞-изоморфизм обладает следующим свойством : для любого расширения области определения или области значения одним элементом он продолжается на это расширение до ∞-изоморфизма.

Не надо путать ∞-изоморфизм, например, с ω-изоморфизмом. Вы можете предпочесть формулировку Эренфойхта челнока Фраиссе, где элементарная эквивалентность характеризуется следующим образом : рассматриваются два игрока, первый из которых каждый раз выбирает элемент из R и R' , второй отвечает выбором элемента в другом отношении. По определению второй игрок выигрывает игру из n ходов, если в конце игры получили два (локально) изоморфных кортежа длины n . Два отношения элементарно эквивалентны, если для любого p второй игрок имеет стратегию выигрыша в игре из p шагов, т.е. стратегию, меняющуюся вместе с p , действенную при условии, что он заранее уведомлен о том, что игра продлится только p ходов. Напротив, в случае ∞-эквивалентности, второй игрок имеет выигрывающую стратегию, одну и ту же, приносящую ему выигрыш независимо от числа игровых ходов.

Возвращаясь к примерам параграфа 1.b , мы видим, что любой локальный изоморфизм между двумя элементарно эквивалентными унарными отношениями, или также между двумя отношениями эквивалентности с бесконечным числом бесконечных классов, или ещё между двумя плотными линейными порядками без концевых точек, является ∞-изоморфизмом. Противоположный случай : дискретные непустые порядки без концевых точек могут не быть ∞-эквивалентными, например, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ $(\omega + 1)$-эквивалентны, но не $(\omega + 2)$-эквивалентны, так как пара (a, b) из второго порядка с $d(a, b) = \infty$, не имеет ω-эквивалентную пару из первого.

Главной целью теории моделей является изучение ω-изоморфизмов или элементарных изоморфизмов; однако очень полезно выделить среди них ∞-изоморфизмы, и мы собираемся их определять заново без помощи ординалов, для того чтобы не пугать читателя плохо знакомого с ними. Эта иерархия локальных изоморфизмов похожа на иерархию Кантора–Бендиксона, которая исторически побудила введение ординалов, и о которой собираюсь сказать несколько слов, как я надеюсь, помогающих прояснить ситуацию.

Пусть E – топологическое пространство и E_1 получено удалением из E всех изолированных точек . Пространство E_1 – замкнутое, возможно пустое, оно называется *производным* от E . Пусть E_2 – производное от E_1 и т.д. Возможно, $E_{n+1} = E_n$ для некоторого n , в этом случае процесс прерывается, поскольку дошли до множества без изолированных точек. Но в противном случае можно продолжать, полагая $E_\omega = \cap E_n$, потом $E_{\omega+1}$ есть производное от E_ω и т.д. Таким образом, определяем убывающую цепь подмножеств E_α пространства

E индукцией по ординалу α . Если α – предельный, то E_α – пересечение E_β для $\beta < \alpha$ (в частности, поскольку нет таких β , что $\beta < 0$, $\quad E_0 = E$) , если $\alpha = \beta + 1$, то E_α – производное от E_β , т.е. E_β за вычетом его изолированных точек. По определению E_∞ есть пересечение всех E_α . На самом деле E_∞ совпадает с E_α для некоторого достаточно большого α , зависящего от E , и это – самое большое подмножество E без изолированных точек (естественно, E_∞ может быть пустым) . Но существует другой более простой, или по крайней мере, более элементарный способ построения : это брать объединение всех подмножеств E , не содержащих изолированных точек!

Вернемся к нашим локальным изоморфизмам. Для данных двух n-арных отношений R и R' , назовем *семейством Карпа* семейство K всех локальных изоморфизмов из R в R' , имеющих следующее свойство : для любого элемента s из K , для любого расширения области определения или области значений одним элементом, s имеет продолжение из K на это расширение. Очевидно, что объединение семейств Карпа само является семейством Карпа и, что объединение всех семейств Карпа образует множество, возможно пустое, всех ∞-изоморфизмов из R в R' . Наконец, сказать, что R и R' ∞-эквивалентны значит, что $\varnothing$ есть ∞-изоморфизм из R в R' , или ещё, что существует непустое семейство Карпа локальных изоморфизмов из R в R' .

Упражнение 1.13 *Докажите, что два отношения эквивалентности ∞-эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же характеристическую функцию.*

Теорема 1.14 *Два счетных ∞-эквивалентных отношения изоморфны.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ – перечисление носителей R и R' соответственно. Построим последовательность $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ ∞-изоморфизмов из R в R' и последовательность $t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots$ ∞-изоморфизмов из R в R', таких, что $s_0 = t_0 = \varnothing$, $\quad s_{n+1}$ определен на a_{n+1} и продолжает t_n^{-1}, $\quad t_{n+1}$ определен на b_{n+1} и продолжает s_{n+1}^{-1} . Заметим, что тогда s_{n+1} определен на $a_1, \ldots, a_{n+1}$ и продолжает s_n ; положим $s(a_n) = s_n(a_n)$; на самом деле $s(a_n) = s_m(a_n)$ для всех s_m , определенных на a_n ; точно так же полагаем $t(b_n) = t_n(b_n)$. Ясно, что s и t взаимно обратные изоморфизмы между R и R'.

$\square$

Например два счетных плотных порядка без концевых точек изоморфны; результат неверен для несчетных мощностей: порядки $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} + \mathbb{Q}$ ∞-эквивалентны, но не изоморфны. Философия всего этого то, что два ∞-эквивалентных отношения намного больше похожи друг на друга чем те, которые элементарно эквивалентны.

1.d Исторические и библиографические примечания

Одно ораторское предостережение перед началом этого первого примечания: математическая книга – это книга не об истории науки, и эти примечания не претендуют ни на полноту, ни на четкое отражение зарождения и современных тенденций математической логики. Напротив, они приведены для того, чтобы снабдить читателя, желающего узнать откуда все это произошло, какими-то ссылками и посоветовать ему некоторые труды о темах, продолжающих этот курс, но которые здесь будут только слегка задеты.

Разработка логики с помощью локальных изоморфизмов, с условиями "челнока" принадлежат Фраиссе; обычно ссылаются на [ФРАИССЕ, 1954a], а также на [ФРАИССЕ, 1953], но эти результаты содержатся в его диссертации, защищенной несколько раньше; наиболее доступное изложение имеется в его курсе [ФРАИССЕ, 1971/72/75], чтение которого я настоятельно рекомендую. То, что называется здесь p-изоморфизмом, означает (p, p)-изоморфизмы Фраиссе, его понятие (k, p)-изоморфизма призвано охватить не только кванторный ранг формулы (см. главу 2), но также её "ранг чередования".

Ссылки по поводу элементарной эквивалентности и элементарного расширения будут приведены в следующей главе. Примеры параграфа 1.b являются настолько элементарными, что их можно рассматривать как часть фольклора теории моделей; воздержимся от выяснения того, кто первым их охарактеризовал с точностью до элементарной эквивалентности. Отметим лишь, что случай унарных отношений был разобран в [СКОЛЕМ, 1919].

Представление челнока Фраиссе в форме игры двух лиц обязано Эренфойхту [ЭРЕНФОЙХТ, 1961]; он это сделал после Фраиссе много лет спустя и с четкой ссылкой на работу последнего. Однако это не помешало многим логикам, европейским и американским, приписать только Эренфойхту авторство "челнока" Фраиссе.

Понятие производного топологического пространства есть отправная точка теории множеств; именно для этого Кантор изобрел ординалы; по этому поводу можно консультироваться у ([МУР, 1982] стр. 32 и следующие) . Первое систематическое рассмотрение бесконечных языков и связанных с ними бесконечных "челноков" было предпринято Кэролом Карпом [КАРП, 1964]; отсюда происходит выражение "семейство Карпа", предложенное Фраиссе.

Теорема 1.14 приписывается Дэну Скотту [СКОТТ, 1965]; однако заметим, что она появилась на одиннадцать лет раньше в [ФРАИССЕ, 1954]; одной из её прародительниц является теорема из [КАНТОР, 1895], утверждающая, что с точностью до изоморфизма существует только один счетный плотный линейный порядок без концевых точек; этот результат был доказан с помощью "челнока" Хаусдорфом [ХАУСДОРФ, 1914].