Глава 17

Понятия ранга

> Comme, dans les sociétés aristocratiques, tous les citoyens sont placés à poste fixe, les uns au-dessus des autres, il en résulte encore que chacun aperçoit toujours plus haut que lui un homme dont la protection lui est nécessaire, et plus bas il en découvre un autre dont il peut réclamer le concours. ... Dans les siècles démocratiques, au contraire, ... de nouvelles familles sortent sans cesse du néant, d'autres y retombent sans cesse, et toutes celles qui demeurent changent de face ; la trame des temps se rompt à tout moment, et le vestige des générations s'efface ... L'aristocratie avait fait de tous tes citoyens une longue chaîne qui remontait du paysan au roi ; la démocratie brise la chaîne et met chaque anneau à part...
>
> A. de T.

17.a Ранг Ласкара

В соответствии с нашей привычкой, мы рассматриваем только 1-типы полной теории T, но понятия, которые собираемся ввести, важны также для n-типов и для них имеют те же свойства. Назовем *понятием ранга в смысле Ласкара*, или просто *рангом*, функцию R, которая каждому типу p из $S_1(A)$, где A лежит в модели M теории T, сопоставляет ординал или символ ∞, и которая удовлетворяет следующим четырем условиям:

1° (*родство*) ранг отца выше или равен рангу его сыновей,

2° (*расширение*) если A лежит в B и $p \in S_1(A)$, то p имеет над B сына того же ранга,

3° (*изоморфизм*) если s является изоморфизмом M на N, $p \in S_1(M)$ и q является типом sp, соответствующим p при s, тогда $R(p) = R(q)$.

4° (*ограниченная кратность*) если p из $S_1(A)$ и $R(p) < \infty$, то существует кардинал λ такой, что для любого B, содержащего A, p не имеет больше λ сыновей того же ранга над B.

Если $R(p)$ является ординалом, а не символом ∞, то говорят, что p ранжирован по R.

Отметим, что условие расширения может быть заменено следующим: если $A \subset B$, $p \in S_1(A)$ и $R(p) \geq \alpha$, то p имеет сына q над B такого, что $R(p) \geq \alpha$.

Лемма 17.1 *Если p ранжирован по рангу R, то p стабилен.*

Доказательство. Если p нестабилен и лежит в $S_1(A)$, то для каждого кардинала λ можно найти B, содержащее A, над которым p имеет по крайней мере λ нестабильных попарно различных сыновей (см. доказательство теоремы 11.11). Тогда, индукцией по α, мы докажем, вследствие условия ограниченной кратности, что $R(p) \geq \alpha$.

□

Лемма 17.2 *Если p ранжирован по рангу R, то его сыновья того же ранга являются в точности его неотклоняющимися сыновьями.*

Доказательство. Пусть $A \subset B$, $p \in S_1(A)$ и q – отклоняющийся сын над B типа p. Пусть λ – кардинал, ограничивающий число сыновей типа p, имеющих с ним одинаковый ранг. Если мы берем достаточно насыщенную и однородную модель M содержащую B, то, как известно (см. 15.c), все отклоняющиеся сыновья p имеют больше λ сопряженных A-автоморфизмами M, так что ни один из них не может иметь тот же ранг, что и p. Так как q должен иметь над M сына того же ранга, что и он сам, то необходимо, чтобы $R(q)$ был строго меньше $R(p)$.

Рассмотрим снова модель M, содержащую B, которая достаточно насыщенна и однородна, чтобы все неотклоняющиеся сыновья p были сопряжены

A-автоморфизмами M; так как p должен иметь сына того же ранга, что и сам, то необходимо, чтобы один из его сыновей без отклонения имел тот же ранг, что он сам; и они все имеют один и тот же ранг, так как они сопряжены. Если, таким образом, q из $S_1(B)$ является неотклоняющимся сыном p, то он имеет неотклоняющегося сына r над M; $R(p) \geq R(q) \geq R(r)$ по условию родства, и на самом деле, мы имеем равенство.

$\square$

Запомним это несколько неожиданное свойство: каково бы ни было понятие ранга R, для ранжированных типов их сыновья того же ранга, что они сами, всегда одни и те же: это сыновья без отклонения. Мы видим апостериорно, что в аксиоме 4°, кардинал λ может быть взят равным кратности обсуждаемого типа; там ничего бы не изменилось, если бы брали $\lambda = 2^{|T|}$ в общем случае, и $\lambda = 1$, если рассматриваем только типы над моделями.

Лемма 17.3 *Пусть R понятие ранга, p из $S_1(M)$, q из $S_1(N)$; если p и q эквивалентны в фундаментальном порядке, то $R(p) = R(q)$; если $p < q$ и $R(p) \neq \infty$, тогда $R(p) < R(q)$.*

Доказательство. Если p и q эквивалентны и один из них нестабильный, то известно, что другой такой же; а в стабильном случае мы знаем, что с точностью до изоморфизма они имеют общего наследника, откуда и следует равенство рангов. Если p стабилен и $p < q$, то с точностью до изоморфизма, существует наследник p, являющийся сыном, но не наследником q.

$\square$

Мы видим так же, что ранг стабильного типа зависит только от его грани. Так как фундаментальный порядок имеет не более $2^{|T|}$ элементов, то имеется только $2^{|T|}$ возможных значений для понятия ранга R, так что существует всегда (наименьший!) ординал α_R, такой, что $R(p) \geq \alpha_R$, если и только если $R(p) = \infty$.

Говорят, что ранг R *не имеет прыжков*, если ординальные значения этого ранга образуют начальный сегмент класса ординалов; иначе говоря, если для любого p, $R(p) \geq \alpha$ влечет $R(p) \geq \alpha + 1$, только тогда, когда $R(p) \geq \alpha$ влечет $R(p) = \infty$; для такого ранга α_R меньше или равен $(2^{|T|})^+$. Все естественные ранги не имеют прыжка, но это условие не навязано аксиомами рангов.

Напомним определение *ранга фундирования* в частичном порядке; индукцией по ординалам α определяется выражение $RF(x) \geq \alpha$ следующим образом:

– если α – предельный ординал, то $RF(x) \geq \alpha$, если $RF(x) \geq \beta$ для каждого $\beta < \alpha$;

– $RF(x) \geq \alpha + 1$, если можно найти y, строго меньший x, такой, что $RF(y) \geq \alpha$.

Мы видим без труда, что если существует α такой, что $RF(x) \geq \alpha$, но $RF(x) \not\geq \alpha + 1$, то этот α единственнен, и полагаем $RF(x) = \alpha$; иначе, если $RF(x) \geq \alpha$ для всех ординалов α, то полагаем $RF(x) = \infty$. Например, $RF(x) = 0$ означает, что x минимален, $RF(x) = 1$, что x строго мажорирует только минимальные элементы, и т.д. Если $RF(x)$ – ординал, это значит, что порядок под

x фундирован, т.е. что не существует строго убывающей ω-последовательности под x.

Лемма 17.4 *Каков бы ни был ранг R и стабильный тип p, $R(p)$ мажорирует ранг фундирования грани p в фундаментальном порядке.*

Доказательство. Так как ранг зависит только от грани, можно предполагать, что тип p задан над моделью M. Докажем индукцией, что $RF(p) \geq \alpha$ влечет $R(p) \geq \alpha$. Это очевидно для предельного α. Если $RF(p) \geq \alpha + 1$, то p имеет сына q с отклонением и с $RF(q) \geq \alpha$. По гипотезе индукции $R(q) \geq \alpha$, и так как $R(q)$ равен ∞ или строго меньше $R(p)$, то $R(p) \geq \alpha + 1$.

□

Определяем теперь самый маленький из всех рангов, ранг Ласкара, который был назван " ранг U " его автором. Сделаем это следующей индукцией:

- для α предельного, $RU(p) \geq \alpha$ если $RU(p) \geq \beta$ для всех $\beta < \alpha$,
- если $p \in S_1(A)$, то $RU(p) \geq \alpha+1$, если для каждого кардинала λ существует B, содержащее A, над которым p имеет по крайней мере λ различных сыновей q, для которых $RU(p) \geq \alpha$.

Индукцией по α мы видим без труда, что если $\beta < \alpha$ и $RU(p) \geq \alpha$, тогда $RU(p) \geq \beta$. Следовательно, возможны два следующих случая:

- для некоторого α, обязательно единственного, $RU(p) \geq \alpha$, $RU(p) \not\geq \alpha + 1$, в таком случае полагаем $RU(p) = \alpha$,
- $RU(p) \geq \alpha$ для всех α, и тогда полагаем $RU(p) = \infty$.

Теорема 17.5 *RU является понятием ранга; более точно, если p нестабилен, то $RU(p) = \infty$ и если p стабилен, то $RU(p)$ является рангом фундирования грани p в фундаментальном порядке. Следовательно, если $RU(p) \geq |T|^+$, то $RU(p) = \infty$.*

Доказательство. Если p нестабилен, то как уже отмечено он имеет сколько угодно нестабильных сыновей, и $RU(p) = \infty$. Предположим теперь, что p – стабильный. Если $RU(p) \geq \alpha + 1$, то беря в качестве λ кардинал, который больше кратности p, мы видим по определению RU, что p имеет отклоняющегося сына q с $RU(q) \geq \alpha$. Отсюда заключаем без труда, индукцией по α, что $RU(p) \geq \alpha$ влечет $RF(\beta(p)) \geq \alpha$.

Теперь докажем индукцией, что $RF(\beta(p)) \geq \alpha$ влечет $RU(p) \geq \alpha$. Нет проблем, если α пределен. Предположим, что $RF(\beta(p)) \geq \alpha + 1$. Если p – тип над A, то для каждого кардинала λ можно найти модель M, содержащую A, над которой p имеет λ сыновей q таких, что $RF(q) \geq \alpha$. По гипотезе индукции $RU(q) \geq \alpha$. Таким образом, по определению RU получаем $RU(p) \geq \alpha + 1$.

Последнее утверждение следует из того, что элементы вполне упорядоченной цепи в фундаментальном порядке должны различаться формулами.

□

Замечание. Если вы хотите проверить непосредственно из определения, что RU является понятием ранга, то свойства 1°, 3° и 4° не представляют проблему; так же легко видеть, что если p над A, A вложено в B и $RU(p) \geq n$, тогда p имеет над B сына q с $RU(q) \geq n$, но не понятно, как просто провести этот аргумент на предельные шаги. Я не знаю никаких прямых доказательств свойства расширения ранга U, во всей общности, обходящихся без теории отклонения.

Ранг U, таким образом, наименьший среди всех рангов; это *единственный* ранг, имеющий следующее свойство: каждый раз, когда $RU(p) = \alpha$ и $\beta < \alpha$, тогда p имеет сына q с $RU(q) = \beta$. Говорят, что тип *суперстабилен*, если он ранжирован по крайней мере одним понятием ранга, т.е. если он ранжирован рангом U. Теория называется *суперстабильной*, если все ее типы суперстабильны, то есть если она стабильна и ее фундаментальный порядок – полный ($\kappa(T) = \omega$) .

Типы ранга U ноль являются, очевидно, реализованными типами; отметим, что лемма 13.3 утверждает, что в стабильной теории имеются всегда типы с рангом U, равным 1.

Понятия ранга и ранга U для n-типов определяются по аналогии с соответствующими понятиями для 1-типов. Мы установили (лемма 13.12), что для стабильной теории, фундаментальные порядки 1-типов и n-типов имеют одинаковый $\kappa(T)$, так что, если T суперстабильна, то фундаментальный порядок n типов также полон. Впрочем в 19.b мы увидим, как считать ранг RU n-типа с помощью ранга RU для 1-типов.

Можно очевидно распространить эти понятия также на типы с бесконечным числом переменных, но это не так интересно, так как, кроме тривиального случая конечной структуры, фундаментальный порядок ω-типов всегда плохо фундирован (введите ω независимых точек и реализуйте их по одному).

17.b Ранг Шелаха

Ранг U имеет естественное определение и, как мы увидим, интересные свойства аддитивности. Однако он не является единственным рангом, который можно естественно связать с суперстабильными типами. Недостаток ранга U в том, что он позволяет ранжировать только полные типы, в то время как часто необходимо ранжировать неполные типы или формулы.

Говорим, что ранг R *непрерывен*, если он обладает следующим свойством: для любого A и любого α, типы из $S_1(A)$ ранга $\geq \alpha$ образуют замкнутое множество; или еще, если p из $S_1(A)$ является точкой накопления типов ранга $\geq \alpha$, тогда $R(p) \geq \alpha$.

Если R – непрерывный ранг и $f(x, \bar{a})$ – формула с параметрами из A, то существуют типы максимального ранга, удовлетворяющие этой формуле; действительно, пусть α – наименьший ординал (возможно ∞), такой, что $\langle f(x, \bar{a}) \rangle$ не содержит типов ранга $\geq \alpha$; покажем, что α не может быть предельным; иначе, для каждого $\beta < \alpha$ имеется p_β, удовлетворяющий $f(x, \bar{a})$ ранга, не меньшего β; по компактности, эти p_β скапливаются около типа p, который, из-за непрерывности R, имеет ранг, не меньший β, что является противоречием.

Можно таким образом назвать *рангом формулы* $f(x, \bar{a})$ максимум рангов типов из этой формуле. Так как ранг сына не превосходит ранг своего отца, заметим, что если A вложено в B, то ранг $f(x, \bar{a})$, рассматриваемый как ранг формулы с параметрами из A, совпадает с рангом $f(x, \bar{a})$, рассматриваемым как ранг формулы с параметрами из B. Максимум всех этих рангов, который совпадает с рангом тавтологичной формулы $x = x$, обозначается $R(T)$. Можно, в действительности, определить ранг замкнутого множества пространства типов, то есть неполного типа.

Обозначаем через RC, где C означает "непрерывный", ранг, определенный следующей индукцией:

- если α пределен, то $RC(p) \geq \alpha$, если $RC(p) \geq \beta$ для каждого $\beta < \alpha$, (в частности, $RC(p) \geq 0$ всегда истинно);

- если $p \in S_1(A)$, то $RC(p) \geq \alpha + 1$, если для каждого кардинала λ и для каждой формулы $f(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$, содержащей p, я могу найти множество B, содержащее A, такое, что в $S_1(B)$ имеется по крайней мере λ различных типов из $f(x, \bar{a})$, имеющих ранг RC, больший чем α.

Мы видим без труда, как обычно, что если $\beta < \alpha$ и $RC(p) \geq \alpha$, тогда $RC(p) \geq \beta$; так что возможны два случая:

- существует единственный α такой, что $RC(p) \geq \alpha$ и $RC(p) \not\geq \alpha + 1$; в этом случае полагаем $RC(p) = \alpha$;

- $RC(p) \geq \alpha$ для всех α, в этом случае полагаем $RC(p) = \infty$.

Лемма 17.6 *Ранг RC является непрерывным рангом.*

Доказательство. Из определения RC, формула за формулой, ясно следует, что RC непрерывен. Легко видеть индукцией, что если q – сын p и $RC(q) \geq \alpha$, тогда $RC(p) \geq \alpha$.

Предположим, что $p \in S_1(A)$, A вложено в B и $RC(p) \geq \alpha$. Покажем индукцией по α, что p имеет над B сына q с $RC(q) \geq \alpha$. Если α пределен, то по гипотезе индукции p имеет сына q_β с $RC(q_\beta) \geq \beta$ для каждого $\beta < \alpha$; по компактности эти q_β скапливаются около q, и $RC(q) \geq \alpha$ из-за непрерывности RC. Если $RC(p) \geq \alpha + 1$, то рассмотрим формулу $f(x, \bar{a})$, содержащую p. Для каждого λ можно найти C_λ, содержащее A, над которым он имеет по крайней мере λ типов из $f(x, \bar{a})$ с рангом $RC \geq \alpha$. Если B_λ содержит одновременно B и C_λ, то по гипотезе индукции все эти типы имеют над B_λ сыновей ранга по крайней мере α. Как только λ больше $|S_1(B)|$, то обязательно λ среди них будут иметь одно и то же ограничение q_λ на B; кроме того, это одно и то же q берется как q_λ для λ, пробегающих подкласс, конфинальный в классе всех кардиналов: в конечном счете, q имеет по крайней мере λ различных сыновей ранга RC, не меньшего α, для каждого λ и $RC(q) \geq \alpha + 1$.

Следовательно, каждая формула $f(x, \bar{a})$, истинная для p, содержит некоторый q из $S_1(B)$ с RC, большим или равным $\alpha + 1$: это означает, что замкнутое множество, образованное из типов $\langle f(x,\bar{a})\rangle$, имеющих ранг RC, не меньший $\alpha+1$, никогда не пусто. По компактности пересечение этого семейства компактов не пусто и p имеет над B сына с рангом $RC \geq \alpha+1$.

Свойство изоморфизма ясно, так как изоморфизм между моделями индуцирует бинепрерывную биекцию между пространствами типов над этими моделями. Что касается свойства ограниченной кратности, оно прямое следствие определения.

□

Заметим, что во время доказательства свойства расширения для RC мы доказали следующую лемму:

Лемма 17.7 *$RC(p) \geq \alpha+1$, если и только если каждая формула $f(x,\bar{a})$, содержащая p, содержит тип q, имеющий для любого λ по крайней мере λ сыновей ранг $RC \geq \alpha$.*

Этот ранг RC часто называют *рангом*, или *степенью* (неприятное название) *Шелаха*, так как это излюбленный ранг этого математика.

Лемма 17.8 *Ранг RC – наименьший среди непрерывных рангов.*

Доказательство. Пусть R – непрерывный ранг. Докажем индукцией, что если $RC(p) \geq \alpha$, тогда $R(p) \geq \alpha$. Нет проблем, если α – предельный. Если $RC(p) \geq \alpha+1$, то по лемме 17.7 в каждой окрестности p можно найти q, имеющий сколько угодно сыновей с RC, большим или равным α. По гипотезе индукции, эти сыновья имеют ранг R, больший или равный α, и тогда $R(q) \geq \alpha+1$ по свойству ограниченной кратности R. Отсюда $R(p) \geq \alpha+1$ по непрерывности ранга R.

□

Замечание. Можно усилить лемму 17.7, замечая, что $RC(p) \geq \alpha+1$ как только в каждой формуле $f(x,\bar{a})$, содержащей p, имеется тип q, имеющий больше $2^{|T|}$ сыновей с $RC \geq \alpha$: действительно, среди них существует отклоняющийся тип.

Точно так же, если вернуться к определению RC, для того, чтобы $RC(p) \geq \alpha+1$, достаточно, чтобы для каждой формулы $f(x,\bar{a})$, содержащей p, нашлось множество B, расширяющее A, над которым имеется больше $2^{|T|}$ типов в $f(x.\bar{a})$ с $RC(p) \geq \alpha$. Это ясно, если A имеет мощность не большую $|T|$, так как тогда среди этих типов над B, принадлежащих $f(x,\bar{a})$ и ранга $\geq \alpha$, существует хотя бы один, который отклоняется над A. В общем случае, заменим p его ограничением на множество A' мощности не большей T, над которым p не отклоняется. Естественно, чтобы понять, что это условие будет достаточным, сначала надо доказать, что RC является рангом!

Рассмотрим теперь взаимосвязи рангов RU и RC. Сначала приведем одно следствие леммы 17.7 :

Лемма 17.9 *Для каждого конечного ординала n, $RC(p) \geq n$, если и только если p принадлежит замыканию множества типов с RU большим n.*

Доказательство. Если в каждой окрестности p имеется тип q с $RU(q) \geq n$, тогда $RC(q) \geq n$, так как $RC \geq RU$, и $RC(p) \geq n$ по непрерывности.

Обратное утверждение очевидно, если p является точкой прикосновения нестабильных типов, так как тогда $RC(p) = \infty$. Теперь предположим, что p изолирован формулой $f(x, \bar{a})$ от нестабильных типов: тогда нетрудно показать, что все топологические теоремы об отклонении и, в частности, теорема об открытом отображении 16.7, доказанные при предположении стабильности T, остаются в силе если ограничиться только типами из $f(x, \bar{a})$. Докажем это обратное утверждение по индукции. Пусть $RC(p) \geq n + 1$ и рассмотрим формулу $g(x, \bar{a}_1)$, содержащую p. По лемме 17.7 в окрестности $\langle f(x, \bar{a}) \wedge g(x, \bar{a}_1)\rangle$ имеется тип q, имеющий сколько угодно сыновей с $RC \geq n$. Таким образом, среди них есть отклоняющиеся типы: находим множество B, содержащее A, отклоняющийся сын r типа q над B, с $RC(r) \geq n$. По аналогии с 16.5 типы из $S_1(B)$, лежащие в $f(x, \bar{a})$ и отклоняющиеся над A, образуют открытое множество. Следовательно, существует окрестность $\langle f(x, \bar{a}) \wedge g(x, \bar{a}_1) \wedge h(x, \bar{b})\rangle$ типа r, образованная целиком из типов, отклоняющихся над A. По гипотезе индукции эта окрестность содержит тип r_1 с $RU \geq n$. Так как он отклоняется, ограничение q_1 типа r_1 на A имеет $RU \geq n+1$: поскольку q_1 лежит в $\langle g(x, \bar{a}_1)\rangle$, результат доказан.

□

Мы видим таким образом, что если T – суперстабильная теория, в которой максимум рангов типов $RU(p)$ равен n, тогда n будет также максимумом и для $RC(p)$. Но рассуждения, проведенные индукцией в доказательстве леммы 17.9 , не преодолевают предельные шаги, и можно в действительности строить такие суперстабильные теории, где все $RU(p)$ конечны, но RC будут как угодно большими. Они ограничены только мощностью $|T|^+$, что является следствием следующей теоремы:

Теорема 17.10 *$RC(p) = \infty$, если и только если $RC(p) \geq |T|^+$ и если и только если p является типом с бесконечным RU. Следовательно, если теория T суперстабильна, то $RC(T) < |T|^+$.*

Доказательство. Достаточно показать что если $RC(p) \geq |T|^+$, то в каждой окрестности p найдется не ранжированный по U тип; предположим, что p является типом над M; пусть $f(x, \bar{a})$ – формула, содержащая p. Можно предполагать, что она его изолирует от нестабильных типов.

Я собираюсь определить, индукцией по n:

– последовательность формул $f_1(x, \bar{y}_1), \ldots, f_n(x, \bar{y}_n), \ldots$,

– убывающую последовательность $X_l, \ldots, X_n, \ldots$ конфинальных подмножеств $|T|^+$,

– для каждого α из X_n и модели $M^\alpha_{1,n}, \ldots, M^\alpha_{n,n}$ теории T, такие, что $M = M^\alpha_{0,n} \prec M^\alpha_{1,n} \prec \ldots M^\alpha_{n,n}$,

– для каждой пары (i, α), с $i \leq n$ и $\alpha \in X_n$, кортеж $\bar{a}^\alpha_{i,n}$ элементов $M^\alpha_{i,n}$, такой, что формула $f_i(x, \bar{a}^\alpha_{i,n})$ не удовлетворяется никаким элементом

$M^{\alpha}_{i-1,n}$; кроме того, для α в X_n, формула

$$f(x,\bar{a}) \wedge f_1(x,\bar{a}^{\alpha}_{1,n}) \wedge \cdots \wedge f_n(x,\bar{a}^{\alpha}_{n,n})$$

должна иметь RC-ранг, не меньший α.

Предполагая, что n первых шагов уже определены, мы приступаем к шагу $n+1$ так: рассматриваем α в X_n, обозначим через β наименьший ординал из X_n, строго больший α, и полагаем $M^{\alpha}_{1,n+1} = M^{\beta}_{1,n}, \ldots, M^{\alpha}_{n,n+1} = M^{\beta}_{n,n}$ и $\bar{a}^{\alpha}_{1,n+1} = \bar{a}^{\beta}_{1,n}, \ldots, \bar{a}^{\alpha}_{n,n+1} = \bar{a}^{\beta}_{n,n}$. По предположению, формула

$$f(x,\bar{a}) \wedge f_1(x,\bar{a}^{\alpha}_{1,n+1}) \wedge \cdots \wedge f_n(x,\bar{a}^{\alpha}_{n,n+1})$$

имеет RC-ранг по крайней мере $\alpha+1$. Таким образом, она содержит тип над $M^{\alpha}_{n,n+1}$, имеющий сына с отклонением над расширением $M^{\alpha}_{n+1,n+1}$ этой последней модели, который имеет RC-ранг по крайней мере α (лемма 17.7). Этот тип изолирован от $M^{\alpha}_{n,n+1}$ формулой $f^{\alpha}_{n+1}(x,\bar{a}^{\alpha}_{n+1,n+1})$; одна и та же формула f_{n+1} выбирается для подмножества X_{n+1} , конфинального в X_n .

После этого, по компактности подходящей теории, мы можем построить возрастающую последовательность моделей $M \prec M_1 \prec \cdots \prec M_n \prec \ldots$ с кортежами $\bar{a}_n$ из M_n, такую, что:

- для каждого n никакой элемент из M_n не удовлетворяет $f_{n+1}(x,\bar{a}_{n+1})$,
- имеется тип q над объединением M_ω моделей M_n, который удовлетворяет $f(x,\bar{a})$ так же как и каждую $f_n(x,\bar{a}_n)$.

Ограничение q на M не суперстабильно, и удовлетворяет $f(x,\bar{a})$.

□

Таким образом, если теория T суперстабильна, т.е. если RU ранжирует все типы, тогда RC также ранжирует все типы; таким образом, для изучения такой теории у нас есть выбор между двумя рангами, преимущества и свойства которых я напомню:

- ранг U является единственным рангом для которого, если $RU(p) = \alpha < \beta$, тогда p имеет сына q с $RU(p) = \beta$; как мы увидим в 19.b, он имеет свойства аддитивности, которые позволяют в подходящих случаях свести вычисление ранга RU для n-типов к каскаду вычислений ранга RU для 1-типов ;
- ранг RC непрерывен, так что можно говорить о ранге RC формулы, или более обще, замкнутого множества типов, как о максимуме рангов RC типов, содержащихся в нем; если T суперстабильна, то имеются типы с максимальным RC; обозначим этот максимум через $RC(T)$: он строго меньше, чем $|T|^+$;
- ранг U не непрерывный и, вообще говоря, для суперстабильной теории не существует типов с максимальным RU; тем не менее отметим, что в такой теории все RU мажорированы ординалом $RC(T) < |T|^+$.

Вообще говоря, эти два ранга не совпадают, и их нужно различать и не приписывать без причины свойства аддитивности к RC, ни свойства непрерывности к RU, т.е. свойства, которыми они в общем случае не обладают.

17.c Ранг Морли

Мы говорим, что ранг *канторовский* если он обладает следующим свойством: любой тип p, являющийся точкой накопления типов ранга, не меньшего α, сам имеет ранг, не меньший $\alpha + 1$. Такой ранг, очевидно, непрерывен.

Определим ранг Морли следующей индукцией:

– $RM(p) \geq \alpha$ для предельного α, если $RM(p) \geq \beta$ для всех $\beta < \alpha$,

– $RM(p) \geq \alpha + 1$, если p имеет сына, являющегося точкой накопления типов, имеющих ранг RM, больший или равный α.

Подспудная идея в этом определении ясна: хотят брать за ранг p его ранг Кантора в топологическом пространстве $S_1(A)$ (см. 1.c). К сожалению этот "ранг" не имеет свойства расширения, даже если A является моделью. Таким образом, мы делаем то, что необходимо для исправления этого недостатка.

Предложение 17.11 *Ранг Морли является понятием ранга; это наименьший канторовский ранг; тип ранжированный по Морли имеет конечную кратность.*

Доказательство. Свойство изоморфизма ясно из определения, и легко видеть индукцией, что ранг отца выше ранга своих сыновей. Если $p \in S_1(A)$, A вложено в B и $RM(p) = \alpha$, то p не может иметь над B бесконечное число сыновей того же ранга RM, иначе по компактности, они будут иметь точку накопления q, являющуюся сыном p, с $RM(q) \geq \alpha + 1$ по определению RM.

Осталось понять свойство расширения. Пусть даны $p \in S_1(A)$ и $A \subset B$. Индукцией по α докажем, что если $RM(p) \geq \alpha$, то p имеет над B сына q с $RM(q) \geq \alpha$; если α – предельный, то это следствие компактности $S_1(B)$ и непрерывности RM. Итак, предположим, что $RM(p) \geq \alpha + 1$; пусть C – множество параметров, над которым p имеет сына q, являющегося точкой накопления q_i с $RM(q_i) \geq \alpha$, и пусть D – множество параметров, содержащее B и C. По гипотезе индукции, каждый q_i имеет сына r_i над D с $RM(r_i) \geq \alpha$, и по компактности эти r_i имеют точку накопления r, являющуюся сыном p. По определению $RM(r) \geq \alpha + 1$, и ограничение типа r на B – искомый сын типа p. Значит, RM является рангом, и из его определения и аксиом ранга очевидно, что он меньше любого канторовского ранга.

□

По непрерывности, мы определяем *ранг Морли формулы* как максимум рангов Морли типов, содержащихся в ней. Если $f(x, \bar{a})$ ранжирована по этому рангу, т.е. $RM(f(x, \bar{a})) = \alpha < \infty$, и M – модель, содержащая A, то *степень Морли* этой формулы есть по определению число типов p из $S_1(M)$ ранга Морли α принадлежащих ей. Степень обязательно конечна, так как иначе эти типы накопились бы около типа q с $RM(q) \geq \alpha + 1$. Степень Морли не зависит от модели M, так как если N – элементарное расширение M, то тип из $S_1(N)$ с $RM \geq \alpha$, принадлежащий $f(x, \bar{a})$ обязательно будет наследником своего ограничения на M. Степень Морли обобщает понятие степени полиномиального уравнения: то, что $f(x,\bar{a})$ имеет ранг Морли ноль, значит, что она алгебраическая, т.е. удовлетворяется лишь конечным числом n элементов из M и это число есть в точности ее степень Морли.

Степень Морли – это также максимальное число формул с $RM = \alpha$ и попарно несовместных, на которые можно разбить формулу $f(x,\bar{a})$, так что можно определить ранг Морли формулы непосредственно следующей индукцией:

– $RM(f(x,\bar{a})) \geq \alpha$ для предельного α, если $RM(f(x,\bar{a})) \geq \beta$ для всех $\beta < \alpha$ (в частности $RM(f(x,\bar{a})) \geq 0$ для каждой совместной формулы) ;

– $RM(f(x,\bar{a})) \geq \alpha + 1$, если для любого натурального n можно найти B, содержащее A, и формулы $g_1(x,\bar{b}_1), \ldots g_n(x,\bar{b})$ с параметрами из B, влекущих $f(x,\bar{a})$ и попарно несовместных, и все с $RM \geq \alpha$.

Тогда мы можем определить ранг Морли типа как минимум рангов Морли формул, которым он принадлежит.

Для типа, быть ранжированным рангом Морли является гораздо более сильным свойством чем быть ранжированным рангом U, или даже рангом C (необходимо, в частности, чтобы p имел конечную кратность). Говорят, что теория *тотально трансцендентна*, если все ее 1-типы ранжированы рангом Морли; тогда обозначим через $RM(T)$ максимум этих рангов Морли, который совпадает также рангом формулы $x = x$, а через α_{RM} (обозначаемый также часто через α_T) первый ординал, который не является рангом, то есть $\alpha_T = RM(T) + 1$.

Предложение 17.12 *Если теория T тотально трансцендентна, то она стабильна в λ для всех λ, больших или равных $|T|$; если T счетна, то она тотально трансцендентна, если и только если она ω-стабильна.*

Доказательство. Пусть M – модель T мощности λ и p – тип из $S_1(M)$. Если $RM(p) = \alpha$, то по определению RM существует формула $f(x,\bar{a})$, содержащая p и изолирующая его от других типов с RM, большим или равным α. Связь между p и $f(x,\bar{a})$ является следующей: p – единственный тип максимального ранга в формуле $f(x,\bar{a})$; следовательно, типов над M имеется не более чем формул с параметрами в M, откуда следует стабильность T в λ.

Значит, если T счетна и тотально трансцендентна, то она ω-стабильна. Если она не тотально трансцендентна, мы видим, что по определению RM каждая формула с рангом $RM = \infty$ может быть разбита на две несовместимые между собой формулы с $RM = \infty$ (из-за существования ординала α_{RM}: если $RM(f) \geq \alpha_{RM}$, то $RM(f) \geq \alpha_{RM} + 1$!) ; это позволяет построить 2^ω типов, имеющих только ω параметров, как в конце 13.b .

□

Предложение 17.13 *Если $RM(p) \geq |T|^+$, тогда $RM(p) = \infty$; следовательно, если теория T тотально трансцендентна, то $RM(T) < |T|^+$.*

Доказательство. Ранг Морли "без прыжка", и рангов Морли имеется не более, чем формул $f(x,\bar{a})$; для $f(x,\bar{y})$ имеется только $|T|$ возможностей так же, как и для типа $\bar{a}$ над $\emptyset$, из-за стабильности в $|T|$.

□

Лемма 17.14 *Если теория T тотально трансцендентна, то фундаментальный порядок для T имеет не более $|T|$ элементов.*

Доказательство. Теория T будучи стабильной в $|T|$, имеет насыщенную модель M в этой мощности. В $S_1(M)$ находятся представители каждого класса типов: действительно, p из $S_1(N)$ является неотклоняющимся расширением своего ограничения p_1 над элементарным ограничением N_1 модели N, с $|N_1| \leq |T|$. Можно N_1 вложить элементарно в M, затем взять наследника q над M типа, соответствующего p_1 : p и q эквивалентны. Заключение следует из стабильности в $|T|$.

Можно также отметить, что если $f(x, \bar{a})$ изолирует p среди типов того же ранга Морли, то задание $f(x, \bar{a})$, то есть задание $f(x, \bar{y})$ и типа $\bar{a}$ над $\emptyset$, определяет класс типа p в фундаментальном порядке.

□

Весьма простое применение ранга Морли доказывает следующую очень фундаментальную теорему:

Теорема 17.15 *Если теория T тотально трансцендентна, то для каждого множества A параметров изолированные типы образуют плотное множество в $S_1(A)$.*

Доказательство. Пусть $f(x, \bar{a})$ – совместная формула с параметрами из A ; пусть – p тип минимального ранга Морли α из этой формулы; пусть $g(x, \bar{b})$ – формула с параметрами из A, изолирующая p от других типов с $RM = \alpha$, тогда формула $f(x, \bar{a}) \wedge g(x, \bar{b})$ изолирует $p \in S_1(A)$.

□

Следствие 17.16 *Если теория T тотально трансцендентна, то над каждым множеством A параметров имеется простая конструируемая модель.*

Доказательство следует из 17.15 : пусть M – модель, содержащая A. Конструируем последовательность a_α различных элементов из M так, чтобы тип a_α над $A_\alpha = A \cup \{a_\beta\}_{\beta<\alpha}$ был изолирован и продолжаем так, пока это возможно. Этот процесс когда-нибудь остановится, так как он идет в модели M. И когда он закончится, из-за плотности изолированных типов, полученное множество будет моделью, т.е. элементарным ограничением M (мы уже использовали такой аргумент в 6.b, по поводу дифференциально замкнутых полей).

□

Изучим теперь взаимосвязь между $RM(p)$ и "рангом Кантора" (который не является понятием ранга в смысле определения, данного в начале этой главы) типа p в качестве точки топологического пространства $S_1(A)$; из определения RM следует ясно, что $RM(p) \geq RCantor(p)$, поскольку ранг Морли является, как мы отметили, в некотором роде концевым значением ранга Кантора. Вот как он его в конце-концов догоняет:

Предложение 17.17 *Если M ω-насыщенна и $p \in S_1(M)$, то ранг Морли p совпадает его рангом Кантора в топологическом пространстве $S_1(M)$.*

Доказательство. Вместо того, чтобы рассуждать о типах, мы будем рассуждать о формулах: этим последним, определяющим открыто-замкнутые подмножества $S_1(M)$, мы приписываем в качестве ранга Кантора, максимум рангов Кантора точек, которые они содержат.

Достаточно доказать по индукции, что $RCantor(f(x,\bar{a})) \geq \alpha$ как только $RM(f(x,\bar{a})) \geq \alpha$. Нет проблем, если α – предельный. Если $RM(f(x,\bar{a})) \geq \alpha+1$, то для каждого n можно найти формулы $g_1(x,\bar{b}_1),\ldots,g_n(x,\bar{b}_n)$ с параметрами в элементарном расширении M, разбивающих $f(x,\bar{a})$, и с RM, не меньшим α. Так как M ω-насыщенна, в ней кортежом $a_1{}^\frown\ldots{}^\frown a_n$ можно реализовать тип последовательности $b_1{}^\frown\ldots{}^\frown b_n$ над $\bar{a}$ и получить формулы $g_1(x,\bar{a}_1),\ldots,g_n(x,\bar{a}_n)$ с параметрами из M, имеющих те же самые свойства. По гипотезе индукции ранг Кантора открыто-замкнутых подмножеств, определенных каждой из них по, не меньше α. Так как эти формулы составляют разбиение открыто-замкнутого подмножества, определенного формулой $f(x,\bar{a})$ и n – произвольно большое, то $RCantor(f(x,\bar{a})) \geq \alpha+1$.

□

Следствие 17.18 *Теория T тотально трансцендентна, если и только если никакое $S_1(A)$ не содержит совершенное множество (непустое замкнутое множество без изолированных точек) .*

Доказательство. Действительно это условие означает, что каждая точка $S_1(A)$ ранжируется по Кантору.

□

Следствие 17.19 *Если теория T тотально трансцендентна, то для каждого n все n-типы RM-ранжированы.*

Доказательство. Если T счетна, то тотальная трансцендентность эквивалентна ω-стабильности, а ω-стабильность для n-типов ω-стабильности для 1-типов.

В общем случае, если RM не ранжирует все типы, то мы конструируем бинарное дерево формул от n переменных, все с $RM = \infty$, где каждая формула разделена на две формулы на шаге, следующем за ее появлением; так как это дерево использует только счетное множество формул, получаем обеднение T' теории T на счетном языке, которая не ω-стабильна и, таким образом, не тотально трансцендентна, что запрещает теории T быть таковой.

□

Мы могли бы также не расставаться с топологией и доказать, не используя ω-стабильность, что существование совершенного множества в $S_n(A)$ обязывает существование совершенного множества в некотором $S_1(B)$.

Из следствия 17.19 легко вывести факт, детали которого оставляем читателям, о том, что *теория, интерпретируемая в тотально трансцендентной теории, сама тотально трансцендентна*; точно также, *теория, интерпретируемая в суперстабильной теории, сама суперстабильна.* Все это необходимо сопоставить и сравнить с примером 15 из 13.c.

В заключение отметим, что для изучения типов тотально трансцендентной теории мы располагаем тремя рангами: $RU(p) \leq RC(p) \leq RM(p)$. В некоторых случаях некоторые другие ранги, возможно непрерывные или канторовские, могут естественно вводиться в контекст: например, в случае дифференциально замкнутых полей (раздел 6.b) ранг RD, который определяется только для 1-типов, является канторовским рангом, про который можно доказать, что для некоторых типов он строго больше ранга Морли.

Мы обсудили соответствующие преимущества RU и RC; преимущества RM очевидны: он позволяет исследовать свойства типов "поформульно", и очень часто, чтобы изучить тип p в тотально трансцендентной теории, начинают с выбора формулы, которая его изолирует от типов того же ранга Морли. Тем не менее, постарайтесь его не смешивать ни с RC, ни с RU, и не приписывайте ему произвольно свойства аддитивности RU. В некоторых случаях, однако, эти три ранга равны:

Теорема 17.20 *Если T – счетная теория, ω-категоричная и суперстабильная, то она тотально трансцендентна, и для каждого типа p $RU(p) = RC(p) = RM(p)$.*

Доказательство. Пусть p – тип над моделью M теории T. Так как T суперстабильна, то можно найти $\bar{a}$ в M, такой, чтобы p был неотклоняющимся расширением своего ограничению p_1 на $\bar{a}$. По критерию ω-категоричности (теорема 10.11) имеется только конечное число отношений конечной эквивалентности, определимых с параметрами из $\bar{a}$, так что имеется лишь конечное число сильных типов над $\bar{a}$, и что все они реализуются в M. Пусть тогда b реализует сильный тип p над $\bar{a}$. По теореме о конечной эквивалентности p – единственное неотклоняющееся расширение своего ограничения p_2 над $\bar{a}\frown\bar{b}$. По ω-категоричности , p_2 изолируется формулой $f(x, \bar{a}\frown\bar{b})$. И когда мы поднимаемся над M, то видим, что эта формула, которая обязывает быть сыном p_2, изолирует p от типов с тем же RU.

Тогда посредством легкой индукции заключаем, что RU – канторовский ранг, таким образом, $RU = RM$.

□

17.d Локальные ранги

Ранги позволяют изучать, очевидно, только суперстабильные теории, для которых они определены; здесь мы вводим "поформульные" ранги, которые позволяют воспринимать стабильные теории. Они не являются рангами в точном смысле (они не удовлетворяют свойству ограниченной кратности, а второй не имеет даже свойство расширения), а скорее приближением к понятию ранга.

В следующих двух определениях индукцией, мы используем неполные типы; это впрочем абсолютно необходимо для определения ранга дихотомии.

Для формулы $f(x, \bar{y})$ двух неполных типов π_1 и π_2 с параметрами из A говорим, что π_1 и π_2 являются *явно f-противоречивыми*, если для некоторого $\bar{a}$ один влечет $f(x, \bar{a})$, а другой – $\neg f(x, \bar{a})$; маленькая тонкость: такой $\bar{a}$ может быть не в A, но в любом случае найдется в любой модели, содержащей множество A.

Говорим что π_1 и π_2 *неявно f-противоречивы*, если они не могут быть расширены до полных типов над моделью M содержащей A, имеющих одинаковые f-типы; по компактности, это означает, что существуют $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ в M такие, что

$$\pi_1(x_1) \cup \pi_2(x_2) \text{ влечет } \mathbb{W}[f(x_1, \bar{a}_i) \leftrightarrow \neg f(x_2, \bar{a}_i)] \ .$$

Определим *ранг бесконечного f-деления* следующей индукцией:

– $R(\pi, f, \omega) \geq \alpha$ для предельного ординала α, если $R(\pi, f, \omega) \geq \beta$ для всех $\beta < \alpha$ и $R(\pi, f, \omega) \geq 0$ как только π совместен ;

– $R(\pi, f, \omega) \geq \alpha + 1$ если для каждого n можно найти расширения $\pi_1, \ldots, \pi_n$ типа π, параметры которых находятся во множестве расширяющем множество параметров π, все с $R(\pi_i, f, \omega) \geq \alpha$, и которые попарно явно противоречивы.

Вводим также ранг *f-деления на два*, или *f-дихотомии*, следующим образом:

– $R(\pi, f, 2) \geq \alpha$ для предельного α, если $R(\pi, f, 2) \geq \beta$ для всех $\beta < \alpha$,

– $R(\pi, f, 2) \geq \alpha + 1$ если π имеет два явно f-противоречивых расширения π_1 и π_2 с $R(\pi_i, f, 2) \geq \alpha$.

Как обычно, $R(\pi, f, \omega) = \alpha$ если $R(\pi, f, \omega) \geq \alpha$ и $R(\pi, f, \omega) \not\geq \alpha + 1$; $R(\pi, f, \omega) = \infty$ если $R(\pi, f, \omega) \geq \alpha$ для всех α; те же самые определения используются и для $R(\pi, f, 2)$.

Введем теперь два вида дерева формул, приспособленных к этим рангам. Дерево f-дихотомии высоты n является следующим множеством формул: вводится переменная вида x_s для каждого $s \in 2^n$ (напоминаем, что 2^n является множеством отображений из $\{0, \ldots, n-1\}$ в $\{0, 1\}$) и кортеж переменных параметров $\bar{y}_u$ для каждого $u \in 2^{<n} = 2^0 \cup \cdots \cup 2^{n-1}$; и каждый раз, когда s является расширением $u^\frown 0$, берут формулу $f(x_s, \bar{y}_u)$, а каждый раз, когда s является расширением $u^\frown 1$, берут формулу $\neg f(x_s, \bar{y}_u)$. Дерево дихотомии высоты ω определяется аналогичным образом, только на этот раз x индексируется элементами s из 2^ω, а y – элементами u из $2^{<\omega}$.

Для дерева бесконечного f-деления высоты n надо ввести x_s для s из ω^n , и $\bar{y}_{u,i,j}$ для u из $\omega^{<n}$ и натуральных чисел i и j, таких, что $i < j$; это множество формул $f(x_s, \bar{y}_{u,i,j}) \leftrightarrow \neg f(x_t, \bar{y}_{u,i,j})$, где s является продолжением $u^\frown i$, а t продолжением $u^\frown j$. Для дерева бесконечного f-деления высоты ω, s пробегает ω^ω , а u множество $\omega^{<\omega}$.

Говорим, что такое дерево *совместно с π* , если добавить к нему высказывание о том, что все x_s удовлетворяют π, получаем совместное множество формул.

Лемма 17.21 *$R(\pi, f, 2) \geq n$, если и только если π совместно с деревом f-дихотомии высоты n; $R(\pi, f, \omega) \geq n$ если и только, если π совместно с деревом бесконечного f-деления высоты n.*

Доказательство. Это почти очевидно: деревья были построены именно для этого.

□

Лемма 17.22 *Следующие условия эквивалентны :*

a) $R(\pi, f, 2) \geq \omega$,
b) $R(\pi, f, 2) = \infty$,
c) $R(\pi, f, \omega) \geq \omega$,
d) $R(\pi, f, \omega) = \infty$,
e) π *совместен с деревом* f*-дихотомии высоты* ω,
g) π *совместен с деревом бесконечного* f*-деления высоты* ω.

Доказательство. Так как каждый конечный фрагмент дерева дихотомии высоты ω интерпретируется в дереве дихотомии конечный высоты, если $R(\pi, f, 2) \geq \omega$, тогда π совместен с деревом дихотомии высоты ω. Отсюда легко доказать, индукцией по α, что $R(\pi, f, 2) \geq \alpha$: действительно, π разделяется на два (неполных) явно f-противоречивых типа, имеющих дерево дихотомии высоты ω над ними. Мы видим также, что $R(\pi, f, \omega) = \infty$, так как поднимаясь в этом дереве до уровня n, мы разделяем π на 2^n типов, имеющих бесконечное дерево дихотомии над ними; это влечет, что дерево бесконечного деления высоты ω, каждый конечный фрагмент которого интерпретируется в дереве бесконечного деления конечной высоты, совместно с π (можно также заметить, что каждый конечный фрагмент дерева бесконечного деления высоты ω интерпретируется в дереве дихотомии высоты ω) . Остальное следует из очевидного факта, что $R(\pi, f, \omega) \leq R(\pi, f, 2)$.

□

Замечания .

1° В определении $R(\pi, f, \omega)$ можно полагать, что $R(\pi, f, \omega) \geq \alpha + 1$ если для любого λ тип π может разделиться на λ попарно явно f-противоречивых расширений с $R(\quad, f, \omega) \geq \alpha$. Действительно, по компактности совместность с π дерева с λ- ветвлением эквивалентна совместности с ним дерева с ω-ветвлением. Если хотите: $R(\pi, f, \omega) = R(\pi, f, \lambda) = R(\pi, f, \infty)$.

2° Полные типы π с $R(\pi, f, 2) \geq n$, $R(\pi, f, 2) = \infty$, $R(\pi, f, \omega) \geq n$, $R(\pi, f, \omega) = \infty$ образуют всегда замкнутое множество, так как эти условия выражают только совместность некоторого множества формул.

3° По той же причине, если p и q являются полными типами над моделями T, и если $p \geq q$ в фундаментальном порядке, тогда $R(p, f, 2) \geq R(q, f, 2)$, $R(p, f, \omega) \geq R(q, f, \omega)$, так как любой конечный фрагмент p интерпретируется в q.

4° Если $R(\pi, f, 2) = n$, то существует конечный фрагмент π_1 в π, т.е. формула являющаяся следствием π, такая что $R(\pi_1, f, 2) = n$; действительно, если π не совместен с деревом дихотомии высоты $n + 1$, то это из-за его некоторого конечного фрагмента. То же самое верно и для $R(\pi, f, \omega)$.

Лемма 17.23 *Если π – неполный тип с параметрами из A, то его можно пополнить до типа $p \in S_1(A)$ с $R(p, f, \omega) = R(\pi, f, \omega)$; если $p \in S_1(A)$ и $A \subset B$, то p имеет над B сына с тем же $R(\ \ , f, \omega)$.*

Доказательство. Так как все сводится лишь к вопросу совместности, достаточно доказать, что для любого π и для любой формулы $g(x, \bar{a})$, если $R(\pi, f, \omega) \geq n$, тогда $R(\pi \cup g(x, \bar{a}), f, \omega) \geq n$ или $R(\pi \cup \neg g(x, \bar{a}), f, \omega) \geq n$; это делается с помощью легкой индукции по n, заметив, что если разбивать на две части достаточное большое конечное множество, то всегда одна из двух долей будет достаточно большой. Для второго утверждения, нужно рассматривать p в качестве неполного типа над B.

□

Из предыдущей леммы следует, что мы могли ограничиться полными типами для определения $R(p, f, \omega)$: $R(p, f, \omega) \geq \alpha + 1$, если и только если для любого n тип p имеет по крайней мере n (неявно или явно!) попарно противоречивых сыновей с $R(\ \ , f, \omega) \geq \alpha$. Тем не менее удобнее поступать так, как это сделали мы, а *в случае ранга дихотомии*, не удовлетворяющего лемме 17.23, *другого пути нет.*

Предложение 17.24 *Если тип $p \in S_1(A)$, то p стабилен, если и только если для каждой формулы f ранг $R(p, f, 2) < \infty$, и если и только если для каждой формулы f ранг $R(p, f, \omega) < \infty$.*

Доказательство. Лемма 17.22 подтверждает эквивалентность высказываний о двух рангах. Если $R(p, f, 2) = \infty$, то p совместен с деревом дихотомии высоты ω. Для каждого кардинала λ он также совместен с деревом f-дихотомии высоты μ, где μ – наименьший кардинал такой, что 2^{μ} строго больше кардинала λ: это дерево позволяет изготовить 2^{μ} сыновей p с только λ параметрами; таким образом, имеется нестабильность во всех λ для сыновей p , то есть нестабильность для p.

Если $R(p, f, 2) = n$, то пусть $g(x, \bar{b})$ – конечный фрагмент p с тем же $R(\ \ , f, 2)$; если $p \in S_1(A)$ и $\bar{a}$ из A, то из формул $g(x, \bar{b}) \wedge f(x, \bar{a})$ и $g(x, \bar{b}) \wedge \neg f(x, \bar{a})$ только одна имеет ранг дихотомии n, а именно та, которая содержит p ! Однако условие, что $g(x, \bar{b}) \wedge f(x, \bar{a})$ имеет ранг $R(\ \ , f, 2)$, больший или равный n, выражается формулой: навесьте экзистенциальные кванторы перед всем тем, что появляется в дереве дихотомии высоты n, которое конечно. Эта формула $h(\bar{a}, \bar{b})$ является таким образом f-определением для p. Кроме того, любой сын p, имеющий конечный $R(\ \ , f, 2)$, также обладает f-определением. Если это имеет место для каждой формулы f, то все сыновья p определимы, что означает стабильность p.

□

Предложение 17.25 *Если тип p стабилен и q – сын p, тогда q является неотклоняющимся сыном p, если и только если для каждой формулы f верно $R(p, f, \omega) = R(q, f, \omega)$.*

Доказательство. Если $p \in S_1(A)$ и $q \in S_1(B)$, то пусть M – модель, содержащая B, и q_1 – неотклоняющийся сын q над M. Пусть также r – сын p

над M с тем же $R(\ ,f,\omega)$, который существует по лемме 17.23. Если q – неотклоняющийся сын p, то по теореме грани, q_1 выше или равен r относительно фундаментального порядка. Каждый конечный фрагмент q_1 интерпретируется в r и, как мы уже отметили, $R(r,f,\omega) \leq R(q,f,\omega)$. Таким образом, в действительности $R(q_1,f,\omega) = R(q,f,\omega) = R(p,f,\omega)$.

Предположим теперь, что q является отклоняющимся сыном p. Мы только что увидели, что ранг $R(\ ,f,\omega)$ стабильного типа зависит только от его грани, так что можно предполагать, что A и B являются моделями M и N теории T. Пусть $f(x,\bar{a})$ – формула с параметрами из N, такая, что наследник p удовлетворяет $f(x,\bar{a})$, в то время как $q \vdash \neg f(x,\bar{a})$. Реализуем тип q элементом b, и рассмотрим последовательность Морли $\bar{a}_0{}^\frown b_0, \ldots \bar{a}_n{}^\frown b_n, \ldots$ специального сына типа $\bar{a}{}^\frown b$ над M. Обозначим через q_n тип b_n над $M \cup \{\bar{a}_0,\ldots,\bar{a}_n,\ldots\}$. По определению $q_n \vdash \neg f(x,\bar{a}_n)$, в то время как $q_m \vdash f(x,a_n)$, если $m \neq n$, то , так как ограничение q_m на $M \cup \{\bar{a}_n\}$ является наследником p. Таким образом, эти типы попарно f-различные; кроме того, q_n неотклоняющееся расширение своего ограничения на $M \cup \{\bar{a}_n\}$ которое изоморфно и, таким образом, имеет тот же локальный ранг, что ограничение q на $M \cup \{\bar{a}\}$. Имеем $R(q_n,f,\omega) = R(q,f,\omega)$, так что этот последний ранг строго меньше $R(p,f,\omega)$.

$\square$

Таким образом, мы видим что можно определять не только стабильность, а также отклонение, в терминах локального ранга $R(p,f,\omega)$; этот подход тягостный, гораздо более трудоемкий и намного менее концептуальный, чем подход при помощи фундаментального порядка: попытайтесь непосредственно доказать для стабильного p только существование неотклоняющихся расширений (т.е. сыновей q типа p с $R(p,f,\omega) = R(q,f,\omega)$ для *каждой* формулы f) или, например, симметричность отклонения!

Напоследок: для конечного множества Δ формул $\{f_1(x,\bar{y}_1),\ldots,f_n(x,\bar{y}_n)\}$ явное Δ-противоречие означает, что для некоторого индекса i один из типов влечет $f_i(x,\bar{a})$, а другой – $\neg f_i(x,\bar{a})$ для некоторого $\bar{a}$. Мы можем аналогичным способом определять локальные ранги $R(\pi,\Delta,\omega)$ и $R(\pi,\Delta,2)$, и доказать, с помощью некоторых поправок, что они имеют те же свойства, когда множество Δ сводится к единственной формуле.

На самом деле, по крайней мере когда T теория некоторой бесконечной структуры, это обобщение тривиальное, так как каждому конечному множеству формул Δ можно сопоставить формулу f такую, что Δ-противоречие есть то же самое, что f-противоречие, так что локальные ранги, соответствующие Δ, те же, что соответствуют f. Например, если $\Delta = \{f_1(x,\bar{y}_1), f_2(x,\bar{y}_2)\}$, то в качестве формулы f мы берем следующую формулу

$$f(x,\bar{y}_1,\bar{y}_2,z,z_1,z_2) = [(z = z_1 \leftrightarrow f_1(x,\bar{y}_1)) \wedge (z = z_2 \leftrightarrow f_2(x,\bar{y}_2))]\ .$$

17.е Исторические и библиографические примечания

Заслуга выработки таких условий о рангах, чтобы понятие сына того же ранга не зависело от выбранного ранга, и определения наименьшего среди всех рангов принадлежит Ласкару, [ЛАСКАР, 1973], [ЛАСКАР, 1976]. Ранг Шелаха действительно изобретен Шелахом так же, как и локальные ранги, которые он сильно использует в своей разработке отклонения [ШЕЛАХ, 1971b], [ШЕЛАХ, 1978]. Взаимоотношения между рангом Ласкара и рангом Шелаха, 17.9 и 17.10, были установлены в [ПУАЗА, 1977].

Ранг Морли является существенным средством исходной работы Морли, [МОРЛИ, 1965]; логики так плохо представляли отклонение без всякой ссылки на ранг, что пришлось ждать [ЛАХЛАН, 1972], чтобы узнать доказательство того, что полный тип над моделью имеет только единственного сына того же ранга Морли.

О рангах в дифференциальных полях, смотрите [ПУАЗА, 1978a].

По поводу 17.20, структура ω-категоричных суперстабильных теорий прояснилась в магистральной разработке [ЧЕРЛИН-ХАРРИНГТОН-ЛАХЛАН, 1985], вдохновленной предшествующими работами Бориса Зильбера и представляющей главный успех теории моделей этих последних лет. Все эти теории имеют конечный фундаментальный порядок и не конечно аксиоматизируемы.