Глава 10

Простые модели

– Rzkd sdsd, bd sxod !
– Bah ! On s'y habitue ...

M.R.

10.a Теорема об опускании типов

В предыдущей главе мы строили самые богатые модели по возможности реализации типов: в сущности, мы амальгамировали структуры, контролируя кардинал теоремой Левенгейма-Сколема. Но мы понимаем, что для построения других моделей, надо найти те, которые опускают некоторые типы, и понять, при каких условиях можно реализовать какой-то тип, при этом опуская другой. Для этого мы располагаем в основном двумя методами. В одном случае, где необходимы гипотезы о стабильности, мы справляемся с положением полностью; изучение стабильных теорий начнется следующей главе и будет длиться до конца книги. Другой случай, который мы изучаем здесь, и который основывается на одном топологическом свойстве, имеет очень общее значение, но применяется только тогда, когда все *счетно*.

Напоминаем, что подмножество A топологического пространства E называется *плотным*, если любое непустое открытые подмножество E содержит точку A. Легко видеть, что пересечение двух, и значит также конечного числа, открытых плотных множеств открыто и плотно. Говорят, что E имеет *свойство Бэра* если для каждого счетного семейства $O_1, \ldots, O_n, \ldots$ открытых плотных множеств, их пересечение снова плотно, в частности, если E – непустое, то оно также непустое. Подмножество X такого пространства называется *жирным*, или *котощим*, если оно содержит счетное пересечение открытых плотных множеств ; оно называется *тощим* если его дополнение жирно, то есть если оно содержится в счетном объединении замкнутых множеств с пустыми внутренностями. Значит, счетное пересечение жирных множеств жирно, счетное объединение тощих множество тоще.

Когда мы хотим показать существование x со свойством $P(x)$, можно построить объект x, удовлетворяющий P, или показать, что множество x, удовлетворяющих P, не пусто: одна из возможностей – показать, что это множество является жирным в топологическом пространстве, имеющем свойство Бэра.

Теорема 10.1 *Компактные и локально компактные пространства (каждая точка имеет базу компактных окрестностей) имеют свойство Бэра.*

Доказательство. Покажем сначала, что любой компакт E локально компактен; пусть a – точка E, и пусть O – открытая окрестность a; так как пространство отделимо, то для каждой точки b вне O существует открытая окрестность U_b точки a и открытая окрестность V_b точки b, такие, что $U_b \cap V_b = \emptyset$; дополнение O замкнуто, значит компактно и покрывается открытыми множествами, следовательно, конечное число среди них $V_1, ..., V_n$ достаточно для этого покрытия; дополнение $V_1 \cup ... \cup V_n$, замкнутое и содержащееся в O, является окрестностью a, так как оно содержит открытое множество $U_1 \cap \cdots \cap U_n$.

Пусть таким образом E локально компактно; O_1 , ..., $O_n, \ldots$ – счетная последовательность открытых плотных подмножеств в E, и U – непустое открытое подмножество в E : нам надо найти точку, лежащую в U и в каждом O_n . Пусть a_1 – точка из $U \cap O_1$, которая является её окрестностью; a_1 имеет компактную окрестность K_1 , содержащуюся в $U \cap O_1$. Таким образом, K_1 содержит открытое U_1 , содержащее a_1 . Пусть а$_2$ – точка $U_1 \cap O_2$, обладающая компактной окрестностью $K_2 \subset U_1 \cap O_2$, и K_2 содержит открытую окрестность U_2 точки a$_2$ и т.д. , на $(n+1)$-ом этапе выбирается a_{n+1} из $U_n \cap O_{n+1}$, имеющая компактную окрестность K_{n+1} точки a_{n+1} , которая содержит открытую окрестность U_{n+1} . Пересечение убывающего семейства K_n непустых компактов непусто, и содержится в U и в каждой O.

□

Рассмотрим теперь теорию T, *не обязательно полную, но в счетном языке.* Обозначим через $H(T)$ и назовем пространством перечислений Генкина моделей T следующее подпространство $S_\omega(T)$, или скорее $S_{\omega\times\omega}(T)$: как в разделе 4.с, рассмотрим символы переменной a_{ij} (обозначенные a, а не x, чтобы передать оттенок), и перечисление формул $f(\bar{a},x)$ таких, что если $\bar{a} \subset E_0 \cup \cdots \cup E_n$, где $E_k = \{a_{0k},\ldots,a_{nk},\ldots\}$, то формула $f(\bar{a},x)$ имеет свидетеля $a_{f(\bar{a},x)}$ в E_{n+1} : это назначение свидетелей зафиксируем раз и навсегда. Пространство Генкина – *замкнутое подмножество* $S_{\omega\times\omega}(T)$, определенное формулами $(\exists x)f(\bar{a},x) \to f(\bar{a},a_{f(\bar{a},x)})$: если формула $f(\bar{a},x)$ истинна для некоторого x , она истинна для своего свидетеля. Как видно, точка этого компактного пространства, замкнутого в $S_{\omega\times\omega}(T)$, соответствует перечислению Генкина конечной или счетной модели T; нам не нужно больше вводить f^H для элиминации кванторов, так как мы знаем теперь теорему компактности!

Индукцией по j определим *пакет* $P(a_{ij})$, присоединенный к a_{ij}, следующим образом:

- если $j=0$, то $P(a_{i0}) = \{a_{i0}\}$,
- если $j \neq 0$, тогда a_{ij} – свидетель единственной формулы $f(\bar{a},x)$, где вторые индексы всех элементов $\bar{a}$ меньше j; пакет a_{ij} является по определению объединением пакетов элементов $\bar{a}$ ещё плюс a_{ij} . Отсюда ясно, что всегда $P(a_{ij})$ – конечное множество.

Лемма 10.2 *Пусть F – замкнутое множество с пустой внутренностью в $S_n(T)$, определенное формулой $f_u(\bar{x})$; тогда, каков бы ни был кортеж $\bar{a}$ из a_{ij} , формулы $f_u(\bar{a})$ определяют замкнутое множество с пустой внутренностью в $H(T)$.*

Доказательство. Пусть $\langle g(\bar{b})\rangle$ – непустое открыто-замкнутое подмножество $H(T)$: мы должны доказать, что $\langle g(\bar{b}) \cap (\cup\langle\neg f_u(\bar{a})\rangle)$ содержит точку из $H(T)$. Рассмотрим объединение пакетов элементов, представленных в $\bar{a}$ и $\bar{b}$, и пусть c – кортеж из a_{ij} , который необходимо добавить к $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы получить это объединение. Пусть $F(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ – конъюнкция формул $g(\bar{b})$ и $(\exists x)f(\bar{\alpha},x) \to f(\bar{\alpha},a_{f(\bar{\alpha},x)})$ для каждого свидетеля $a_{f(\bar{\alpha},x)}$, присутствующего в $\bar{a}\frown\bar{b}\frown\bar{c}$; это формула, которая использует в качестве параметров только $\bar{a}\frown\bar{b}\frown\bar{c}$.

Так как $\langle g(\bar{b})\rangle \cap H(T)$ не пустое, мы берем оттуда один элемент : он представляет перечисление Генкина конечной или счетной модели M для T, которая *удовлетворяет каждой из формул* $(\exists x)f(\bar{\alpha},x) \to f(\bar{\alpha},a_{f(\bar{\alpha},x)})$. Следовательно, $M \vdash F(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$, $M \vdash (\exists\bar{y})(\exists\bar{z})F(\bar{a},\bar{y},\bar{z})$, и формула $(\exists\bar{y})(\exists\bar{z})F(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ определяет непустое открыто-замкнутое подмножество $S_n(T)$.

Далее, это открытое множество не может целиком содержаться в $\cap\langle f_u(\bar{x})\rangle$, и существует счетная модель N для T с кортежом $\bar{a}'$, удовлетворяющим формуле $(\exists\bar{y})(\exists\bar{z})F(\bar{a}',\bar{y},\bar{z})$ и не удовлетворяющим всем f_u ; пусть $\bar{b}'$ и $\bar{c}'$ в N, такие, что $N \vdash F(\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}')$: теперь можно брать перечисление Генкина N так, чтобы элементы из $\bar{a}'^\frown\bar{b}'^\frown\bar{c}'$ имели те же индексы i, j , что им соответствует в $\bar{a}^\frown\bar{b}^\frown\bar{c}$; это возможно, так как формула F утверждает в точности то, что можно брать a_{ij} как свидетеля необходимой формулы. Это перечисление Генкина является точкой $H(T)$, удовлетворяющей $g(\bar{b})$, и не удовлетворяющей всем $f_u(\bar{a})$.

□

Теорема 10.3 (об опускании типов) *Пусть T – теория, не обязательно полная, счетного языка; пусть A_n – тощее подмножество $S_n(T)$ для каждого натурального n; тогда существует модель T, опускающая каждый тип каждого A_n .*

Доказательство. Каждое множество A_n содержится в счетном объединении замкнутых множеств $F_{nm}(\bar{x})$ с пустой внутренностью в $S_n(T)$. По предыдущей лемме каждый раз, когда заменяем в F_{nm} кортеж $\bar{x}$ кортежом переменных, взятых из перечисления Генкина, получаем замкнутые множества с пустой внутренностью в $H(T)$. Все эти $F_{nm}(\bar{a})$ образуют счетное семейство замкнутых множеств с пустой внутренностью и их объединение тощее; так как $H(T)$ – непустой компакт, дополнение этого объединения плотно, значит, непусто. И точка этого дополнения является перечислением Генкина модели T, опускающей любой тип каждого A_n .

□

Примером замкнутого множества с пустой внутренностью является множество, состоящее из одной неизолированной точки: если T счетна, таким образом, существует модель T, что опускает этот тип. Напротив, если T полна и p – изолированная точка, то она является единственной, удовлетворяющей некоторой формуле $f(\bar{x})$, и так как $T \vdash (\exists\bar{x})f(\bar{x})$, любая модель реализует p. Напомним, что если T полна, то n-типы, реализованные в модели N для T образуют, плотное подмножество $S_n(T)$.

В теореме опускания типов, все счетно, как язык, так и модель, которая строится: это вызвано счетной природой свойства Бэра. Отметим, что если T – теория алгебраически замкнутых полей нулевой характеристики, то тип "x трансцендентен над $\mathbb{Q}$ ", являющийся единственным неизолированным типом $S_1(\emptyset)$ (остальные изолированы своим минимальным уравнением над $\mathbb{Q}$), опускается только в единственной модели T, являющейся алгебраическим замыканием $\mathbb{Q}$; все несчетные модели его реализуют.

10.b Простые модели, атомные модели: счетный случай

Мы рассматриваем здесь полную теорию T. Подмножество A модели M теории T называется *атомным* (по умолчанию : над $\emptyset$), если тип любой n-ки из A изолирован в $S_n(T)$; если $A \subset B \subset M$, говорят, что B *атомно* над A , если B атомно в смысле $T(A)$, то есть если тип любого кортежа $\bar{b}$ из B над A изолирован. Отметим, что A атомно над A.

Лемма 10.4 *Тип $\bar{a}^\frown\bar{b}$ изолирован, если и только если тип a изолирован и тип $\bar{b}$ над $\bar{a}$ изолирован.*

Доказательство. Пусть $f(\bar{x},\bar{y})$ – формула, изолирующая тип $\bar{a}^\frown\bar{b}$; тогда тип ā изолирован формулой $(\exists\bar{y})f(\bar{x},\bar{y})$, и тип $\bar{b}$ над $\bar{a}$ изолируется формулой $f(\bar{a},\bar{y})$. Обратно, пусть $g(\bar{x})$ – формула, изолирующая тип $\bar{a}$, и $h(\bar{a},\bar{y})$ – формула с параметрами из $\bar{a}$, изолирующая тип $\bar{b}$ над $\bar{a}$, тогда тип $\bar{a}^\frown\bar{b}$ изолирован формулой $g(\bar{x})\wedge h(\bar{x},\bar{y})$.

□

Замечание. Главным аргументом в доказательстве леммы является то, что отображение, которое типу $\bar{a}^\frown\bar{b}$ сопоставляет тип $\bar{a}$, является открытой, непрерывной сюръекцией $S_{n+m}(T)$ на $S_n(T)$.

Лемма 10.5 *Если A атомно, то A атомно над $\bar{a}$ для каждого конечного подмножества $\bar{a}$ из A.*

Доказательство. Тип $\bar{a}^\frown\bar{b}$ изолирован, значит тип $\bar{b}$ над $\bar{a}$ изолирован.

□

Лемма 10.6 *Если $A\subset B\subset C$, B атомно над A и C атомно над B , тогда C атомно над A .*

Доказательство. Пусть $\bar{c}\subset C$ и $f(\bar{b},\bar{x})$ – формула с параметрами в B, изолирующая тип $\bar{c}$ над B; пусть $g(\bar{a},\bar{y})$ – формула с параметрами в A, изолирующая тип $\bar{b}$ над A; тип $\bar{c}$ над A изолируется формулой $(\exists\bar{y})g(\bar{a},\bar{y})\wedge f(\bar{y},\bar{x})$.

□

Если $A\subset B\subset C$, C атомно над A и $B\setminus A$ бесконечно, то C не обязательно атомно над B ; например, модель M теории бесконечного множества (язык состоит из равенства) атомна только над своими конечными подмножествами.

Теорема 10.7 *Атомная модель ω-слабо однородна; две атомные модели одной и той же полной теории ∞-эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют одинаковый тип в атомной модели; добавляем α к $\bar{a}$, и пусть $f(\bar{x},y)$ – формула, изолирующая тип $\bar{a}^\frown\alpha$. Кортеж $\bar{a}$ удовлетворяет формуле $(\exists y)f(\bar{x},y)$, значит, таков же и $\bar{b}$, имеющий тот же тип, что и $\bar{a}$, и можно в модели найти β, такой, чтобы $\bar{a}^\frown\alpha$ и $b^\frown\beta$ имели один и тот же тип. Так как T полна, каждая модель T реализует все её изолированные типы (так как, если $\langle f(\bar{x})\rangle$ не пустое, $T\vdash(\exists\bar{x})f(\bar{x}))$, и две атомные модели T реализуют одни и те же чистые типы; они, значит, ∞-эквивалентны по 9.4

□

Говорят, что модель *проста* если она вкладывается элементарно в любую модель T; если $A\subset M$ и M – простая модель $T(A)$, то говорят, что она проста над A.

Теорема 10.8 *Полная счетная теория T имеет простую модель, если и только если она имеет атомную модель; и в этом случае она имеет с точностью до изоморфизма только одну простую модель M, которая является её единственной атомной счетной моделью ; эта модель ω-сильно однородна и проста над каждым своим конечным подмножеством.*

Доказательство. Если M реализует не изолированный тип p , то по теореме об опускании типов, существует модель N для T , опускающая p , и M не может вкладываться элементарно в N и поэтому M не проста. Если M проста, то значит она атомна, и счетна поскольку T имеет счетные модели; если у T есть атомная модель, то по теореме Левенгейма она имеет такую же счетную модель. Покажем, что эта модель M и проста.

Рассмотрим перечисление M *типа* ω: $M = \{a_o, \ldots, a_n, \ldots\}$ и пусть N – какая-нибудь модель T; так как тип a_0 изолирован, его можно реализовать в N; после этого, так как тип a_1 над a_0 изолирован (лемма 10.4), можно также его реализовать в N, и т.д. реализуя последовательно типы a_{n+1} над $\{a_0, \ldots, a_n\}$, получают элементарное вложение M в N. Две атомные счетные модели, будучи ∞-эквивалентными, изоморфны; по 9.5 они также ω-сильно однородны. Если M атомна и счетна, она остаётся атомной и счетной, а значит простой, над каждым из своих конечных подмножеств.

□

Возможно, что простая модель M для T имеет собственные элементарные ограничения; очевидно, такое ограничение N модели M – также простая модель T; в счетном случае, где имеется единственность простой модели, N изоморфна M. Если A – бесконечное подмножество простой модели M, M не обязательно проста над A; сначала потому, что, возможно, что не существует простой модели над A; ещё потому, что если она существует, скажем N, то N вкладывается элементарно в M, таким образом, N – также простая модель T, но, даже если имеется единственность простой модели, M и N могут быть изоморфными, но не быть A-изоморфными.

Теорема 10.9 *Счетная полная теория T имеет простую модель если и только если для любого n изолированные типы в $S_n(T)$ образуют плотное множество.*

Доказательство. Если M атомна, то типы, реализованные в M и являющиеся изолированными, образуют плотное множество. Обратно, если изолированные типы образуют плотное множество, дополнение к ним замкнуто с пустой внутренностью, которое может опускаться по теореме об опускании типов.

□

Теорема 10.10 *Если T полная счетная теория такая, что для любого n $S_n(T)$ конечно или счетно, тогда для каждого конечного множества параметров $\bar{a}$, T имеет простую модель над $\bar{a}$.*

Доказательство. Так как тип $\bar{b}$ над $\bar{a}$ определен типом $\bar{a}^\frown\bar{b}$, каждое $S_n(\bar{a})$ также счетно. Таким образом, достаточно понять, что в счетном компакте изолированные точки образуют плотное множество; однако множество неизолированных точек является объединением счетного числа замкнутых множеств с пустой внутренностью; по теореме 10.1 его дополнение плотно.

□

10.c Теории с конечным числом счетных моделей

Полная счетная теория T называется *ω-категоричной* (или *$\aleph_0$-категоричной*) если она имеет с точностью до изоморфизма только одну счетную модель; тогда по теореме Левенгейма ясно, что эта счетная модель – простая.

Теорема 10.11 (Рылль-Нардзевского) *Полная счетная теория T ω-категорична, если и только если для любого n множество $S_n(T)$ конечно.*

Доказательство. Если $S_n(T)$ бесконечно для некоторого n, то по компактности оно не может состоять только из изолированных точек; значит, оно содержит неизолированный тип p, и T имеет счетную модель, которая его реализует, и другую, которая его опускает: она не ω-категорична. Обратно, если $S_n(T)$ конечно для любого n, то оно дискретно, и любая модель T атомна.

$\square$

Так как тип $\bar{a}^\frown\bar{b}$ определен типом $\bar{a}$ и типом $\bar{b}$ над $\bar{a}$, то условие "$S_n(T)$ конечно для любого n" эквивалентно условию "$S_1(\bar{a})$ конечно для каждого кортежа параметров $\bar{a}$". Это условие можно также переформулировать так : для любого n число формул $f(\bar{x})$ от n свободных переменных $x_1, \ldots, x_n$, рассмотренные с точностью до эквивалентности по модулю T, конечно; действительно, множеств вида $\langle f(x) \rangle$ конечное число $\iff S_n(T)$ конечно.

Отметим, что две произвольные модели T являются ∞-эквивалентными, если и только если она ω-категорична; и в этом случае её каждая модель ω-насыщенна. Примеры ω-категоричных теорий: теория конечной структуры, теория бесконечного множества, отношения эквивалентности из бесконечного числа бесконечных классов, плотного порядка без концевых элементов, безатомные булевы алгебры. Как следствие 10.11, имеем следующий, немного неожиданный результат.

Теорема 10.12 *Если структура N интерпретируема в ω-категоричной структуре (т.е. её теория ω-категорична), то N также ω-категорична.*

Доказательство. Тип кортежа в смысле N определен типом кортежа который его представляет в M (см. раздел 9.d); для каждого n число n-типов в M конечно, точно так же, как и в N.

$\square$

В этой последней теореме, интерпретируемость означает интерпретируемость без параметра. Если мы хотим доказать такую же теорему, разрешая параметры, надо чтобы общее число параметров, участвующих в интерпретации N в M, было конечным, что, например, имеет место всегда, если язык N конечен (если M ω-категорична, то $(M, \bar{a})$ также !). Невозможно, чтобы полная счетная теория имела точно две счетные модели с точностью до изоморфизма, как утверждает следующая теорема:

Теорема 10.13 *Полная счетная не ω-категоричная теория имеет по крайней мере три счетные попарно неизоморфные модели.*

Доказательство. Если, для некоторого n множество $S_n(T)$ несчетно, то поскольку любой тип реализуется в некоторой счетной модели и каждая счетная модель может реализовать только счетное число типов, T имеет несчетное число счетных моделей. Однако, если для любого n множество $S_n(T)$ счетно, то T имеет простую модель M_1 по теореме 10.10 , и счетно-насыщенную модель M_2 по теореме 9.12 ; если T не ω-категорична, то для некоторого n множество $S_n(T)$ бесконечно и содержит неизолированную точку p, которая опускается в M_1 и реализуется в M_2 , следовательно M_1 и M_2 не изоморфны.

Пусть $\bar{a}$ – реализация p ; так как $S_n(T)$ бесконечно и любой тип над $\emptyset$ имеет расширение над $\bar{a}$, то $S_n(\bar{a})$ также бесконечно и содержит не изолированную точку; снова по теореме 10.10, существует простая модель над $\bar{a}$, которая не проста, так как он реализует p, и не насыщенна, так как она атомна над $\bar{a}$: это наша третья модель M_3 .

□

Пример полной теории с тремя счетными моделями: язык содержит бинарный предикат $\leq$ и счетный список констант $\{a_0, \ldots, a_n, \ldots\}$; аксиомы выражают, что $\leq$ – плотная цепь без концевых точек, и что $a_0 < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \ldots$. Легко видеть, что эта теория T полна и элиминирует кванторы; единственный не изолированный тип p из $S_1(T)$ содержит все формулы $x > a_n$.

В модели M_1 последовательность a_n конфинальна; в M_2 она мажорирована, но не имеет наименьшую мажоранту; и в M_3 она имеет наименьшую мажоранту a : это простая модель над a. С помощью этого примера, можно достаточно легко построить полную теорию, имеющую ровно n счетных моделей с точностью до изоморфизма, для каждого конечного $n > 3$.

Отметим, что если язык L счетен, то имеется только 2^ω L-структур с носителем ω. Действительно, так как каждое n-арное отношение является подмножеством счетного ω^n, их имеется 2^ω ; каждому символу языка надо назначить отношение, что дает отображение ω в 2^ω , и $(2^\omega)^\omega = 2^{\omega\times\omega} = 2^\omega$. С точностью до изоморфизма, полная счетная теория может иметь только самое большее 2^ω счетных моделей, и мы знаем, что этот максимум достигается (теория дискретных порядков без концевых элементов); кроме того есть такие (теория алгебраически замкнутых полей данной характеристики, теория следования на целых числах), что имеют точно ω счетных моделей.

Предположение Вота утверждает, что полная счетная теория, имеющая бесконечное число счетных моделей с точностью до изоморфизма, имеет их ω или 2^ω. Если принимать континуум-гипотезу, то $2^\omega = \omega^+$, и предположение становится неинтересным! Значительным аргументом в его пользу является теорема Морли, которая утверждает что такая теория имеет либо $\aleph_0$, либо $\aleph_1$, либо $2^{\aleph_0}$ моделей; хотя остается исключить только $\aleph_1$, в случае когда оно не равно $2^{\aleph_0}$, предположение Вота является все ещё открытой проблемой.

10.d Конструируемые модели

Говорят, что множество параметров A *конструируемо*, если существует его ординальное перечисление $A = \{\ldots a_\alpha, \ldots\}$, такое, что для любого α тип a_α над

$A_\alpha =^{def} \{a_\beta\}_{\beta<\alpha}$ изолирован; такое перечисление, не обязательно инъективное, называется *конструкцией* A. Говорят, что B конструируемо над A, если оно таково в смысле $T(A)$, т.е. если существует ординальное перечисление $\{b_\alpha\}$ множества B, такое, что для любого α тип b_α изолирован над $A \cup \{b_\beta\}_{\beta<\alpha}$.

В этом последнем случае, если $A \subset B$, то так как элементы A выделены в языке, они виртуально присутствуют в каждом множестве параметров: их добавление не меняет типы; они атомны над каждым множеством параметров. По этой причине при конструкции B над A очень часто довольствуются перечислением точек $B \setminus A$. Если надо, точки из A можно вставлять неважно куда, и получить конструкцию в предыдущем смысле.

Аналогично, если элемент a_α принадлежит A_α, то его можно перепрыгнуть, сохраняя конструкцию: если оставим только первые случаи появления элементов A в конструкции, то получим инъективную конструкцию. Отметим, что если A конструируемо, то *оно атомно*; чтобы это понять, докажем индукцией по α, что A_α атомно ; если α пределен, то $A_\alpha = \cup A_\beta$, и кортеж из A_α является кортежем из некоторого A_β ; для $A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \{a_\alpha\}$: так как A_α атомно и $A_{\alpha+1}$ атомно над A_α , утверждение следует из леммы 10.6 .

Лемма 10.14 *Если множество A конструируемо, то оно конструируемо также над любым кортежем $\bar{a}$ из A; в действительности, каждая конструкция A над $\emptyset$ является конструкцией над $\bar{a}$.*

Доказательство. Так как A конструируемо над A_α , оно атомно над A_α , и тип $\bar{a}^\frown a_\alpha$ над A_α изолирован; это значит, что тип a_α над $A_\alpha \cup \{\bar{a}\}$ также изолирован (лемма 10.4).

□

Пусть A – конструируемое множество; мы выберем некоторую конструкцию, и кроме того, для любого α мы выберем формулу $f_\alpha(\bar{b}_\alpha, x)$, изолирующую тип a_α над A_α . Элемент $\bar{b}_\alpha$ таким образом из A_α , он составлен из элементов a_β с индексами, меньшими чем α. Тогда мы определяем индукцией по α *пакет* элемента a_α как объединение пакетов элементов из $\bar{b}_\alpha$ и плюс a_α ; понятно, что этот пакет P_α для a_α – конечное множество, и что $f_\beta(\bar{b}_\beta, x)$ – формула с параметрами из P_α для любого a_β из P_α . Говорят, что подмножество C в A *замкнуто*, если вместе с каждым элементом в C содержится его пакет; иначе говоря, C является объединением пакетов.

Лемма 10.15 *Замкнутое подмножество C конструируемого множества A конструируемо.*

Доказательство. Покажем, что если $a_\alpha \in C$, то его тип над $C_\alpha = A_\alpha \cap C$ изолирован. Его тип над A_α изолирован формулой $f_\alpha(\bar{b}_\alpha, x)$: два элемента, которые удовлетворяют этой формуле, имеют один и тот же тип над A_α , и тем более над каждым подмножеством A_α , содержащим $\bar{b}_\alpha$. Так как C_α содержит $\bar{b}_\alpha$, образованный из элементов C, индексы которых строго меньше α, эта формула изолирует также тип a_α над C_α . Индексы α элементов $a_\alpha \in C$ образуют вполне упорядоченное множество; достаточно перенумеровать C его ординалом, чтобы получить конструкцию.

□

Лемма 10.16 *Если C – замкнутое подмножество конструируемого множества A, то тип C (над $\emptyset$) определяется формулами $f_\alpha(\bar{b}_\alpha, a_\alpha)$, для $a_\alpha \in C$.*

Доказательство. Заметим, что каждое $C_\alpha = A_\alpha \cap C$ замкнуто, и покажем индукцией, что формулы $f_\beta(\bar{b}_\beta, a_\beta)$, $a_\beta \in C_\alpha$, определяют его полный тип; если $\alpha = 0$, то $C_0 = \emptyset$ и его – тип полный, поскольку T полна; если α – предельный и ненулевой, пусть $g(\bar{c})$ – формула с параметрами из C_α ; тогда все элементы $\bar{c}$ лежат в некотором C_β , $\beta < \alpha$, и по гипотезе индукции либо $g(\bar{c})$, либо $\neg g(\bar{c})$ выводится из $f_\gamma(\bar{b}_\gamma, a_\gamma)$, $a_\gamma \in C_\beta$. Если α – последователь и $\alpha = \beta + 1$, то тип C_β определяется $f_\gamma(\bar{b}_\gamma, a_\gamma)$, $a_\gamma \in C_\beta$, а тип a_β (β – наибольший элемент в α!) над C_β определяется формулой $f_\beta(\bar{b}_\beta, a_\beta)$.

□

Лемма 10.17 *Если C – замкнутое подмножество конструируемого множества A (относительно данной конструкции A и выбора фиксированных изолирующих формул), то A конструируемо над C, и каждое перечисление $A = \{\ldots b_\alpha, \ldots\}$, где $B_\alpha = \{a_\beta\}_{\beta<\alpha}$ замкнуто (относительно конструкции, выбранной вначале) для каждого предельного α, является конструкцией A над C .*

Доказательство. Покажем сначала, что A атомно над C; пусть $\bar{a}$ – конечное подмножество A , и пусть $\bar{a}^\frown\bar{b}$ – объединение пакетов элементов $\bar{a}$; тогда множество $C \cup \{\bar{a}, \bar{b}\}$ замкнуто, и по предыдущей лемме, тип $\bar{a}^\frown\bar{b}$ над C изолирован конъюнкцией формул $f_\alpha(\bar{b}_\alpha, a_\alpha)$, $a_\alpha \in \bar{a} \cup \bar{b}$; и так как тип $\bar{a}^\frown\bar{b}$ изолирован над C , тип $\bar{a}$ над C изолирован.

Покажем, что каждое перечисление как в условии предложения является конструкцией A над C . Любой ординал имеет вида $\alpha + n$, где α пределен (рассмотрите наименьший ординал, не имеющий такой вид : он не может быть ни предельным, ни последователем); по предположению B_α так же, как и $B_\alpha \cup C$, замкнуто для предельного α; следовательно, тип $(b_\alpha, b_{\alpha+1}, \ldots, b_{\alpha+n})$ над $B_\alpha \cup C$ изолирован, что влечет, что тип $b_{\alpha+n}$ над $B_\alpha \cup \{b_\alpha, \ldots, b_{\alpha+n-1}\} \cup C = B_{\alpha+n} \cup C$ изолирован. Тогда ясно, что оригинальная конструкция является конструкцией A над C .

□

Мораль всего этого в том, что мы получаем другую конструкцию A, если его перенумеровываем не разъединяя маленькие пакеты. Мы видим, в частности, что если множество мощности $\varkappa$ конструируемо, то оно имеет конструкцию типа $\varkappa$: если оно конечно, то каждое перечисление является конструкцией, и если оно бесконечно, то оно имеет $\varkappa$ пакетов, которые нумеруем один за другим.

Некоторые *конструируемую модель* называют *строго простой моделью*; дело в том, что конструируемая модель действительно проста: если N – произвольная модель T, то так как тип a_α над A_α всегда изолирован, можно реализовать последовательно все эти типы в N. По теореме Левенгейма, мощность конструируемой модели (даже любого конструируемого множества параметров), меньше или равна $|T|$; конструируемая над A модель проста над A и имеет мощность, меньшую или равную $Max(|A|, |T|)$.

Отметим, что каждое перечисление типа ω счетной атомной модели, и вообще, счетного атомного множества параметров, является конструкцией. Следующая теорема утверждает единственность конструируемой модели, если она существует, и это без всякого предположения о мощности теории; мы показываем это челноком, который действует не поэлементно, а пакет за пакетом так, чтобы сохранять атомность моделей на каждом этапе.

Теорема 10.18 (Рессэр) *Если полная теория T имеет конструируемую модель, то она имеет единственную такую модель с точностью до изоморфизма и эта модель ω-сильно однородна.*

Доказательство. Пусть M и N – две конструируемые модели T; так как каждая из них, как простая, вкладывается в другую, они оба имеют один и тот же кардинал $\varkappa$; мы заметили, что можно найти конструкции длины $\varkappa$, перечисляя пакеты не разъединяя. Таким образом, $M = \{a_\alpha\}_{\alpha<\varkappa} = \cup_{\alpha<\varkappa} A_\alpha$, и $N = \{b_\alpha\}_{\alpha<\varkappa} = \cup_{\alpha<\varkappa} B_\alpha$.

Тогда индукцией по α построим последовательность f_α изоморфизмов из M в N, и последовательность g_α частичных изоморфизмов из N в M, таких, что:

- если $\beta < \alpha$, то f_β – ограничение f_αB, и g_β – ограничение g_α ;
- g_α является расширением f_α^{-1} , и $f_{\alpha+1}$ является расширением g_α^{-1} ;
- $Dom\ f_\alpha$, $Im\ f_\alpha$, $Dom\ g_\alpha$ и $Im\ g_\alpha$ являются замкнутыми множествами;
- $Dom\ f_\alpha$ и $Im\ f_\alpha$ имеют один и тот же тип, $Im\ g_\alpha$ и $Dom\ g_\alpha$ имеют один и тот же тип;
- если α пределен, то f_α – предел f_β , $\beta < \alpha$ и g_α – предел g_β , $\beta < \alpha$;
- если $\beta < \alpha$, то $a_\beta \in Dom\ f_\alpha$, и $b_\beta \in Dom\ g_\alpha$.

Для этого, мы берем $f_0 = g_0 = \emptyset$, и вообще на предельных этапах, берем предел уже построенных частичных изоморфизмов. Для $\alpha = \beta + 1$ поступаем так: сначала построим f_α следующим образом; добавляем к образу g_β , который замкнут, пакет P_β для a_β ; так как M атомна над $Im\ g_\beta$, тип P_β над этим множеством изолирован, и в модели N можно найти такой P'_β, чтобы $Im\ g_\beta \cup P_\beta$ и $Dom\ g_\beta \cup P'_\beta$ имели один и тот же тип, и продолжить g_β^{-1} до f_α^0 так, чтобы $f_\alpha^0(P_\beta) = P'_\beta$. Проблема в том, что P'_β не замкнуто в N; чтобы его замкнуть, надо к нему добавить конечное множество $P'_{\beta 1}$, и так как модель N атомна над $Im\ f_\alpha^0$, тип $P'_{\beta 1}$ над $Im\ f_\alpha^0 \cup P'_\beta$ изолирован, и можно найти в M такой $P_{\beta 1}$, что $Dom\ f_\alpha^0 \cup P_\beta \cup P_{\beta 1}$ и $Im\ f_\alpha^0 \cup P'_\beta \cup P'_{\beta 1}$ имели один и тот же тип; продолжим тогда f_α^0 до f_α^1 так, чтобы $f_\alpha^1(P_{\beta 1}) = P'_{\beta 1}$. Надо теперь замкнуть $Dom\ f_\alpha^1$ добавляя к нему конечное число элементов, и продолжать изоморфизмы таким образом, беря замыкание то области, то образа, проходя ω раза челноком: это возможно, так как каждый раз для замыкания добавляется только конечное число параметров и модели атомны, одна над $\mathrm{Dom} f_\alpha^n$, а другая над $Im\ f_\alpha^n$. Естественно, полагаем для $f_{\beta+1} = f_\alpha$ равным пределу этих f_α^n .

Затем построим g_α исходя из f_α , добавляя b_β к его области определения, и наконец замыкая образы и области определений челноком типа ω . Отображения $f_\varkappa$ и $g_\varkappa$, полученные в конце являются взаимно обратными изоморфизмами. Чтобы понять однородность, заметим, что если M конструируема, и если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют один и тот же тип в M , то $(M, \bar{a})$ и $(M, \bar{b})$ – конструируемые модели одной и той же теории; значит, они изоморфны.

□

Отметим, что дифференциальное замыкание, которое мы построили в разделе 6.b является конструируемой моделью; мы показали его ω-однородность, и его единственность в качестве конструируемой модели; но сейчас мы пока неспособны показать его единственность в качестве простой модели (если поле K, для которого берут дифференциальное замыкание, несчетно). Неизвестны примеры (несчетных !) теорий, имеющих простую модель, но не имеющей конструируемых моделей; и так как две простые модели вкладываются элементарно одна в другой, все известные простые модели – атомные.

10.e Минимальные модели

Модель называется *минимальной*, если она не имеет собственного элементарного ограничения; она *минимальна над* A, если это минимальная модель $T(A)$. Если полная теория T имеет простую модель и минимальную модель, то, так как первая вкладывается во вторую, T имеет только единственную простую модель, являющуюся её единственной минимальной моделью. Но кроме этого мы в общем ничего не можем сказать о минимальных моделях.

Очень специальный случай простой минимальной модели был уже изучен в разделе 6.a , когда алгебраическое замыкание множества параметров является моделью. Еще более крайний случай, когда *рациональное замыкание* множества параметров A, образованное из определимых элементов его алгебраического замыкания (т.е. a удовлетворяет формуле $f(x)$ с параметрами в A такой, что $T(A) \vdash (\exists! x) f(x)$), само является моделью.

Это иллюстрировано в арифметике; в этой теории, каждой формуле $\varphi(\bar{x}, y)$, сопоставляют определимую функцию $f_\varphi(\bar{x})$, которая $\bar{x}$ сопоставляет наименьший y , удовлетворяющий $\varphi(\bar{x}, y)$, если он существует, и сопоставляет 0, если такого y нет. Тогда ясно, что если A – подмножество модели M арифметики (или даже полной теории, содержащей арифметику Пеано), замыкание $\bar{A}$ множества A определимыми функциями (без параметров) в арифметике удовлетворяет тесту Тарского: $\bar{A}$ – рациональное замыкание A и является элементарным ограничением M; это простая минимальная модель над A. Мы видим также, что эта модель определена единственным образом с точностью до изоморфизма над A, так как отношения вида $f(\bar{a}) = g(\bar{a})$, $f(\bar{a}) + g(\bar{a}) = h(\bar{a}), \ldots$ полностью описаны типом A. Таким образом, в арифметике имеем простую минимальную модель над каждым множеством параметров; простая модель над $\emptyset$ является, очевидно, стандартной моделью.

Отметим, что если a алгебраичен над A, то его тип над A изолирован; действительно, берем формулу $f(x)$ с параметрами в A, удовлетворяющуюся n

точками, в том числе и a, с минимальным n: мы не можем отличить типы этих n точек, и эта формула изолирует тип a над A. Так как, алгебраический над A элемент остается таковым над любым надмножеством A, любое ординальное перечисление алгебраического замыкания A является конструкцией над A. Мы видим, что теория порядка целых чисел, так же, как и теория следования на целых числах, имеет простую минимальную модель, которая не является алгебраическим замыканием пустого множества; действительно, в этом случае алгебраических элементов над $\emptyset$ не существует.

Также легко построить теории с минимальными моделями и без простых моделей. Рассмотрим теорию T_1 на языке, включающем символ s унарной функции и унарный предикат $A(x)$, состоящую из аксиом теории следования на целых числах (s является биекцией без цикла). Назовем "блоком" копию $\mathbb{Z}$, снабженную унарным отношением; модели T_1 состоят из блоков. Чтобы получить теорию T, добавляем к T_1 следующие аксиомы для каждого распределения $\varepsilon = \{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\}$ символов, состоящих либо из ничего, либо из $\neg$:

$$(\exists x)(\varepsilon_0 A(x) \wedge \varepsilon_1 A(sx) \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n A(s^n x)) \ .$$

Таким образом, в модели T любое распределение $\bar{\varepsilon}$ реализовано последовательными элементами. Так как распределения $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}^\frown\bar{\varepsilon}$, $\ldots, \bar{\varepsilon}^\frown \ldots {}^\frown\bar{\varepsilon}, \ldots$ должны также быть реализованы, каждое ε появляется там в действительности бесконечное число раз, и обязательно на произвольно больших расстояниях (т.е. бесконечных или произвольно больших конечных) от данной точки. По компактности из этого заключаем, что ω-насыщенная модель T содержит бесконечное число копий каждого блока; Поскольку две такие модели ∞-эквивалентны, отсюда следует, что T – полная теория с элиминацией кванторов.

Если в модели T стираем блок B, не являющийся моделью T, то получаем снова модель T: если блок B не реализует распределение $\bar{\eta}$, то $\bar{\varepsilon}^\frown\bar{\eta}$ должно быть реализовано в другом блоке для любого распределения $\bar{\varepsilon}$. Таким образом, минимальная модель T – это блок, который является моделью T. Легко видеть, что их существует 2^ω попарно не изоморфных; берем сначала копию следования на отрицательных целых числах, с унарным предикатом A, таким, чтобы -1 и -2 были в A , и чтобы все распределения $\bar{\varepsilon}$ реализовались; достаточно выбрать перечисление этих распределений $\bar{\varepsilon}_0, \ldots, \bar{\varepsilon}_n, \ldots$ и помещать их впритык одного за другим. Каждому подмножеству X в ω мы сопоставляем блок B_X, имеющий построенное выше распределение на целых отрицательных числах и такой, что если $x \geq 0$, то $x \in A$, если и только если $x = 2y + 1$, для $y \in X$. Так как -1 и -2 являются наибольшими двумя подряд идущими элементами в B_X, удовлетворяющими A, здесь 0 обнаруживается, и B_X и B_Y изоморфны, только если $X = Y$. Так как имеются несколько минимальных моделей, не существует простой модели. Кроме того, если мы назовем "периодическим" блок, полученный повторением одного и того же распределения $\bar{\varepsilon}$, то видим, что модель T, составленная из периодических блоков, не содержит никакую минимальную модель.

Упражнение 10.19 *Рассмотрим компактное и тотально вполне несвязное топологическое пространство E, а также функцию f, которая каждой изолированной точке E сопоставляет целое число $n \geq 1$ или символ ∞. Каждому* *открыто-замкнутому подмножеству A в E сопоставляется унарный символ отношения $R_A(x)$ и рассматривается следующая теория $T_{E,f}$:*

- $(\forall x)\neg R_\emptyset(x)$, *и* $(\exists x)R_A(x)$ *для каждого* $A \neq \emptyset$

- $(\forall x)(R_A(x) \leftrightarrow \neg R_{\neg A}(x))$, $(\forall x)(R_{A\cap B}(x) \leftrightarrow (R_A(x) \wedge R_B(x)))$

- *если A является атомом, то есть если A изолирует точку p из E, то выразим, что имеется точно $f(p)$ элементов, удовлетворяющих R_A, если $f(p)$ конечно, и что их бесконечное число, если $f(p)$ есть ∞.*

1° *Покажите, что типу в $T_{E,f}$ соответствует ультрафильтр открыто-замкнутых подмножеств E, то есть, по компактности, одна точка E; как устроены ω-насыщенные модели этой теории?*

2° *Покажите, что $T_{E,f}$ полна, с элиминацией кванторов и $S_1(T_{E,f}) = E$.*

3° *Покажите, что, с точностью до интерпретации примитивных символов языка, $T_{E,f}$ есть общий случай теории структуры языка, содержащего только символы унарных отношений (см. 1.4).*

4° *Покажите, что $T_{E,f}$ имеет простую модель, если и только если изолированные точки E образуют в нем плотное множество.*

5° *Покажите, что если стереть элемент неизолированного типа в модели $T_{E,f}$, то получается элементарное ограничение; показать, что эта теория имеет минимальную модель тогда и только тогда, когда она имеет простую модель и если, кроме того, $f(p)$ конечно для каждого p: тогда минимальная модель является алгебраическим замыканием $\emptyset$.*

10.f Неединственность простой модели

В этом разделе, мы рассматриваем цепь I с наименьшим элементом 0^*. Обозначим через I^+ множество ненулевых элементов I. Мы собираемся изучить простые богатые I-значные пространства (см. раздел 6.d); отметим мимоходом, что любое богатое I-значное пространство атомно над I: если I счетно, то счетное богатое I-значное пространство – единственное простое богатое I-значное пространство. Обозначим через $E(I)$ пространство, образованное из отображений I^+ в ω, принимающих почти всюду значение 0, за исключением конечного числа точек, снабженное следующим расстоянием: если $a = (a_i)_{i\in I^+}$ и $b = (b_i)_{i\in I^+}$, $a \neq b$, то $d(a,b)$ равно наибольшему индексу i, такому, что $a_i \neq b_i$; иначе говоря, если $d(a,b) \leq i$, то две последовательности принимают одни и те же значения для любого $j > i$.

Непосредственно видно, что $E(I)$ – богатое I-значное пространство. Если $a = (a_i)_{i\in I^+}$ – точка $E(I)$, мы назовем *пакетом* a множество $P(a)$ элементов $b = (b_i)_{i\in I^+}$ таких, что $b_i = 0$ для $a_i = 0$; так как последовательность a_i принимает только конечное число ненулевых значений, $P(a)$ – *счетное множество.* Говорим, что подмножество A в $E(I)$ *замкнуто*, если оно является объединением пакетов, т.е. для любого a из A пакет $P(a)$ содержится в A.

Лемма 10.20 *Если A замкнуто в $E(I)$, то $E(I)$ атомно над $I \cup A$.*

Доказательство. Покажем сначала, что любая точка a из $E(I)$ имеет изолированный тип над $I \cup A$; если A – пустое, то это уже известно. Иначе, A содержит элемент из $P(a)$, например нулевую последовательность (что является элементом всех пакетов), и среди них существует тот, который находится на минимальном расстоянии от a: действительно, расстояние от a до элемента $P(a)$ есть 0^* или один из индексов i, таких, что $a_i \neq 0$; Итак, пусть b в $P(a)$ на минимальном расстоянии от a. Если $d(a,b) = 0$, то $a = b$ и его тип изолирован над A, так как это элемент из A; иначе $d(a,b) = i \neq 0$, что влечет $a_i \neq 0$ и $b_i = 0$ (иначе, заменяя в b элемент b_i на a_i , мы бы получили элемент b' из $P(b) \cap P(a)$ на меньшем расстоянии от a); тогда я утверждаю, что формула $d(x,b) = i$ изолирует тип a над $A \cup I$.

Для этого надо показать, что это условие ограничивает значение $d(x,c)$ для каждого c из A; если $d(b,c) = j < i$, тогда $d(x,c) = i$; если $d(b,c) = j > i$, тогда $d(x,c) = j$. Возможно ли $d(b,c) = i$? Если бы это было так, то, так как $b_i = 0$, элемент c_i был бы ненулевой, и элемент c' , полученный заменой в c элемента c_i на a_i был бы в пакете для c, значит, лежал бы в A, и на меньшем расстоянии, чем b. Если теперь $\bar{a}$ – кортеж точек, то тип каждой из них над $A \cup I$ изолирован формулой как выше, и чтобы изолировать тип всего n-кортежа кроме этого достаточно уточнить, на каких расстояниях расположены между собой его элементы.

□

Лемма 10.21 *Семейство $E(I)$ конструируемо над I .*

Доказательство. Перечислим сначала все пакеты, пусть это список $\{A_\alpha\}_{\alpha<\varkappa}$; затем берем перечисление A_0 типа ω (все пакеты счетны), за ним перечисление A_1 типа ω , и т.д. ; в итоге получаем перечисление $E(I)$ типа $\omega \times \varkappa$, что является конструкцией по предыдущей лемме, так как для любого предельного α элементы индекса, меньшего α, образуют замкнутое множество.

□

Таким образом, для каждого порядка I существует единственное богатое I-значное пространство, конструируемое над I. Мы собираемся теперь определить, при каком условии это единственное простое богатое пространство над I. Отметим, что $E(I)$ не может быть минимальным, так как почти очевидно, что если стереть точку богатого I-значного пространства, то снова имеем богатое I-значное пространство. Простые I-значные модели необходимо, очевидно, искать среди подпространств $E(I)$.

Лемма 10.22 *Если I вполне-упорядочено и A – подмножество $E(I)$ без равносторонних бесконечных многогранников, то $E(I)$ атомно над $A \cup I$.*

Доказательство. Для изолированности типа $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ над $A \cup I$ достаточно, чтобы тип каждого a_i был изолирован над этим множеством. Для этого достаточно, добавить к конъюнкции формул, изолирующих типы a_i, формулы, выражающие расстояния a_i между собой. Итак, пусть $\bar{a} \subset E(I)$. Так как I вполне упорядочено, существует элемент b из A на минимальном расстоянии от a. Если $d(a,b)=0$, то $a \in A$ и его тип над $A \cup I$ изолирован; если $d(a,b)=i \neq 0$, то рассмотрим максимальный равносторонний многогранник $\{b=b_0,\ldots,b_m\}$ со стороной i, содержащий b и содержащийся в A (мы знаем, что на самом деле все эти многогранники имеют одно и то же число элементов; он может состоять из одного b); тогда тип a над $A \cup I$ изолирован формулой $d(x,b_0)=i \wedge \cdots \wedge d(x,b_m)=i$; действительно, если $c \in A$, то $d(c,b_h) \neq i$ для некоторого h и $d(x,c)$ определен ультраметрическим неравенством.

□

Таким образом, мы видим, что если I вполне упорядочена, то каждое подмножество A в $E(I)$ конструируемо над I; достаточно его перечислять, никогда не вводя равносторонний бесконечный многогранник до конца, например, перечисляя последовательно

$$A \cap 1^{I^+}, \ldots, A \cap n^{I^+}, \ldots \text{ (напомним, что } n=\{0,\ldots,n-1\}),$$

так как равносторонние многогранники $E(I) \cap n^{I^+}$ имеют не более n элементов. В этом случае, $E(I)$ единственное простое богатое пространство над I: действительно, тогда любая простая модель, обязанная вкладываться в $E(I)$, конструируема. Проверьте в качестве упражнения, что $E(I)$ просто над $A \cup I$, если и только если любой равносторонний максимальный многогранник в A либо конечен, либо максимален в $E(I)$. Чтобы обобщить эту последнюю лемму, нам нужен один легкий, но, тем не менее, тонкий результат теорий моделей, глубина которого станет ясно позже:

Теорема 10.23 *Пусть M – модель полной теории T, B – подмножество M, $\bar a$ и $\bar b$ – кортежи из M. Если тип $\bar a$ над $\bar b$ имеет только единственное расширение над $B \cup \{\bar b\}$ (т.е. если тип $\bar a$ над $B \cup \{\bar b\}$ определен своим ограничением над B), тогда тип $\bar b$ над B имеет только единственное расширение над $B \cup \{\bar a\}$; и если, кроме того, тип $\bar b$ над $B \cup \{\bar a\}$ изолирован, тогда тип $\bar b$ над B изолирован.*

Доказательство. Условие предложения означает, что каждая формула $f(\bar a, \bar y)$, имеющая кроме $\bar a$ параметры из B и удовлетворяющаяся $\bar b$, выводима по модулю $T(B \cup \{\bar a\})$, из типа $\bar b$ над B; это означает также, что тип $\bar a^\frown \bar b$ над B аксиоматизируем типом $\bar a$ над B и типом $\bar b$ над B, что является симметричным условием условием относительно $\bar a$ и $\bar b$. Если мы предположим, что тип $\bar b$ над $B \cup \{\bar a\}$ изолирован формулой $f(\bar a, \bar y)$, то можно найти формулу $g(\bar y)$ над B, удовлетворяющуюся $\bar b$, которая её влечет по модулю $T(B \cup \{\bar a\})$. Эта формула $g(\bar y)$ изолирует тип $\bar b$ над B; действительно, если $\bar b'$ – кортеж из элементарного расширения M, удовлетворяющий $g(\bar y)$, то $\bar a^\frown \bar b'$ удовлетворяет $f(\bar x, \bar y)$, значит $\bar b$ и $\bar b'$ имеют один и тот же тип над $B \cup \{\bar a\}$, и тем более B.

□

Лемма 10.24 *Если каждое анти вполне-упорядоченное подмножество I конечно или счетно (т.е. если I не содержит строго убывающую последовательность, индексированную $\aleph_1$), то для любого a из $E(I)$ и любого $A \subset E(I)$ тип a над $A \cup I$ определен (т.е. аксиоматизируем по модулю $T(A \cup I)$) конечным или счетным семейством формул.*

Доказательство. Это ясно, если A – пустое, так как $E(I)$ атомно над I (и как впрочем все точки имеют один и тот же тип на I); если $a \in A$, то его тип изолирован формулой $x = a$. Пусть теперь $a \notin A \neq \emptyset$. Если в A существует b на минимальном расстоянии i от a, рассмотрим равносторонний многогранник B со стороной i, максимальный в A и содержащий b; так как $E(I)$ содержит только счетные равносторонние многогранники, B конечен или счетен, $B = \{b_0, \dots, b_n, \dots\}$, где $b = b_0$. Тогда условия $d(x, b_n) = i$ определяют тип a над $A \cup I$. Иначе, рассмотрим непустое множество J элементов j из I таких, что в A существует b с $d(a, b) = j$; это множество не имеет наименьшего элемента, и так как в I не существует убывающей последовательности типа $\aleph_1$, коинициальность J, то есть конфинальность обратного ему порядка, есть ω ; Итак, пусть $i_0 > i_1 > \dots > i_n > \dots$ – коинициальная последовательность в J с $b_n \in A$, $n \in \omega$, такая, что $d(a, b_n) = i_n$; я утверждаю, что условия $d(x, b_n) = i_n$ определяют тип a над $A \cup I$; действительно, для любого c из A необходимо, чтобы $d(c, b_n) > i_n$ для некоторого n, иначе $d(a, c)$ будет меньше каждого элемента J.

□

Теорема 10.25 *Если I не содержит строго убывающую последовательность, индексированную $\aleph_1$, то $E(I)$ – единственное простое богатое пространство над I; более точно, каждое подмножество B в $E(I)$ конструируемо над I.*

Доказательство. Каждый элемент a из $E(I)$ имеет свой пакет $P(a)$ (для понятия пакета, введенного в начале этого раздела; мы могли бы также брать понятие пакета для некоторой конструкции $E(I)$); каждый пакет счетен, и $E(I)$ атомно над каждым замкнутым множеством, то есть над каждым множеством, которое является объединением пакетов. Мы собираемся сопоставить каждому элементу b из B замкнутое счетное подмножество $Q_1(b)$ в $E(I)$, содержащее b и такое, что тип каждого элемента $Q_1(b)$ над B был определен своим ограничением на $Q(b) = B \cap Q_1(b)$.

Для этого начнем с b: берем его пакет $P(b)$, и к нему добавим для каждого кортежа $\bar{a}$ из этого пакета счетное подмножество $B_{\bar{a}}$ из B, такое, что тип $\bar{a}$ над $B \cup I$ был единственным расширением своего ограничения на $B_{\bar{a}} \cup I$: всего добавляется только счетное число элементов. Потом замыкаем это множество, снова добавляем параметры из B, и т.д. Повторяем такую процедуру ω раз.

Теперь я утверждаю, что B атомно над любым множеством C, являющимся объединением некоторых $Q(b)$; мы обозначим через C_1 объединение соответствующих $Q_1(b)$. Достаточно показать, что любой элемент b из B имеет тип, изолированный над $C \cup I$; действительно, как мы часто отмечали, кортеж имеет изолированный тип над $C \cup I$ как только каждый из его элементов имеет изолированный тип над $C \cup I$, так как все расстояния между элементами этого кортежа лежат в I. Так как C_1 замкнуто, тип b над $C_1 \cup I$ изолирован и даже изолирован формулой вида $d(x, a) = i$, с единственным параметром a; тип b над $I \cup C \cup \{a\}$ изолирован той же формулой. Однако тип a над B определен своим ограничением над C. Значит, тип a над $I \cup C \cup \{b\}$ – единственное расширение своего ограничения на $C \cup I$. По симметрии (Теорема 10.23) тип b над $I \cup C \cup \{a\}$ – единственное расширение своего ограничения на $I \cup C$, и так как первый изолирован, то второй также изолирован. Теперь достаточно расположить одно за другим перечисления типа ω (счетных) множеств $Q(b)$, чтобы получить конструкцию B.

□

Эта теорема допускает обобщение, так как единственные использованные факты об $E(I)$ – теоремы 10.23 и 10.24; на самом деле мы можем показать, что *если M является конструируемой моделью T и если для любого a из M и любого $A \subset M$ существует счетное подмножество A' в M, такое, что тип a над A' определяет тип a над A, тогда M – единственная простая модель T.*

Единственная разница со случаем богатых ультраметрических пространств заключается в том, что для изолированности типа кортежа из M уже не достаточна изолированность типа каждого из его элементов. Так же, как и в 10.25, следующим образом покажем, что каждое подмножество B из M конструируемо. Рассмотрим ординальное перечисление b_α для B, и возрастающую последовательность C_α подмножеств M такую, что :

– каждое C_α замкнуто, каждое $C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha$ счетно,

– b_α лежит в $B_{\alpha+1} = C_{\alpha+1} \cap B$,

– тип C_α над B определен своим ограничением на $B_\alpha = C_\alpha \cap B$,

– C_α является объединением C_β , $\beta < \alpha$, для предельного α.

Чтобы построить эту последовательность C_α поступаем так: нет проблем, если α пределен; чтобы получить $C_{\alpha+1}$ из C_α , сначала добавим b_α ; потом замыкаем это множество, добавив конечное множество точек; для каждого кортежа из этого множества, добавляем счетное подмножество B' из B , такое, что тип этого кортежа над $C_\alpha \cup B$ был определен своим ограничением на $C_\alpha \cup B'$; потом вновь замыкаем, и добавляем параметры так, чтобы определять типы на $C_\alpha \cup B$, и повторяем это ω раз. Тип кортежа, извлеченного из $C_{\alpha+1}$, над B определен своим ограничением на $B_{\alpha+1}$: действительно, этот кортеж составлен из кортежа $\bar{a}$ извлеченного из C_α и кортежа $\bar{a}'$, образованного из новых элементов, и тип $\bar{a}^\frown\bar{a}'$ над B дан типом $\bar{a}$ над B и типом $\bar{a}'$ над $B \cup \{\bar{a}\}$.

Теперь докажем, что B атомно над каждым B_α; действительно, если $\bar{b}$ кортеж, извлеченный из B, его тип над замкнутым C_α изолирован формулой $f(\bar{x}, \bar{a})$; по теореме 10.23 тип $\bar{b}$ над B_α имеет только единственное расширение над $B_\alpha \cup \{\bar{a}\}$ и изолирован, так как это расширение изолировано. Теперь получаем конструкцию B, располагая одно за другим перечисления типа ω для $B_{\alpha+1} \setminus B_\alpha$.

Теорема 10.26 *Если I содержит убывающую последовательность, индексированную $\aleph_1$, то существует бесконечное число попарно не изоморфных простых богатых пространств над I .*

Доказательство. Если $i_0 > \cdots > i_\alpha > \ldots$ – убывающая последовательность из I, индексированная $\aleph_1$, мы называем псевдо $\aleph_1$-последовательностью Коши последовательность $\{b_\alpha\}$ элементов I-значного пространства, таких, что $d(b_\alpha, b_\beta) \leq i_\beta$ для $\alpha > \beta$; назовем b псевдо-пределом этой последовательности, если $d(b, b_\alpha) \leq i_\alpha$ для любого α; говорим псевдо-предел, так как этот "предел" не единственный, если последовательность i не коинициальна в I^+.

Покажем, что в $E(I)$ каждая $\aleph_1$-последовательность Коши псевдо-сходится (это верно также для любой $\varkappa$-последовательности Коши, с $cof(\varkappa) > \omega$). Для этого, рассмотрим элемент c из ω^{I^+}, такой, что $c_i = (b_\alpha)_i$ для $i > i_\alpha$ (и следовательно, $c_i = (b_\beta)_i$ для $\beta < \alpha$) и $c_i = 0$ если i меньше всех i_α . Я утверждаю, что в действительности c_i принимает только конечное число ненулевых значений, т.е. c лежит в $E(I)$. Иначе, существовало бы по крайней мере счетное число индексов j_n , на которых она принимает ненулевые значения; Тогда, так как $\aleph_1$ несчетной конфинальности, существует α, такой, что $i_\alpha < j_n$ для любого n; и поскольку b_α принимает те же значения что и c над i_α , это опровергает то, что b_α принимает только конечное число ненулевых значений. Таким образом, c лежит в $E(I)$, и он псевдо-предел обсуждаемой псевдо-последовательности Коши.

Теперь нетрудно проверить, что если убрать из $E(I)$ все псевдо-пределы $\aleph_1$-последовательности Коши в $E(I)$, у которой ни один из его элементов не псевдо-предел (такая существует), то получаем модель M_1 , т.е. богатое I-значное пространство, которое, следовательно, простое, но не изоморфное $E(I)$: в M_1 существует последовательность Коши без предела. Оставляем читателю заботу о том, чтобы определить эквивалентность двух последовательностей Коши: в M_1 имеется только единственный класс $\aleph_1$-псевдо-последовательностей Коши без предела; мы получим другие простые модели M_2 , M_3 , M_n , ..., удаляя $2, 3, \ldots, n, \ldots$ псевдо-пределов.

□

Все эти теоремы остаются в силе, когда заменяем теорию богатых пространств теорией n-богатых пространств. Конструируемое n-богатое I-значное пространство $E_n(I)$ образовано из отображений I^+ в n , принимающих только конечное число ненулевых значений. На этот раз пакеты $P(a)$ конечны. Отметим, что если I вполне упорядочено, то по аналогии с леммой 10.22, каждое перечисление $E_n(I)$ является конструкцией над I; это влечет, что $E_n(I)$ минимально над I, так как если A является его собственным подмножеством, оно не является моделью, так как имеются типы, изолированные над A, которые не реализуются в A. В этом случае, $E_n(I)$ является единственным n-богатым I-значным пространством; действительно, так как оно простое над I, оно вкладывается в каждое n-богатое I-значное пространство, и легко видеть, что в собственном элементарном расширении $E_n(I)$ имеются расстояния вне I.

Если I конечно, с $m+1$ элементами (включая 0), $E_n(I)$ имеет n^m элементов: I-значное пространство без равносторонних многогранников с $n+1$ вершинами, которые должно вкладываться в это пространство, имеет таким образом не более n^m элементов.

Во всех других случаях, $E_n(I)$ не минимально, так как можно оттуда удалять пределы псевдо-последовательностей Коши. И это не является единственным с точностью до изоморфизма n-богатым I-значным пространством, так как оно имеет псевдо-последовательности Коши, не псевдо-сходящиеся, в то время как можно строить I-значные пространства, n-богатые и максимально полные, где все эти последовательности сходятся.

10.g Исторические и библиографические примечания

Теорема опускания типов появилась в специальной форме у [ГЕНКИН, 1954] и [ОРЕ, 1956] ; в [ГЖЕГОРЧИК-МОСТОВСКИЙ-РЫЛЬ–НАРДЗЕВСКИ, 1961] приводится более общий вид этой теоремы, тем не менее без прояснения связи со свойством Бэра (классика начала века!). Изучение атомных счетных моделей сделано в [ВОТ, 1961]. Хотя главным образом теорему 10.11, характеризующую ω-категоричные теории, приписывают [РЫЛЛЬ-НАРДЗЕВСКИЙ, 1959], она появилась одновременно в [ЭНГЕЛЕР, 1959] и [СВЕНОНИУС, 1959]. Теорема 10.13 о трех моделях из [ВОТ, 1961].

Именно в [ВОТ, 1961] и высказано предположение Вота; важный вклад Майкла Морли в этом вопросе содержится [МОРЛИ, 1970]. Теорема 10.18 об единственности конструируемой модели принадлежит Жан-Пьеру Рессэру; она была опубликована Сахароном Шелахом: см. [ШЕЛАХ, 1978], с. 175, Заключение 3.9, и с. 507 для ссылки на Рессэра.

Простые модели для ультраметрических пространств изучены в [ДЕЛОН, 1984]; теорема 10.25 единственности копирует доказательство единственности простой модели [ШЕЛАХ, 1979], в стабильном контексте, в то время как теорема 10.26 неединственности – лишь систематизация одного примера этой же статьи, первый пример простой, не единственной модели.